SPÉ TSI Corrigé de CCP 2002 $2^{\text{ème}}$ épreuve

A 1) On a : $\forall\,\theta\in J \quad \overrightarrow{T}(\theta)\perp\overrightarrow{u}(3\theta) \iff \left(\widehat{\overrightarrow{u}(3\theta),\overrightarrow{T}(\theta)}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \left(\widehat{\overrightarrow{u}(3\theta),\overrightarrow{i}}\right)\left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{u}(\theta)}\right)\left(\widehat{\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{T}(\theta)}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$\iff V(\theta) = \left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{u}(3\theta)}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{u}(\theta)}\right)\frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff V(\theta) = 3\theta - \theta\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

La condition imposée équivaut donc bien à : $\forall\,\theta\in J \quad V(\theta) = 2\theta\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

A 2) Γ est birégulière, donc régulière, donc le premier vecteur dérivé, $f'(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)f(\theta)\overrightarrow{u}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$, ne s'annule pas et dirige la tangente à Γ en $M(\theta)$ pour tout θ de J ; de plus ceci entraîne que $\big(f(\theta),f'(\theta)\big)$ n'est jamais $0_{\mathbb{R}^2}$.
Soit donc θ fixé dans J.

$\boxed{1^{\text{er}}\text{ cas}}$ $2\theta\neq 0\ [\pi]$

alors : $V(\theta) = 2\theta\frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff tan\,V(\theta) = tan\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right) \iff \dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)} = -\dfrac{cos(2\theta)}{sin(2\theta)}$

$\iff f'(\theta)\,cos(2\theta)f(\theta)\,sin(2\theta) = 0$ le retour est assuré car $\begin{cases}\big(f(\theta),f'(\theta)\big)\neq 0_{\mathbb{R}^2}\\ \text{et}\\ 2\theta\neq 0\ [\pi]\end{cases}$

$\boxed{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$ $2\theta = 0\ [\pi]$

alors : $V(\theta) = 2\theta\frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff V(\theta) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff f'(\theta) = 0 \iff f'(\theta)\,cos(2\theta)f(\theta)\,sin(2\theta) = 0$

Donc : $\left(\forall\,\theta\in J \quad V(\theta) = 2\theta\frac{\pi}{2}\ [\pi]\right) \iff \left(\forall\,\theta\in J \ \text{ et} \begin{array}{l}\big(f(\theta),f'(\theta)\big)\neq 0_{\mathbb{R}^2}\\ f'(\theta)\,cos(2\theta)f(\theta)\,sin(2\theta) = 0\end{array}\right)$

A 3) (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène.
L'ensemble des solutions de (E) est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Si J est un intervalle de longueur non nulle sur lequel $cos(2\theta)$ ne s'annule pas, alors l'ensemble des solutions de (E) sur J est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1, plus précisément, on a alors :

$$\big(\forall\,\theta\in J \quad f'(\theta)\,cos(2\theta)f(\theta)\,sin(2\theta) = 0\big) \iff \big[\,\exists\,\alpha\in\mathbb{R}\,/\,\forall\,\theta\in J \quad f(\theta) = \alpha\,exp\big(g(\theta)\big)\,\big]$$

où g est une primitive sur J de $\theta\longmapsto -\dfrac{sin(2\theta)}{cos(2\theta)}$

On peut remarquer que, J étant toujours un intervalle de longueur non nulle sur lequel $cos(2\theta)$ ne s'annule pas, dire "f est une solution de (E) sur J autre que la fonction nulle" équivaut à dire "f est une solution de (E) sur J telle que f ne s'annule pas" et cela équivaut donc encore à dire "f est une solution de (E) sur J telle que le couple (f,f') ne s'annule pas", tout ceci car exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; ce qui précise la conclusion de 2).

Sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$: $-\displaystyle\int\frac{sin(2\theta)}{cos(2\theta)}\,d\theta = \int\frac{d\big(cos(2\theta)\big)}{2\,cos(2\theta)} = \frac{1}{2}\,ln|cos(2\theta)|cste$

Donc : $\left(\forall\,\theta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\quad f'(\theta)\,cos(2\theta)f(\theta)\,sin(2\theta) = 0\right) \iff \left(\exists\,\alpha\in\mathbb{R}\,/\,\forall\,\theta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\quad f(\theta) = \alpha\sqrt{cos(2\theta)}\right)$

A 4) On a immèdiatement : $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^{*2},\ \forall\,\theta\in\left]-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right[\quad f_\lambda(\theta)\ =\ \lambda\sqrt{cos(2\theta)}$ et $f_\mu(\theta)\ =\ \mu\sqrt{cos(2\theta)}$

Donc : $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^{*2},\ \forall\,\theta\in\left]-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right[\quad f_\mu(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)\ =\ \dfrac{\mu}{\lambda}\,f_\lambda(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$

Donc, pour tout couple (λ,μ) de $\mathbb{R}^{*2}$, $\mathcal{C}_\mu$ est l'image de $\mathcal{C}_\lambda$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{\mu}{\lambda}\cdot$

A 5) Soit λ fixé dans $\mathbb{R}^*$. On a : $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}} f_\lambda(\theta)\ =\ 0$

De plus : $\forall\,\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{4}\,,\dfrac{\pi}{4}\right[\quad \dfrac{f_\lambda(\theta)\ -\ 0}{\theta\ -\ \frac{\pi}{4}}\ =\ \dfrac{\lambda\sqrt{cos(2\theta)}}{\theta\ -\ \frac{\pi}{4}}\ =\ \dfrac{\lambda\sqrt{cos\left(\frac{\pi}{2}-2u\right)}}{-u}\ =\ \dfrac{\lambda\sqrt{sin(2u)}}{-u}$ on a posé $\theta=\frac{\pi}{4}-u$

$$\underset{\theta\to\frac{\pi}{4}^-}{\sim}\ \lambda\,\frac{\sqrt{2u}}{-u}\ =\ -\frac{\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{u}}\ \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{4}^-]{}\ -\infty\times sgn\,\lambda$$

Donc f_λ n'admet pas de prolongement dérivable en $\frac{\pi}{4}\cdot$

Donc, parmi les solutions de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right[$, seule la fonction nulle admet un prolongement dérivable en $\frac{\pi}{4}\cdot$

On aurait pu résoudre (E) sur $\left]-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\,,\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right[$ pour tout k de $\mathbb{Z}$ de la même façon qu'en 3) à la seule condition de remplacer $\sqrt{cos(2\theta)}$ par $\sqrt{|cos(2\theta)|}$.

En reprenant le raisonnement ci-dessus, on obtient de même que, parmi les solutions de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\,,\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right[$ seule la fonction nulle admet un prolongement dérivable en $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; ceci pour tout k de $\mathbb{Z}$.

Ceci suffit pour conclure que (E) a une seule solution sur $\mathbb{R}$, la fonction nulle.

A 6.1) On admet que toute solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right[$ est développable en série entière ; soit donc α, fixé dans $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite réelle, tels que : $\forall\,\theta\in]-\alpha,\alpha[\quad f_1(\theta)\ =\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\theta^n$

On a : $f_1(0)\ =\ 1$ donc $\underline{a_0\ =\ 1}$

De plus : $\forall\,\theta\in]-\alpha,\alpha[\quad 0\ =\ f_1'(\theta)\,cos(2\theta)f_1(\theta)\,sin(2\theta)\ =\ \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n\theta^{n-1}\right)cos(2\theta)\ +\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\theta^n\right)sin(2\theta)$

$$=\ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} na_n\theta^{n-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}\theta^{2n}}{(2n)!}\right)\ +\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\theta^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$=\ \left(a_1+2a_2\theta+3a_3\theta^2\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{2}\right)\ +\ \left(a_0+a_1\theta\right)\times2\theta o(\theta^2)$$

$$=\ a_1(2a_2+2a_0)\,\theta(-2a_1+3a_3+2a_1)\,\theta^2o(\theta^2)$$

Donc : $\begin{cases}a_1=0\\2(a_0+a_2)=0\\3a_3=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}a_1=0\\a_2=-a_0\\a_3=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}a_1=a_3=0\\a_2=-a_0=-1\end{cases}$

Donc : $\underline{\forall\,\theta\in]-\alpha,\alpha[\quad f_1(\theta)\ =\ 1\ -\ \theta^2\sum\limits_{n=4}^{+\infty} a_n\theta^n}$

A 6.2) On a : $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad cos(2x) \;=\; \sum\limits_{n=0}^{p} \dfrac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} o(x^{2p+1})$

Et : $\forall\, p \in \mathbb{N}^* \quad (1+u)^{1/2} \;=\; 1 \sum\limits_{n=1}^{p} \Big[\prod\limits_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2} - k + 1\right) \Big] \times \dfrac{u^n}{n!} o(u^p) \;=\; 1 \sum\limits_{n=1}^{p} \Big[\prod\limits_{k=1}^{n} (-1 + 2k - 2) \Big] \times \dfrac{(-1)^n u^n}{2^n n!} o(u^p)$

$$= 1 \sum_{n=1}^{p} \Big[\prod_{k=1}^{n} (2k-3) \Big] \times \frac{(-1)^n u^n}{2^n n!} o(u^p)$$

$$= 1 \frac{u}{2} \sum_{n=2}^{p} \Big[\prod_{k=2}^{n} (2k-3) \Big] \times \frac{(-1)^{n-1} u^n}{2^n n!} o(u^p)$$

$$= 1 \frac{u}{2} \sum_{n=2}^{p} \frac{(2n-2)!\,(-1)^{n-1} u^n}{2^n n! \prod\limits_{k=1}^{n-1} (2k)} o(u^p)$$

Donc : $\forall\, p \in \mathbb{N}^* \quad (1+u)^{1/2} \;=\; 1 \dfrac{u}{2} \sum\limits_{n=2}^{p} \dfrac{(2n-2)!\,(-1)^{n-1} u^n}{2^{2n-1} n!\,(n-1)!} o(u^p)$

De plus : $f_1(\theta) \;=\; \sqrt{cos(2\theta)} \;=\; \left(1 \;-\; \dfrac{2^2\theta^2}{2!} o(\theta^3)\right)^{1/2} \;=\; \left[1 \;-\; 2\theta^2 o(\theta^3)\right]^{1/2} \;=\; 1 - \theta^2 o(\theta^3)$

Or la partie régulière du développement limité de f_1 est aussi le début de son développement en série entière, donc : $\forall\, \theta \in]\text{-}\alpha, \alpha[\quad f_1(\theta) \;=\; 1 \;-\; \theta^2 \sum\limits_{n=4}^{+\infty} a_n \theta^n$

A 6.3) On a donc : $f_1(\theta) \;=\; 1 \;-\; \theta^2 o(\theta^3) \;=\; \sum\limits_{n=0}^{3} \dfrac{f_1^{(n)}(0)}{n!} \theta^n o(\theta^3)$

Donc : $f_1(0) \;=\; 1, \quad f_1'(0) \;=\; f_1^{(3)}(0) \;=\; 0, \quad f_1''(0) \;=\; -2$

B 1.1) ρ est manifestement paire, il suffit donc d'étudier $\mathcal{C}_1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ et on complètera par symétrie par rapport à Ox.
On a déjà vu : $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}^-} \sqrt{cos(2\theta)} \;=\; 0.$

On peut donc prolonger continument $\mathcal{C}_1$ en posant : $M\left(\frac{\pi}{4}\right) = M\left(\text{-}\frac{\pi}{4}\right) = O$

De plus : $\forall\, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\quad V(\theta) \;=\; 2\theta + \frac{\pi}{2}\ [\pi] \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{4}^-]{} \pi\ [\pi]$

La demi-tangente à $\mathcal{C}_1$ en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est donc dirigée par $\overrightarrow{u}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, donc par $\vec{i} + \vec{j}$, par symétrie, la demi-tangente en $M\left(\text{-}\frac{\pi}{4}\right)$ est dirigée par $\vec{i} - \vec{j}$.

θ	0		$\pi/4$
ρ	1	$+$	0

B 1.2) On a : $\forall\,\theta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\quad V(\theta) = 2\theta+\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Donc : $\begin{pmatrix}\text{La tangente en}\\ M(\theta)\text{ est verticale}\end{pmatrix} \iff V(\theta)+\theta=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff 3\theta+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \theta=0\ \left[\frac{\pi}{3}\right] \iff \theta=0$

$\begin{pmatrix}\text{La tangente en}\\ M(\theta)\text{ est horizontale}\end{pmatrix} \iff V(\theta)+\theta=0\ [\pi] \iff 3\theta+\frac{\pi}{2}=0\ [\pi] \iff \theta=-\frac{\pi}{6}\ \left[\frac{\pi}{3}\right] \iff \theta=\pm\frac{\pi}{6}$

Or : $f_1(0)=1,\quad f_1\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0,707$

$f_1\left(\frac{\pi}{6}\right)\times cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\simeq 0,612,\quad f_1\left(\frac{\pi}{6}\right)\times sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\simeq 0,354$

Donc : $\mathcal{C}_1$ présente un point à tangente verticale et un seul, $M(0)\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$;

$\mathcal{C}_1$ présente deux points à tangente horizontale : $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\rho\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, coordonnées approchées $(0,612\,;\,0,354)$

et $M\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, symètrique de $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ par rapport à Ox.

B 1.3) La tangente en $M(0)$ est verticale donc $\overrightarrow{T}(0)$ est $\pm\vec{j}$; l'orientation de la courbe impose : $\underline{\overrightarrow{T}(0)=\vec{j}}$

Donc : $\underline{\overrightarrow{N}(0)=-\vec{i}}$

On a : $\forall\,\theta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\quad s'^2(\theta)=\rho^2(\theta)\rho'^2(\theta)=cos(2\theta)\dfrac{sin^2(2\theta)}{cos(2\theta)}=\dfrac{cos^2(2\theta)+sin^2(2\theta)}{cos(2\theta)}=\dfrac{1}{cos(2\theta)}$

De plus : $\forall\,\theta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\quad \alpha(\theta)=\theta V(\theta)=3\theta+\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Donc : $s'^2(0)=1$ et $\alpha'(0)=3,\qquad$ donc $R(0)=\dfrac{ds}{d\alpha}(0)=\dfrac{1}{3}$

Le centre de courbure de $\mathcal{C}_1$ en $M(0)$ est donc $\Omega(0)\Big|\begin{matrix}2/3\\0\end{matrix}$ $\quad(\Omega=M+R\overrightarrow{N})$

B 2) On a :
- $\theta\longmapsto\frac{1}{\sqrt{cos(2\theta)}}$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$
- $\frac{1}{\sqrt{cos(2\theta)}}=\frac{1}{\sqrt{cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]}}=\frac{1}{\sqrt{sin(2u)}}\underset{u\to 0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{2}\,u^{1/2}}\quad\left(\theta=\frac{\pi}{4}-u\right)$
- $\theta\longmapsto\frac{1}{\sqrt{cos(2\theta)}}$ est paire.

Donc, d'après la règle de l'équivalence et les intégrales de Riemann, I converge.

B 3) On a : $L=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}^-}\int_{-\alpha}^{\alpha}s'(\theta)\,d\theta=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}^-}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{cos(2\theta)}}=I$

B 4.1) $L=I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sqrt{cos(2\theta)}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sqrt{cos(2\theta)}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{cos(2\theta)}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sqrt{cos(2\theta)}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{-d\psi}{\sqrt{cos(-2\psi)}}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sqrt{cos(2\theta)}}$

Donc : $L=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{cos\,\varphi}}\qquad$ (on a posé successivement $\psi=-\theta,\quad\theta=\psi,\quad\varphi=2\theta$)

B 4.2) Posons : $u=\sqrt{cos\,\varphi}$, alors $u^2=cos\,\varphi$ et $2u\,du=-sin\,\varphi\,d\varphi$

On a : $L=\displaystyle\int_1^0\frac{-2u\,du}{\sin\,\varphi\times u}=2\int_0^1\frac{du}{sin\,\varphi}=2\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-cos^2\varphi}}=2\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$

B 5) Δ est défini par les conditions polaires $\begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{cos(2\theta)} \end{cases}$

Donc : $A = \displaystyle\int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\rho=0}^{\sqrt{cos(2\theta)}} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{cos(2\theta)}} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos(2\theta)}{2}\, d\theta = \left[\frac{sin(2\theta)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

Donc : $\underline{A = \dfrac{1}{2}}$

C 1) Quels que soient les réels α et β :
- $t \longmapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0,1[$
- $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$
- $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{(1-t)^{1-\beta}}$

Donc, d'après la règle de l'équivalence et les séries de Riemann : $\underline{\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \quad \big(B(\alpha,\beta) \text{ converge}\big) \Longleftrightarrow (\alpha,\beta) \in {\mathbb{R}^{*+}}^2}$

C 2) On a : $\underline{\forall\,(\alpha,\beta)\in{\mathbb{R}^{*+}}^2 \quad B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = \int_1^0 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}(-du) = \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}du = B(\beta,\alpha)}$

C 3) On a : $\forall\,(\alpha,\beta)\in{\mathbb{R}^{*+}}^2 \quad B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2\alpha-2}\theta\,(1-sin^2\theta)^{\beta-1} 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta\, d\theta$

Donc : $\underline{\forall\,(\alpha,\beta)\in{\mathbb{R}^{*+}}^2 \quad B(\alpha,\beta) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2\alpha-1}\theta\, cos^{2\beta-1}\theta\, d\theta}$

C 4) Donc : $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{\frac{1}{2}-1}\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{cos^2\theta}} = 2L$ d'après B 4.1), donc : $\underline{L = \dfrac{1}{2} B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}$

D 1.1) M_0^1 est le point de $\mathcal{C}_1$ d'angle polaire 0, $\underline{M_0^1 \text{ a donc pour coordonnées cartésiennes } (1{,}0).}$

M_1^1 est le point de $\mathcal{C}_1$ d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$, $\underline{M_1^1 \text{ a donc pour coordonnées cartésiennes } (0{,}0).}$

Donc : $\underline{2\,L_1 = 2\,M_0^1M_1^1 = 2}$

D 1.2) M_0^2 est le point de $\mathcal{C}_1$ d'angle polaire 0, $\underline{M_0^2 \text{ égale donc } M_0^1 \text{ et a donc pour coordonnées cartésiennes (1,0).}}$
M_2^2 est le point de $\mathcal{C}_1$ d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$, $\underline{M_2^2 \text{ égale donc } M_1^1 \text{ et a donc pour coordonnées cartésiennes (0,0).}}$
M_1^2 est le point de $\mathcal{C}_1$ d'angle polaire $\frac{\pi}{8}\cdot$

Or : $f_1\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{cos\,\frac{\pi}{4}} = 2^{-1/4}, \quad cos\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1cos\,\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}1}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}1}}{2^{3/4}}$

$sin\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\,\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2^{3/4}}$

$\underline{\text{Les coordonnées cartésiennes de } M_1^2 \text{ sont donc } \left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}1}}{2}, \dfrac{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2}\right)\text{, soit à } 10^{-3} \text{ près } (0,777;0,322).}$

Donc : $2\,L_2 = 2\left(M_0^2M_1^2 + M_1^2M_2^2\right) = 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}1}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}\right)^2} + 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}\right)^2}$

$= 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{4}1 - \sqrt{\sqrt{2}+1}\frac{\sqrt{2}-1}{4}}2\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{4}\frac{\sqrt{2}-1}{4}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}1 - \sqrt{\sqrt{2}+1}}2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Donc : $\underline{2\,L_2 = 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}1 - \sqrt{\sqrt{2}+1}}2^{3/4} \simeq 2,464\,947 \pm 10^{-6}}$

D 1.3) M_0^4 est le point de $\mathcal{C}_1$ d'angle polaire 0, $\underline{M_0^4 \text{ égale donc } M_0^1 \text{ et a donc pour coordonnées cartésiennes (1,0).}}$
M_4^4 est le point de $\mathcal{C}_1$ d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$, $\underline{M_4^4 \text{ égale donc } M_1^1 \text{ et a donc pour coordonnées cartésiennes (0,0).}}$
M_2^4 est le point de $\mathcal{C}_1$ d'angle polaire $\frac{\pi}{8}$, M_2^4 égale donc M_1^2 et a donc pour coordonnées cartésiennes à 10^{-3} près $(0,777;0,322)$.

M_1^4 et M_3^4 sont les points de $\mathcal{C}_1$ d'angles polaires respectifs $\frac{\pi}{16}$ et $\frac{3\pi}{16}\cdot$

Or : $f_1\left(\frac{\pi}{16}\right) cos\,\frac{\pi}{16} = \sqrt{cos\,\frac{\pi}{8}}\; cos\,\frac{\pi}{16} \simeq 0,943 \pm 10^{-3}, \quad f_1\left(\frac{\pi}{16}\right) sin\,\frac{\pi}{16} = \sqrt{cos\,\frac{\pi}{8}}\; sin\,\frac{\pi}{16} \simeq 0,188 \pm 10^{-3}$

$f_1\left(\frac{3\pi}{16}\right) cos\,\frac{3\pi}{16} = \sqrt{cos\,\frac{3\pi}{8}}\; cos\,\frac{3\pi}{16} \simeq 0,514 \pm 10^{-3}, \quad f_1\left(\frac{3\pi}{16}\right) sin\,\frac{3\pi}{16} = \sqrt{cos\,\frac{3\pi}{8}}\; sin\,\frac{3\pi}{16} \simeq 0,344 \pm 10^{-3}$

$\underline{\text{Les coordonnées cartésiennes à } 10^{-3} \text{ près de } M_1^4 \text{ et } M_3^4 \text{ sont donc respectivement } (0,943;0,188) \text{ et } (0,514;0,344).}$