CORRECTION DE L'ÉPREUVE ENSAE 2002

Première partie

I.1. Soient $(x,y) \in K^2$ alors $T_n(x) - T_n(y) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)[T(x) - T(y)]$ donc

- $\|T_n(x) - T_n(y)\| \leq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\|x - y\|$ i.e. T_n est strictement contractante,
- comme $T_n(x)$ est barycentre de $T(x)(1-1/n)$ et de $a(1/n)$ alors $T_n(K) \subset K$,
- et enfin E est un espace de Banach

on peut donc appliquer le théorème du point fixe, $\exists x_n \in K$ tel que $T_n(x_n) = x_n$.

I.2. On a

$$\begin{aligned} T(x_n) - x_n = T(x_n) - T_n(x_n) &= T(x_n) - \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)T(x_n) + \frac{1}{n}a\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[T(x_n) - a\right]. \end{aligned}$$

Or K est borné donc il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|T(x_n) - a\| \leq M$ par conséquent $\|T(x_n) - x_n\| \leq \frac{M}{n} \to 0$.
Conclusion : la suite (x_n) est quasi-fixe.

I.3. Si maintenant on suppose K compact alors, de la suite (x_n), on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers $x_0 \in K$ or

$$\left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right)T(x_{\varphi(n)}) + \frac{1}{\varphi(n)}a = x_{\varphi(n)},$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $T(x_0) = x_0$ par continuité de T.

I.4. **a.** $T_n(x) - T_n(y) = (1 - d_n)(x - y)$ or $d_n \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $1 - d_n \leq 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ d'où

$$\|T_n(x) - T_n(y)\| \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\|x - y\|$$

T_n est strictement contractante et, comme au **I.1** on a $T_n(K) \subset K$, le théorème du point fixe s'applique là aussi et par conséquent $\exists w_n \in K$ tel que $T_n(w_n) = w_n$.

b. On a $\|u_n - T(u_n)\| \leq d_n^2$ et $w_n = T_n(w_n) = (1 - d_n)T(w_n) + d_n y_n$ d'où

$$u_n - w_n = (1 - d_n)[(u_n - T(u_n)) + (T(u_n) - T(w_n))] + d_n \underbrace{(u_n - y_n)}_{=(1-r)(u_n - v_n)}$$

$$\|u_n - w_n\| \leq (1 - d_n)d_n^2 + (1 - d_n)\|u_n - w_n\| + d_n(1 - r)\|u_n - v_n\|$$

puis, en faisant passer le terme $(1 - d_n)\|u_n - w_n\|$ à gauche et en simplifiant par $d_n > 0$ on obtient

$$\|u_n - w_n\| \leq \underbrace{(1 - d_n)d_n}_{\leq d_n} + (1 - r)\|u_n - v_n\|.$$

L'autre inégalité s'obtient immédiatement en changeant r en $1 - r$.

c. Montrons que (w_n) est quasi-fixe : comme au **I.2** on a

$$\begin{aligned}T(w_n) - w_n &= T(w_n) - T_n(w_n) = T(w_n) - (1-d_n)T(w_n) - d_n y_n \\ &= d_n(T(w_n) - y_n).\end{aligned}$$

K étant borné, il existe $M > 0$ tel que $\|T(w_n) - y_n\| \leq M$ et comme $d_n \to 0$, on peut conclure :
$T(w_n) - w_n \to 0$ i.e. la suite (w_n) est quasi-fixe.
On a ensuite

$$0 \leq \Big[\underbrace{\|u_n - w_n\| - (1-r)\|u_n - v_n\|}_{\geq 0}\Big] + \Big[\underbrace{\|w_n - v_n\| - r\|u_n - v_n\|}_{\geq 0}\Big] \leq 2d_n$$

par conséquent chacun des termes entre crochets tend vers 0 (majoré par $2d_n$) d'où $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - w_n\| = (1-r)d$ et $\lim_{n\to+\infty} \|w_n - v_n\| = rd$.

Deuxième partie

II.1. On écrit $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$ et $x^{(n)} \in K$ donc $\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $|x_k^{(n)}| \leq 1$.
De la suite $(x_1^{(n)})_{n\geq 1}$ on peut extraire une suite convergente (par Bolzano-Weierstrass) : $x_1^{\varphi_1(n)} \to x_1$ avec $|x_1| \leq 1$.
Par récurrence : supposons que pour $1 \leq k \leq K$ on ait prouvé l'existence des φ_k.
De la suite $(x_{K+1}^{\varphi_1\circ\varphi_2\ldots\circ\varphi_K(n)})_{n\geq 1}$ on peut extraire une suite convergente $(x_{K+1}^{\varphi_1\circ\varphi_2\ldots\circ\varphi_{K+1}(n)})_{n\geq 1}$.

II.2. On pose $\Phi(n) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \ldots \circ \varphi_n(n)$. Comme φ_n est strictement croissante, $\varphi(n) \geq n$ donc

$$\Phi(n) \geq \varphi_1 \circ \varphi_2 \ldots \circ \varphi_{n-1}(n) > \varphi_1 \circ \varphi_2 \ldots \circ \varphi_{n-1}(n-1),$$

Φ est strictement croissante et $(x^{\Phi(n)})_{n\geq 1}$ est une suite extraite de $(x^{(n)})_{n\geq 1}$.
Si $n \geq k$ alors $(x_k^{\Phi(n)})_{n\geq k}$ est une suite extraite de la suite $(x_k^{\varphi_1\circ\varphi_2\ldots\circ\varphi_k(n)})$ qui converge donc $(x_k^{\Phi(n)})_{n\geq k}$ converge dans $\mathbb{R}$.

II.3. $\forall k_0 \geq 1$ on a $\sum\limits_{k=1}^{k_0} |x_k^{\Phi(n)}| \leq 1$ d'où, en passant à la limite sur n, $\sum\limits_{k=1}^{k_0} |x_k| \leq 1$ et ceci pour tout k_0. La série $\sum |x_k|$ est alors convergente et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_k| \leq 1$ i.e. $x \in K$.

II.4. On utilise le fait que $\sum |y_k - z_k|$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_k^{(n)} = y_k$ d'où

- $\forall N \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=N+1}^{+\infty} |y_k^{(n)} - y_k| = d$,
- $\|y^{(n)} - z\| \leq \|y - y^{(n)}\| + \|z - y\| \leq d + \|z - y\| + \varepsilon$ pour $n \geq n_0$, (1)
- $\|y^{(n)} - z\| = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |y_k^{(n)} - z_k| = \sum\limits_{k=1}^{N} |y_k^{(n)} - z_k| + \sum\limits_{k=N+1}^{+\infty} |y_k^{(n)} - z_k|$ pour tout N.

Or $|y_k^{(n)} - z_k| \geq |y_k^{(n)} - y_k| - |y_k - z_k|$ (inégalité triangulaire) d'où

$$\begin{aligned}\|y^{(n)} - z\| &\geq \underbrace{\sum_{k=1}^{N} |y_k^{(n)} - z_k| + \sum_{k=N+1}^{+\infty} |y_k^{(n)} - y_k|}_{\geq \sum_{k=1}^{N} |y_k - z_k| + d - \varepsilon \text{ pour } n \geq n_1} - \varepsilon - \sum_{k=N+1}^{+\infty} |y_k - z_k| \\ &\geq \sum_{k=1}^{N} |y_k - z_k| + d - \varepsilon - \sum_{k=N+1}^{+\infty} |y_k - z_k|\end{aligned}$$

cette dernière égalité étant valable pour tout N, on prend la limite quand $N \to +\infty$ on obtient $\|y^{(n)} - z\| \geq \|y - z\| + d - \varepsilon$. (2)
En rassemblant (1) et (2) et en prenant $n_2 = \max(n_0, n_1)$ on peut conclure :
$(\|y^{(n)} - z\|)$ a une limite et cette limite vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y^{(n)} - z\| = d + \|y - z\|$ (ce qui se comprend si on assimile d à 0).

II.5. On a $\|T(y) - y^{(n)}\| \leq \underbrace{\|T(y) - T(y^{(n)})\|}_{\leq \|y-y^{(n)}\|} + \underbrace{\|T(y^{(n)}) - y^{(n)}\|}_{\to 0}$ donc

$$\begin{aligned}\|T(y) - y^{(n)}\| &= d + \|y - T(y)\| + o(1)\\ &\leq \|y - y^{(n)}\| + o(1) = d + o(1)\end{aligned}$$

d'où $0 \leq \|y - T(y)\| \leq o(1)$ i.e. $y = T(y)$.

II.6.
- On reprend le résultat du **I.2** qui donne l'existence d'une suite $(x^{(n)})$ quasi-fixe pour T.
- À partir de $(x^{(n)})$ on extrait une suite $(x^{\varphi(n)})$ qui vérifie $\forall k \geq 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_k^{\varphi(n)} = x_k$ et on pose $x = (x_k)_{k\geq 1}$.
- Puis, la suite $(\|x^{\varphi(n)} - x\|)$ étant bornée, on peut en extraire une suite convergente que l'on nomme $(y^{(n)})$.

On se retrouve alors dans l'hypothèse du **II.5** donc $\exists y \in K$ tel que $T(y) = y$.

Troisième partie

III.1. **a.** On applique l'identité du parallélogramme

$$\|y + z\|^2 + \|y - z\|^2 = 2\|y\|^2 + 2\|z\|^2$$

avec $y = x - x_n$ et $z = x - x_m$.

b. C étant convexe on a $\dfrac{x_n + x_m}{2} \in C$ d'où $\|2x - x_n - x_m\| = 2\|x - \frac{x_n+x_m}{2}\| \geq 2\,\mathrm{d}(x, C)$ et par conséquent

$$0 \leq \|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x - x_n\|^2 + 2\|x - x_m\|^2 - 4\,\mathrm{d}(x, C)^2$$

soit, pour $\varepsilon > 0$, en choisissant N tel que $n, m \geq N \Rightarrow \|x - x_n\|^2 \leq \mathrm{d}(x, C)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}$ on obtient $0 \leq \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$.
La suite (x_n) est de Cauchy et comme E est complet, elle converge dans E donc dans C car C est fermé.
On a ainsi $\mathrm{d}(x, C) = \|x - \tilde{x}\|$ avec $\tilde{x} \in C$.
Soit $\tilde{y} \in C$ vérifiant la même égalité alors, en utilisant la relation du **a**, on a

$$\begin{aligned}\|\tilde{x} - \tilde{y}\| &= 2\|x - \tilde{x}\|^2 + 2\|x - \tilde{y}\|^2 - 4\|x - \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{2}\|^2\\ &\leq 4\,\mathrm{d}(x, C)^2 - 4\,\mathrm{d}(x, C)^2 = 0\end{aligned}$$

donc $\tilde{x} = \tilde{y}$ ce qui prouve l'unicité.

c. Si $z \in C$, posons $z_t = tz + (1-t)\tilde{x} \in C$ pour $t \in]0, 1[$, $x - z_t = (x - \tilde{x}) + t(\tilde{x} - z)$ or

$$\begin{aligned}\|x - \tilde{x}\|^2 \leq \|x - z_t\|^2 &= \|(x - \tilde{x}) + t(\tilde{x} - z)\|^2\\ &\leq \|x - \tilde{x}\|^2 + 2t\langle x - \tilde{x}, \tilde{x} - z\rangle + t^2\|\tilde{x} - z\|^2\end{aligned}$$

d'où, en simplifiant par $t > 0$, $2\langle x - \tilde{x}, \tilde{x} - z\rangle + t\|\tilde{x} - z\|^2 \geq 0$ puis, en prenant la limite quand $t \to 0$ on obtient bien $\langle x - \tilde{x}, \tilde{x} - z\rangle \leq 0$.
Ceci caractérise bien $\tilde{x}$ car

$$\forall z \in C,\ \|x - z\|^2 = \|x - \tilde{x}\|^2 + 2\langle x - \tilde{x}, \tilde{x} - z\rangle + \|\tilde{x} - z\|^2 \geq \|x - \tilde{x}\|^2$$

d. On peut y aller par le calcul : on utilise l'inégalité de la question précédente et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \|[x-P_C(x)]+[P_C(x)-P_C(y)]+[P_C(y)-y]\|^2\\ &= \|P_C(x)-P_C(y)\|^2+2\underbrace{\langle x-P_C(x),P_C(x)-P_C(y)\rangle}_{\geq 0}+2\underbrace{\langle P_C(x)-P_C(y),P_C(y)-y\rangle}_{\geq 0}\\ &\qquad +2\underbrace{\langle x-P_C(x),P_C(y)-y\rangle}_{\geq -\|P_C(x)-x\|.\|P_C(y)-y\|}+\|P_C(x)-x\|^2+\|P_C(y)-y\|^2\\ &\geq \|P_C(x)-P_C(y)\|^2+(\|x-P_C(x)\|-\|y-P_C(y)\|)^2\\ &\geq \|P_C(x)-P_C(y)\|^2\end{aligned}$$

donc $\|P_C(x)-P_C(y)\| \leq \|x-y\|$.

III.2. **a.** Soit $z \in F$ alors $z_t = tz+(1-t)P_F(x) \in F$ et $z_t - P_F(x) = t(z-P_F(x))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ or

$$\langle x-P_F(x), z_t-P_F(x)\rangle \leq 0$$

d'où $t\langle x-P_F(x), z-P_F(x)\rangle \leq 0$ pour tout t donc $\langle x-P_F(x), z-P_F(x)\rangle = 0$ i.e. $x-P_F(x) \in F^\perp$.

b. $\forall x \in E$ on a $x = \underbrace{x-P_F(x)}_{\in F^\perp}+\underbrace{P_F(x)}_{\in F}$ donc $E = F+F^\perp$ et comme $F \cap F^\perp = \{0\}$ (classique) on a $E = T \oplus F^\perp$.

c. La projection orthogonale est linéaire.

III.3. **a.** On sait que F est un hyperplan de codimension 1 donc $F^\perp$, supplémentaire de F, est une droite vectorielle.

b. $\theta\ : x \mapsto \langle x, x_0\rangle$ est une forme linéaire qui s'annule sur F, on sait alors que φ et θ sont liées donc $\varphi = \lambda\theta$.

Quatrième partie

IV.1. φ est une forme linéaire et comme $|\langle x_n, u\rangle| \leq \|x_n\|.\|u\| \leq M\|u\|$ (la suite (x_n) est bornée) donc $|\varphi(u)| \leq M\|u\|$ et φ est continue.
Grâce au **III.3.b** on en déduit que

$$\varphi(u) = \lambda\langle u, x_0\rangle = \langle u, \lambda x_0\rangle$$

donc (x_n) converge faiblement vers λx_0 (le cas où φ est nulle est immédiat).

IV.2. Soit $v \in E$, on écrit $v = u+u'$ où $u \in F$, $u' \in F^\perp$ (**III.2.b**) alors $\langle x_n, v\rangle = \langle x_n, u\rangle$ donc $\forall v \in E$ la suite $(\langle x_n, v\rangle)_{n\geq 1}$ converge et la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement dans E.

IV.3. Soit $G = \mathrm{Vect}(x_n)$ et F son adhérence :

$$y \in G \Leftrightarrow \left(\exists N \in \mathbb{N}^*,\ \exists(\lambda_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid y = \sum_{n=1}^{N}\lambda_n x_n\right).$$

Soit $G_N = \{\sum_{n=1}^{N}\mu_n x_n,\ \mu_n \in \mathbb{Q}\}$, G_N est dénombrable et $G_\infty = \bigcup_{N=1}^{+\infty} G_N$ est dénombrable en tant que réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.
Conclusion : on peut écrire $G_\infty = \{y_k,\ k \geq 1\}$ est un ensemble dénombrable dense dans G donc dense dans son adhérence F.

IV.4. On s'intéresse à la suite double $(x_k^{(n)})_{n,k\geq 1}$ où $x_k^{(n)} = \langle x_n, y_k\rangle$, $n \geq 1$, $k \geq 1$. (x_n) est bornée donc $|x_k^{(n)}| \leq M\|y_k\|$ par Cauchy-Schwarz, on a vu alors au **II** que l'on pouvait extraire une suite $(x^{\Phi(n)})$ de la suite $(x^{(n)} = x_n)$ telle que

$$\forall k \geq 1,\ \langle x_{\Phi(n)}, y_k\rangle \to X_k \text{ quand } n \to +\infty.$$

IV.5. Soit $u \in F$ montrons que la suite $(\langle x_{\Phi(n)}, u\rangle)_{n\geq 1}$ converge :

- Soit $(y_{\varphi(k)})$ une suite extraite de (y_k) convergeant vers u, $(y_{\varphi(k)})$ est bornée.
- Comme $\langle x_{\phi(n)}, y_{\varphi(k)}\rangle \to X_{\varphi(k)}$ la suite $(X_{\varphi(k)})$ est bornée, on peut en extraire une suite convergente vers $X \in \mathbb{R}$.
  Pour simplifier les notations, on note (Y_k) une suite extraite de (y_k) convergeant vers u telle que $\langle x_{\Phi(n)}, Y_k\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_k$ avec $X_k \to X$.
  On a alors
  $$|\langle x_{\Phi(n)}, u\rangle - X| \leq \underbrace{|\langle x_{\Phi(n)}, u\rangle - \langle x_{\Phi(n)}, Y_k\rangle}_{\leq M\|u-Y_k\|} + |\langle x_{\Phi(n)}, Y_k\rangle - X_k| + |X_k - X|.$$
  On pouvait remplacer les deux derniers points en se contentant de prouver que la suite $(\langle x_{\Phi(n)}, u\rangle)$ est de Cauchy
- On choisit un entier K tel que $\|u - Y_K\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$ et $|X_K - X| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ puis un entier N tel que $n \geq N \Rightarrow |\langle x_{\Phi(n)}, Y_k\rangle - X_k| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ d'où, pour $n \geq N$, $|\langle x_{\Phi(n)}, u\rangle - X| \leq \varepsilon$.

Conclusion : de toute suite bornée (x_n) de E espace de Hilbert, on peut extraire une suite $(x_{\Phi(n)})$ faiblement convergente (ce qui peut s'énoncer ainsi : tout fermé borné d'un espace de Hilbert est faiblement compact).

Cinquième partie

V.1. On a $\langle x - T_1(x) - y + T_1(y), x - y\rangle = \|x-y\|^2 - \langle T_1(x) - T_1(y), x - y\rangle$ or, par Cauchy-Schwarz, on sait que

$$\langle T_1(x) - T_1(y), x - y\rangle \leq \|T_1(x) - T_1(y)\|.\|x - y\| \leq \|x - y\|^2$$

donc $\langle x - T_1(x) - y + T_1(y), x - y\rangle \geq 0$

V.2. $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in E$ on a :

$$\Delta_n(\lambda, v) = \langle x_n - T_1(x_n) - x_\infty - \lambda v + T_1(x_\infty + \lambda v), x_n - x_\infty - \lambda v\rangle \geq 0$$

et en développant on obtient

$$\Delta_n(\lambda, v) = \langle x_n - T_1(x_n), x_n - x_\infty - \lambda v\rangle - \langle x_\infty + \lambda v - T_1(x_\infty + \lambda v), x_n - x_\infty - \lambda v\rangle \geq 0.$$

Or

- $\langle x_n - T_1(x_n), x_n - x_\infty - \lambda v\rangle = \langle x_n - T_1(x_n), -\lambda v\rangle + \langle x_n - T_1(x_n), x_n - x_\infty\rangle$. Comme $x_n - T_1(x_n) \to z$ et que $(T_1(x_n))$ est bornée alors (x_n) est bornée donc
  $$\langle x_n - T_1(x_n), x_n - x_\infty\rangle = \underbrace{\langle x_n - T_1(x_n) - z, x_n - x_\infty\rangle}_{\leq\|x_n - T_1(x_n) - z\|.M} + \underbrace{\langle z, x_n - x_\infty\rangle}_{\to 0}$$
  i.e. $\langle x_n - T_1(x_n), x_n - x_\infty\rangle \to 0$.
  On a aussi $\langle x_n - T_1(x_n), -\lambda v\rangle \to \langle z, -\lambda v\rangle$ par continuité du produit scalaire.
- $\langle x_\infty + \lambda v - T_1(x_\infty + \lambda v), x_n - x_\infty - \lambda v\rangle \to \langle x_\infty + \lambda v - T_1(x_\infty + \lambda v), -\lambda v\rangle$ (convergence faible de (x_n)).

En passant à la limite sur n on a donc

$$\Delta_n(\lambda, v) \to -\langle z, \lambda v\rangle + \langle x_\infty + \lambda v - T_1(x_\infty + \lambda v), \lambda v\rangle \geq 0$$

d'où $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in E$, $\lambda\langle x_\infty + \lambda v - T_1(x_\infty + \lambda v) - z, v\rangle \geq 0$.
Si $\lambda > 0$ alors on simplifie par λ, $\langle x_\infty + \lambda v - T_1(x_\infty + \lambda v) - z, v\rangle \geq 0$ et, en passant à

la limite quand $\lambda \to 0$, par continuité de T_1, on obtient $\langle x_\infty - T_1(x_\infty) - z, v\rangle \geq 0$. En prenant $v = -x_\infty + T_1(x_\infty) + z$ on arrive à $\|x_\infty - T_1(x_\infty) - z\|^2 \leq 0$ donc $x_\infty - T_1(x_\infty) = z$.

V.3. On prend $T_1 = T \circ P_K$ qui est une contraction de K.

- D'après le **I.2** on sait qu'il existe (x_n), suite dans K, quasi-fixe pour T.
- D'après le **IV.5** on peut extraire de cette suite une suite qui converge faiblement vers $x_0 \in E$.

$T_1(x_{\varphi(n)}) = T(x_{\varphi(n)})$ et $x_{\varphi(n)} - T_1(x_{\varphi(n)}) \to 0$ donc, grâce à la question précédente, on sait que $x_0 = T \circ P_K(x_0) \in K$. Finalement, comme $x_0 \in K$ alors $P_K(x_0) = x_0$ donc $x_0 = T(x_0)$.

V.4. $x \mapsto x - T(x)$ est continue donc F est fermé (image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $\mathrm{Id} - T$, non vide grâce à la question précédente.
Montrons que F est convexe :
Soit $(x, y) \in F$, $t \in]0, 1[$ et $z = tx + (1-t)y$, on a

$$\begin{aligned} \|x - y\| = \|T(x) - T(y)\| &\leq \|T(x) - T(z)\| + \|T(z) - T(y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

On a égalité partout donc $\|x - T(z)\| = \|x - z\|$ et $\|T(z) - y\| = \|z - y\|$. On sait que si on a égalité dans l'inégalité de Minkowski dans un espace de Hilbert alors les vecteurs sont colinéaires donc dans un premier temps $T(z) \in [x, y]$. On a donc $T(z) = t'x + (1-t')y$ or $y - T(z) = t'(y - x)$ et $y - z = t(y - x)$ d'où, comme $\|y - T(z)\| = \|y - z\|$ on en déduit $t = t'$ puis $T(z) = z$.
Conclusion : F est convexe.

V.5. Soit x un point fixe de T alors $T'(T(x)) = T'(x) = T(T'(x))$ donc $T'(x)$ est un point fixe de T. On a donc $T'(F) \subset F$.
On applique alors le **V.3** à $K = F$ convexe, fermé borné et non vide, et $T = T'$, il existe $x' \in F$ point fixe de T', x' est donc un point fixe commun à T et T'.