Q 1. $G_1 = X(G_0 + (1+X)G_0')$ avec $G_0 = 1$ et $G_0' = 0$; il vient $\boxed{G_1 = X}$

$G_2 = X(G_1 + (1+X)G_1') = X\big(X + (1+X)\big) = X(2X+1)$; donc $\boxed{G_2 = 2X^2 + X}$

Q 2. La série $\sum\limits_{k\geqslant 0} x^k$ est la série géométrique, de rayon $\boxed{R_0 = 1}$ et de somme

$$\boxed{D_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]-1,1[}$$

Q 3. R_{n+1} est le rayon de convergence de $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^{n+1}x^k = \sum\limits_{k\geqslant 1} k\times k^n x^k$, et R_n est celui de $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^n x^k$; or on sait que les séries $\sum\limits_{k\geqslant 1} a_k x^k$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} k a_k x^k$ ont le même rayon de convergence ; donc on en déduit que $R_{n+1} = R_n$ et ainsi que $\boxed{\text{la suite } (R_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.}}$ On a donc $R_n = R_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $\boxed{R_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

Q 4. $D_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^n x^k$. D'après le théorème de dérivation terme à terme,

$\forall x \in]-1,1[$, $D_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\times k^n x^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^{n+1}x^{k-1}$; donc $xD_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^{n+1}x^k$; soit $\boxed{D_{n+1}(x) = xD_n'(x)}$

Q 5. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, et $\forall x \in]-1,1[$, $D_n(x) = \dfrac{1}{1-x}G_n\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

- *Initialisation :* $D_0(x) = \frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1-x}G_0\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}$, car $G_0 = 1$; ce qui établit l'initialisation.
- *Hérédité :* On suppose l'égalité vraie pour un certain entier naturel n. D_{n+1} est liée à D_n par la relation : $D_{n+1}(x) = xD_n'(x)$; or, par hypothèse de récurrence, $D_n(x) = \frac{1}{1-x}G_n\left(\frac{x}{1-x}\right)$; donc

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= x\left(\frac{1}{(1-x)^2}G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x}\times\frac{1-x+x}{(1-x)^2}G_n'\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{x}{(1-x)^2}G_n'\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}\left(G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x}G_n'\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)\right) = \frac{1}{1-x}\left(\underbrace{\frac{x}{1-x}\left(G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) + \left(1+\frac{x}{1-x}\right)G_n'\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)}\right)
\end{aligned}$$

  or on sait que G_n vérifie $G_{n+1}(X) = X\big(G_n(X) + (1+X)G_n'(X)\big)$; donc, pour $X = \frac{x}{1-x}$, on a $\frac{x}{1-x}\left(G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) + \left(1+\frac{x}{1-x}\right)G_n'\left(\frac{x}{1-x}\right)\right) = G_{n+1}\left(\frac{x}{1-x}\right)$; ce qui amène :

  $D_{n+1} = \dfrac{1}{1-x}G_{n+1}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ et qui établit l'hérédité.
- *Conclusion :* On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \text{ et } \forall x \in]-1,1[,\ D_n(x) = \frac{1}{1-x}G_n\left(\frac{x}{1-x}\right)}$$

Q 6. Par définition, $F_1 = \sum\limits_{k=0}^{0}\binom{1}{k}F_0 = \binom{1}{0}F_0$; soit $\boxed{F_1 = 1}$

$F_2 = \sum\limits_{k=0}^{1}\binom{2}{k}F_k = \binom{2}{0}F_0 + \binom{2}{1}F_1 = \boxed{3}$ et $F_3 = \sum\limits_{k=0}^{2}\binom{3}{k}F_k = \binom{3}{0}F_0 + \binom{3}{1}F_1 + \binom{3}{2}F_2 = \boxed{13}$

Q 7. Les partitions ordonnées de $\{1,2,3\}$ sont :

$$\begin{gathered}
(\{1\},\{2\},\{3\}),\ (\{1\},\{3\},\{2\}),\ (\{2\},\{1\},\{3\}),\ (\{2\},\{3\},\{1\}),\ (\{3\},\{1\},\{2\}),\ (\{3\},\{2\},\{1\})\\
(\{1\},\{2,3\}),\ (\{2,3\},\{1\}),\ (\{2\},\{1,3\}),\ (\{1,3\},\{2\}),\ (\{3\},\{1,2\}),\ (\{1,2\},\{3\})\\
(\{1,2,3\})
\end{gathered}$$

Il y a donc $\boxed{u_3 = 13 \text{ partitions ordonnées de } \{1,2,3\}}$

Remarque : D'après l'énoncé, on a aussi $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$.

Q 8. Pour créer une partition d'un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments, on choisit une partie à k éléments, avec $k \in [\![1, n]\!]$ (il y a $\binom{n}{k}$ telles parties) et ensuite on choisit une partition de l'ensemble restant à $n-k$ éléments. On a donc bien $\boxed{u_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k}}$

Pour commencer, les suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, coïncident pour les premiers termes :

$$u_0 = F_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = F_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = F_2 = 3 \quad ; \quad u_3 = F_3 = 13$$

Montrons qu'elles vérifient la même relation de récurrence.

On rappelle que $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k$ et

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k} \underset{i=n-k}{=} \sum_{n-1}^{0} \binom{n}{n-i} u_i = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} u_i, \text{ car } \binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$$

Les suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coïncident pour les premiers termes et vérifient la même relation de récurrence, donc sont égales.

Q 9. $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Pour $x = \ln(2)$, on a donc $e^{\ln(2)} = 2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(2))^k}{k!}$; or $\ln(2) > 0$, donc la série est à termes positifs et ainsi $\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(2))^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(2))^k}{k!}$ pour tout entier naturel non nul n.

Ce qui donne : $\underbrace{\frac{(\ln(2))^0}{0!}}_{=1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln(2))^k}{k!} \leqslant 2$; soit $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln(2))^k}{k!} \leqslant 1}$

Q 10. $\frac{F_0}{0!} = 1$ et $\frac{1}{(\ln 2)^0} = 1$; donc $\boxed{\mathscr{P}(0) \text{ est vraie}}$

Q 11. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ 0 \leqslant \frac{F_k}{k!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^k}$ ✪

Pour démontrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, il suffit de démontrer cette égalité pour F_n.

$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{F_k}{k!}$; en sommant les n inégalités ✪, il vient :

$$0 \leqslant F_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(\ln 2)^k} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{F_n}{n!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} (\ln 2)^{n-k} \underset{i=n-k}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant \frac{F_n}{n!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n} \sum_{i=n}^{1} \frac{(\ln 2)^i}{i!}$$

$\Leftrightarrow\ 0 \leqslant \frac{F_n}{n!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\ln 2)^i}{i!}$; or d'après **Q9** on a : $\sum_{i=1}^{n} \frac{(\ln 2)^i}{i!} \leqslant 1$; donc on a bien : $\boxed{0 \leqslant \frac{F_n}{n!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n}}$

Q 12. On note $a_n = \frac{F_n}{n!}$ et on cherche à minorer le rayon R_a de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Par théorème, il suffit donc de majorer a_n ; or $a_n \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n} = b_n$.

Déterminons le rayon R_b de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{x}{\ln 2}\right)^n$; on reconnait une série géométrique de raison $q = \frac{x}{\ln 2}$; elle converge si et seulement si $0 \leqslant q < 1$; donc $R_b = \ln 2$.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série } \sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n}{n!} x^n \text{ est donc minoré par } \ln 2}$$

Q 13. Par unicité du développement en série entière, si f est développable en série entière, alors elle coïncide avec sa série de Taylor : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Or d'après l'énoncé, on a $\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{n!} x^n$.

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = f^{(n)}(0)}$

Or $f^{(n)}(x) = G_n\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right) f(x)$; donc $F_n = G_n\left(\frac{1}{2-1}\right) f(0)$; soit $F_n = G_n(1) = G_n\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)$; d'après **Q5** on obtient :

$F_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) D_n\left(\frac{1}{2}\right)$, avec $D_n\left(\frac{1}{2}\right)$ qui converge car $R_n = 1$; donc $\boxed{F_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^n}{2^k}}$

Q 14. X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ donc $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$ et $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k}$

Q 15. On sait que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$; donc X est d'espérance finie. D'après le théorème du transfert, $\mathbb{E}(X^n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^n\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^n}{2^k}$; donc, d'après **Q13** $\boxed{X^n \text{ est d'espérance finie et } \mathbb{E}(X^n) = 2F_n}$

Q 16. Soit a un réel non entier, alors l'événement $(X \geqslant a)$ est égal à l'événement $(X \geqslant \lfloor a\rfloor + 1)$.

Donc : $\mathbb{P}(X \geqslant a) = \mathbb{P}(X \geqslant \lfloor a\rfloor + 1) = \sum_{k=\lfloor a\rfloor+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k) = 1 - \sum_{k=1}^{\lfloor a\rfloor}\mathbb{P}(X = k) = 1 - \sum_{k=1}^{\lfloor a\rfloor}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor a\rfloor}}{1-\frac{1}{2}}$

soit : $\mathbb{P}(X \geqslant a) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor a\rfloor}\right)$; ou encore : $\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant a) = \frac{1}{2^{\lfloor a\rfloor}}}$

Q 17. On a $g_n : t \mapsto t^n e^{-t\ln 2}$.

g_n est dérivable comme produit et composée de telles fonctions.
$g_n'(t) = nt^{n-1}e^{-t\ln 2} + t^n(-\ln 2)e^{-t\ln 2} = t^{n-1}e^{-t\ln 2}\left(n - t\ln 2\right)$;
de plus, par prépondérance, $\lim_{t\to+\infty} g_n(t) = 0$.
On peut dresser le tableau de variations ci-contre :

x	0		$\frac{n}{\ln 2}$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
g_n	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

Donc g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ valant $\boxed{M_n = g_n\left(\frac{n}{\ln 2}\right) = \left(\frac{n}{\ln 2}\right)^n e^{-\frac{n}{\ln 2}\ln 2} = \left(\frac{n}{e\ln 2}\right)^n}$

Q 18. Soit a un réel positif.

$\mathbb{E}(X^n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^n\mathbb{P}(X = k) \geqslant \sum_{k=\lfloor a\rfloor+1}^{+\infty} k^n\mathbb{P}(X = k) \geqslant \sum_{k=\lfloor a\rfloor+1}^{+\infty} a^n\mathbb{P}(X = k) \geqslant a^n \sum_{k=\lfloor a\rfloor+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k)$

et donc : $\boxed{\mathbb{E}(X^n) \geqslant a^n\mathbb{P}(X \geqslant a)}$ pour tout a réel positif.

Q 19. D'après **Q15**, $F_n = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X^n)$, donc $F_n \geqslant \frac{1}{2}a^n\mathbb{P}(X \geqslant a) \geqslant \frac{1}{2}a^n \times \frac{1}{2^{\lfloor a\rfloor}} \geqslant \frac{1}{2}(\lfloor a\rfloor)^n e^{-\lfloor a\rfloor\ln 2} \geqslant \frac{1}{2}g_n(\lfloor a\rfloor)$, pour tout a réel strictement positif. En particulier $F_n \geqslant \frac{1}{2}M_n$; soit $\boxed{F_n \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{n}{e\ln 2}\right)^n}$

Q 20. Tout d'abord, g_n est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale n'est donc pas généralisée en 0 et on peut écrire : $\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Ensuite, par prépondérance, $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^n e^{-t\ln 2}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} t^{n+2}e^{-t\ln 2} = 0$; donc $t^n e^{-t\ln 2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$; et on sait que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, donc, par comparaison $\int_1^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

$\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t\ln 2}\,\mathrm{d}t$; on pose : $\left\{\begin{array}{lll} u(t) = t^{n+1} & \Rightarrow & u'(t) = (n+1)t^n \\ v'(t) = e^{-t\ln 2} & \Rightarrow & v(t) = -\frac{1}{\ln 2}e^{-t\ln 2}\end{array}\right.$; les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$; donc, par intégration par parties :

$\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[-\frac{t^n}{\ln 2}e^{-t\ln 2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{n+1}{\ln 2}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t\ln 2}\,\mathrm{d}t$; ce qui donne :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n+1}{\ln 2}\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t}$$

Q 21. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$

- *Initialisation :* $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\ln 2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln 2}$ et $\displaystyle\frac{0!}{(\ln 2)^{0+1}} = \frac{1}{\ln 2}$, donc l'égalité est initialisée.
- *Hérédité :* On suppose l'égalité vraie pour un certain n.
  D'après la question précédente : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n+1}{\ln 2}\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$, donc par hypothèse de récurrence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n+1}{\ln 2}\times\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(\ln 2)^{n+2}}$, ce qui établit l'hérédité.
- *Conclusion :* On a bien montré par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}}$

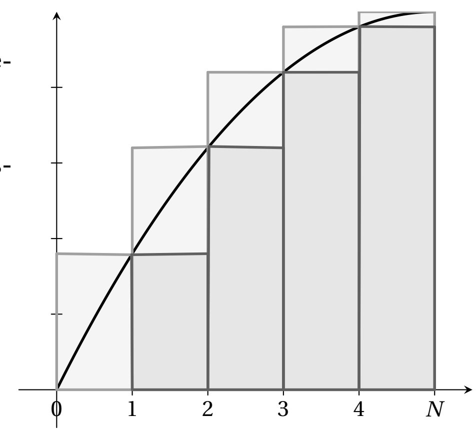
Q 22. On pose $N = \lfloor \frac{n}{\ln 2}\rfloor$, alors, d'après le tableau de variation établi à la question **Q17**, g_n est croissante sur $[0, N]$ et décroissante sur $[N+1, +\infty[$.

Q 23.

Par définition, pour une fonction positive, l'intégrale représente l'aire sous la courbe.

On peut encadrer l'aire sous la courbe d'une fonction croissante par les sommes de Riemann :

$$\boxed{\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} g_n(k)}_{\text{gris moyen}} \leqslant \int_0^N g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{N} g_n(k)}_{\text{gris clair}}}$$



Q 24. Sur $[N+1, +\infty[$, la fonction g_n est continue, positive et décroissante, on peut donc appliquer le théorème de comparaison série-intégrale. L'intégrale $\displaystyle\int_{N+1}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} g_n(k)$ converge également; et on a l'encadrement :

$$\boxed{\sum_{k=N+2}^{+\infty} g_n(k) \leqslant \int_{N+1}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} g_n(k)}$$

Q 25.
- Tout d'abord : $\displaystyle -\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t = -\int_N^{0} g_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{+\infty}^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t$
  soit $\displaystyle -\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} + \int_0^{N} g_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{N+1}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$
- On utilise les majoration précédentes : $\displaystyle -\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{N} g_n(k) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} g_n(k)$
  soit : $\displaystyle -\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{+\infty} g_n(k) = -\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{+\infty} k^n \mathrm{e}^{-k\ln 2} = -\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k}$
  Or d'après la relation (II.1) on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k} = 2F_n$, donc $\displaystyle -\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} + 2F_n$.
- On utilise maintenant les minorations : $\displaystyle -\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} + \sum_{k=0}^{N-1} g_n(k) + \sum_{k=N+2}^{+\infty} g_n(k)$
  soit : $\displaystyle -\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{+\infty} g_n(k) - g_n(N) - g_n(N+1) + \underbrace{g_n(0)}_{=0}$

ce qui donne : $-\displaystyle\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} + 2F_n - g_n(N) - g_n(N+1)$.

On a bien établi l'encadrement :

$$\boxed{-\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2F_n - \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \leqslant g_n(N) + g_n(N+1) - \int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t}$$

Q 26.
- $\forall t \in [N, N+1],\ g_n(t) \leqslant M_n$; donc $\displaystyle\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (N+1-N)M_n$; soit $-\displaystyle\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -M_n$;
  ce qui donne : $-\dfrac{M_n}{2} \leqslant F_n - \dfrac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}}$.
- $\forall t \in [N, N+1],\ g_n(t) \geqslant 0$, donc $g_n(N) + g_n(N+1) - \displaystyle\int_N^{N+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g_n(N) + g_n(N+1) \leqslant M_n + M_n$;
  ce qui donne : $F_n - \dfrac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} \leqslant M_n$.

On a bien établi l'encadrement : $\boxed{-\dfrac{M_n}{2} \leqslant F_n - \dfrac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} \leqslant M_n}$. On en déduit :

$$-\frac{M_n}{2} + \frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} \leqslant F_n \leqslant M_n + \frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} \iff -\frac{M_n(\ln 2)^{n+1}}{n!} + 1 \leqslant \frac{F_n}{\frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}}} \leqslant \frac{2M_n(\ln 2)^{n+1}}{n!} + 1$$

Déterminons la limite de $\frac{M_n(\ln 2)^{n+1}}{n!}$; d'après l'équivalent de Stirling on a $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$;

donc : $\dfrac{M_n(\ln 2)^{n+1}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{M_n(\ln 2)^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \dfrac{\left(\frac{n}{e\ln 2}\right)^n (\ln 2)^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \dfrac{\ln 2}{\sqrt{2\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Par encadrement on a donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{F_n}{\frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}}} = 1$; ce qui prouve : $\boxed{F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}}}$

Q 27.
- Tout d'abord, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$; alors $\deg(P(X)) = \deg(P(X+1)) \leqslant n$, et donc $2P(X) - P(X+1)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n et φ_n est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
- Ensuite, soient P_1, P_2 de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; $\varphi_n(\lambda P_1 + P_2) = 2\big(\lambda P_1 + P_2\big)(X) - \big(\lambda P_1 + P_2\big)(X+1)$;
  soit : $\varphi_n(\lambda P_1 + P_2) = \lambda\big(2P_1(X) - P_1(X+1)\big) + \big(2P_2(X) - P_2(X+1)\big) = \lambda\varphi_n(P_1) + \varphi_n(P_2)$;
  ce qui prouve que φ_n est linéaire et que finalement, $\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$

Q 28. Soit λ une valeur propre de φ_n associée au vecteur propre de degré p, $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$

$\varphi_n(P) = \lambda P \iff 2\big(a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p\big) - \big(a_0 + a_1(X+1) + \cdots + a_p(X+1)^p\big) = \lambda\big(a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p\big)$

En s'intéressant uniquement aux termes de degré p, il vient : $2a_pX^p - a_pX^p = \lambda a_pX^p \iff a_p = \lambda a_p$;

or $a_p \neq 0$; donc $\boxed{\lambda = 1}$

La valeur 0 n'est pas valeur propre de φ_n donc il n'existe pas de vecteur non nul P tel que $\varphi_n(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ et que $\boxed{\varphi_n \text{ est injective}}$

Q 29. Comme φ_n possède une seule valeur propre $\lambda = 1$, l'endomorphisme est diagonalisable si et seulement si $\dim\big(\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - \varphi_n)\big) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.

Mais $\dim\big(\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - \varphi_n)\big) = n+1$ impliquerait que φ_n est l'endomorphisme identité ;

or $\varphi_n(X) = 2X - (X+1) = X - 1 \neq X$; donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - \varphi_n)\big) < n+1$ et $\boxed{\varphi_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Q 30. Comme φ_n est un endomorphisme injectif, on peut en déduire que φ_n est également surjectif, donc est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$; ainsi $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ possède un unique antécédent par φ_n, autrement dit, il existe un unique polynôme P_n tel que $\varphi_n(P_n) = X^n \iff 2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n$.

Q 31. Si on note a_pX^p le terme de plus haut de degré de P_n, on a vu **Q28** que celui de $2P_n(X) - P_n(X+1)$ est aussi a_pX^p ; donc $\deg\big(2P_n(X) - P_n(X+1)\big) = \deg(P_n)$; or $2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n$ donc $\boxed{\deg(P_n) = n}$

Q 32. $2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n$, donc en particulier, $2P_n(k) - P_n(k+1) = k^n$ soit $\boxed{\dfrac{k^n}{2^k} = \dfrac{P_n(k)}{2^{k-1}} - \dfrac{P_n(k+1)}{2^k}}$

Soit $N \in \mathbb{N}$; on somme les égalités présentes pour $k \in [\![0, N]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{k^n}{2^k} = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{P_n(k)}{2^{k-1}} - \frac{P_n(k+1)}{2^k} \right)$;

la deuxième somme est télescopique donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{k^n}{2^k} = \frac{P_n(0)}{2^{-1}} - \frac{P_n(N+1)}{2^N}$

$P_n(N+1) = a_0 + a_1(X+1) + \cdots + a_n(N+1)^n$, donc, par prépondérance, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{P_n(N+1)}{2^N} = 0$;

ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k} = 2P_n(0)$; ce qui montre bien, d'après (II.1), que $\boxed{P_n(0) = F_n}$.

Q 33. P_{n+1} est défini par la relation $2P_{n+1}(X) - P_{n+1}(X+1) = X^{n+1}$; on dérive les deux membres, il vient : $2P'_{n+1}(X) - P'_{n+1}(X+1) = (n+1)X^n = (n+1)\big(2P_n(X) - P_n(X+1)\big) = 2\big((n+1)P_n(X)\big) - \big((n+1)P_n(X+1)\big)$;
soit : $\varphi_n(P'_{n+1}) = \varphi_n\big((n+1)P_n\big)$; or φ_n est injective, donc : $\boxed{P'_{n+1} = (n+1)P_n}$

Q 34. La formule de Taylor appliqué au polynôme P_n donne : $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

D'après la question précédente, $P'_n = nP_{n-1}$, donc $P"_n = n(n-1)P_{n-2}$ et on démontre pour $k \in [\![0, n]\!]$, que $P_n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)P_{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}$; soit : $P_n^{(k)}(0) = \dfrac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}(0) = \dfrac{n!}{(n-k)!}F_{n-k}$.

En reportant dans la formule de Taylor, on a bien $\boxed{P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k} X^k}$

Q 35. D'après **Q31**, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$; donc en particulier, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$; ainsi la famille $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ est constituée de $n+1$ polynômes échelonnés en degrés, donc forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un $(n+1)-$uplet (unique) tel que $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$.

Q 36. $\varphi_n(P^{(j)}) = 2P^{(j)}(X) - P^{(j)}(X+1)$ et $\big(\varphi_n(P)\big)^{(j)} = \big(2P(X) - P(X+1)\big)^{(j)}$; or la dérivation est linéaire, donc pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ on a bien : $\boxed{\varphi_n\big(P^{(j)}\big) = \big(\varphi_n(P)\big)^{(j)}}$

- *Symétrie :*
$$\langle Q, P\rangle = \sum_{j=0}^{n} \frac{\big(2Q^{(j)}(0) - Q^{(j)}(1)\big)\big(2P^{(j)}(0) - P^{(j)}(1)\big)}{(j!)^2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\big(2P^{(j)}(0) - P^{(j)}(1)\big)\big(2Q^{(j)}(0) - Q^{(j)}(1)\big)}{(j!)^2} = \langle P, Q\rangle$$
- *Bilinéarité :* Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes, et λ un scalaire.
$$\begin{aligned}\langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\big(2(\lambda P_1 + P_2)^{(j)}(0) - (\lambda P_1 + P_2)^{(j)}(1)\big)\big(2Q^{(j)}(0) - Q^{(j)}(1)\big)}{(j!)^2} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\big(2\lambda P_1^{(j)}(0) + 2P_2^{(j)}(0) - \lambda P_1^{(j)}(1) - P_2^{(j)}(1)\big)\big(2Q^{(j)}(0) - Q^{(j)}(1)\big)}{(j!)^2} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\Big(\lambda\big(2P_1^{(j)}(0) - P_1^{(j)}(1)\big) + 2P_2^{(j)}(0) - P_2^{(j)}(1)\Big)\big(2Q^{(j)}(0) - Q^{(j)}(1)\big)}{(j!)^2} \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{n} \frac{\big(2P_1^{(j)}(0) - P_1^{(j)}(1)\big)\big(2Q^{(j)}(0) - Q^{(j)}(1)\big)}{(j!)^2} + \sum_{j=0}^{n} \frac{\big(2P_2^{(j)}(0) - P_2^{(j)}(1)\big(2Q^{(j)}(0) - Q^{(j)}(1)\big)}{(j!)^2}\end{aligned}$$
$= \lambda\langle P_1, Q\rangle + \langle P_2, Q\rangle$; donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche et symétrique donc bilinéaire.
- *Positivité :* $\langle P, P\rangle = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\big(2P^{(j)}(0) - P^{(j)}(1)\big)^2}{(j!)^2} \geqslant 0$
- *Définie-positivité :* On pose $\langle P, P\rangle = 0$; or une somme de termes positifs ou nuls est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, donc
$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad 2P^{(j)}(0) - P^{(j)}(1) = 0 \Leftrightarrow \varphi_n(P^{(j)})(0) = 0 \Leftrightarrow \big(\varphi_n(P)\big)^{(j)}(0) = 0$; on en déduit que 0 est une racine de multiplicité $n+1$ de $\varphi_n(P)$; or $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\varphi_n(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ et comme φ_n est injective, on en déduit que $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

$\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est symétrique, bilinéaire, positive et définie-positive, donc définit bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X]}$

Q 37. $2P_k^{(j)}(0)-P_k^{(j)}(1)=\varphi_n\big(P_k^{(j)}\big)(0)=\big(\varphi_n(P_k)\big)^{(j)}(0)=\big(X^k\big)^{(j)}(0)$

- Si $j<k$, alors $\big(X^k\big)^{(j)}=\frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j}$ et donc $\big(X^k\big)^{(j)}(0)=0$.
- Si $j=k$, alors $\big(X^k\big)^{(k)}=k!$ et donc $\big(X^k\big)^{(j)}(0)=k!$.
- Si $j>k$, alors $\big(X^k\big)^{(j)}=0$ et donc évidemment $\big(X^k\big)^{(j)}(0)=0$.

On a bien : $\boxed{2P_k^{(j)}(0)-P_k^{(j)}(1)=\begin{cases}0 & \text{si } j\neq k\\ k! & \text{si } j=k\end{cases}}$

Q 38. On rappelle (**Q35**) que la famille $\big(P_0,P_1,\ldots,P_n\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Soient $k\neq\ell$ deux entiers naturels de $[\![0,n]\!]$.
$\langle P_k,P_\ell\rangle=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{\big(2P_k^{(j)}(0)-P_k^{(j)}(1)\big)\big(2P_\ell^{(j)}(0)-P_\ell^{(j)}(1)\big)}{(j!)^2}$; dans cette somme la variable j ne peut pas être égal à la fois à k et à ℓ donc dans les produits, au moins un des facteurs est nul et ainsi $\langle P_k,P_\ell\rangle=0$ et les vecteurs P_k et P_ℓ sont orthogonaux.
- $\langle P_k,P_k\rangle=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{\big(2P_k^{(j)}(0)-P_k^{(j)}(1)\big)^2}{(j!)^2}=\frac{\big(2P_k^{(k)}(0)-P_k^{(k)}(1)\big)^2}{(k!)^2}=\frac{(k!)^2}{(k!)^2}=1$ et donc P_k est de norme 1.

On a bien montré que $\boxed{\text{la famille } \big(P_0,P_1,\ldots,P_n\big) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X]}$

Q 39. On a la formule de l'expression d'un vecteur dans une base orthonormée : $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\langle P_k,P\rangle P_k$,

avec $\langle P_k,P\rangle=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{\big(2P_k^{(j)}(0)-P_k^{(j)}(1)\big)\big(2P^{(j)}(0)-P^{(j)}(1)\big)}{(j!)^2}$; dans cette somme il ne reste que le terme d'indice $j=k$, soit $\langle P_k,P\rangle=\dfrac{\big(2P_k^{(k)}(0)-P_k^{(k)}(1)\big)\big(2P^{(k)}(0)-P^{(k)}(1)\big)}{(k!)^2}=\dfrac{k!\big(2P^{(k)}(0)-P^{(k)}(1)\big)}{(k!)^2}=\dfrac{\varphi_n(P)^{(k)}(0)}{k!}$,
ce qui donne :

$$\boxed{P=\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi_n(P)^{(k)}(0)}{k!}P_k}$$