

Question préliminaire

Une CNS pour qu'une matrice A appartenant à $M_n(R)$ soit diagonalisable est que:

- le polynome caractéristique de A soit scindé: $\det(A - \lambda Id) = (-1)^n \prod_{k=1}^r (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et que
- $\forall k \in \{1, 2, \dots, r\}, \text{Ker}(A - \lambda_k Id)$ soit de dimension α_k .

Partie I: Algorithme de Babylone.

Soient les deux suites réelles $(u_n)_{n \in N}$ et $(v_n)_{n \in N}$ définies par: $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in N, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$

On pose enfin $\rho_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1) On a $\rho_{n+1} = A\rho_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 2$, les valeurs propres de A sont donc $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

A appartenant à $M_2(R)$ et ayant deux valeurs propres distinctes est donc diagonalisable.

3) On fait une petite récurrence.

u_0 et v_0 sont strictement positifs. Supposons u_n et v_n strictement positifs, alors $u_{n+1} = u_n + 2v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$ sont strictement positifs.

4) • Montrons que $\forall n \in N, \frac{u_n}{v_n} \geq 1$. C'est vrai pour $n = 0$.

Par ailleurs on peut écrire: $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = 1 + \frac{v_n}{u_n + v_n}$ quantité qui est strictement plus grande que 1 puisque

$$\frac{v_n}{u_n + v_n} > 0.$$

• Montrons que $\forall n \in N, \left| \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right|$. On a:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{u_n + 2v_n}{u_n + v_n} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{\frac{u_n}{v_n} + 2}{\frac{u_n}{v_n} + 1} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{(1 - \sqrt{2}) \frac{u_n}{v_n} + 2 - \sqrt{2}}{\frac{u_n}{v_n} + 1} \right| = \frac{\sqrt{2} - 1}{\frac{u_n}{v_n} + 1} \left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right| \text{ et}$$

comme $\sqrt{2} - 1 < 1$ d'une part, et $\frac{u_n}{v_n} + 1 > 2$ d'autre part, on peut écrire: $\left| \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right|$.

5) La suite $\left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \in N}$ est convergente et a pour limite $\sqrt{2}$. En effet l'inégalité précédente assure que:

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right| < \left(\frac{1}{2} \right)^n \left| \frac{u_0}{v_0} - \sqrt{2} \right| \text{ quantité qui tend vers 0 quand } n \rightarrow \infty.$$

6) • On a que $\left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right| < \left(\frac{1}{2} \right)^n (\sqrt{2} - 1)$ et donc $\frac{u_n}{v_n}$ sera une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près dès

que $\left(\frac{1}{2} \right)^n (\sqrt{2} - 1) \leq 10^{-2}$. En fait, puisqu'il s'agit d'approcher $\sqrt{2}$, je ne retiendrai que le fait, par

exemple, que $\sqrt{2} < 1,5$ ($2 < 1,5^2 = 2,25$), et donc on cherchera n tel que $\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \leq 10^{-2}$.

$n = 5$ fournit $\left(\frac{1}{2} \right)^6 = 0,015625$ et $n = 6$ fournit $\left(\frac{1}{2} \right)^7 = 0,0078125$. Par conséquent $\frac{u_6}{v_6}$ est

une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près. On a le tableau suivant:

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	3	7	17	41	99	239
v_n	1	2	5	12	29	70	169

On a donc: $\sqrt{2} \approx \frac{239}{169} = 1,414201183$.

On retiendra $\sqrt{2} = 1,41$ à 10^{-2} près, par défaut. ($1,41^2 = 1,9881 < 2$).

• L'inégalité $\left| \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right|$ peut être améliorée. En effet, on avait seulement retenu que

$\sqrt{2} - 1 < 1$, or on peut assurer en fait que $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$. (cf $\sqrt{2} < 1,5$ déjà utilisé). Dès lors on peut

écrire:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{4} \left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right| \text{ et par suite } \left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right| < \left(\frac{1}{4} \right)^n (\sqrt{2} - 1) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^n, \text{ inégalité, qui par un}$$

raisonnement analogue au précédent, permet d'assurer que $\frac{u_7}{v_7}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

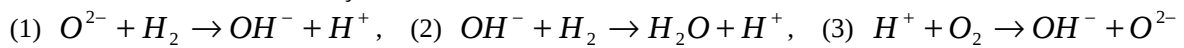
$$\text{Pour information } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^7 \approx 3,05 \cdot 10^{-5}. \quad \frac{u_7}{v_7} = \frac{239 + 2 \times 169}{239 + 169} = \frac{577}{408} = 1,414215686.$$

On retiendra $\sqrt{2} = 1,4142$ à 10^{-4} près, par défaut. ($1,4142^2 = 1,99996164 < 2$).

Rq: la machine fournit $\sqrt{2} = 1,414213562$

Partie II: Etude d'une réaction chimique

Numérotons les réactions de la façon suivante:



$$1) \text{ Calcul de } \rho_0, \rho_1, \rho_2. \quad \rho_n = \begin{pmatrix} o_n \\ (oh)_n \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$n = 0 \quad \text{Il y a 1 radical } O^{2-}, \text{ pas de radical } H^+ \text{ ni de radical } OH^-, \text{ donc } \rho_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seule la réaction (1) peut avoir lieu et à l'instant $n = 1$ on a donc 1 radical OH^- , 1 radical

$$H^+ \text{ et plus de radical } O^{2-}, \text{ donc } \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Seules les réactions (2) et (3) peuvent avoir lieu et à l'instant $n = 2$ on a donc:

1 radical H^+ issu de (2)

1 radical OH^- et 1 radical O^{2-} issus de (3)

$$\text{donc } \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de ρ_3 . Les trois réactions peuvent avoir lieu:

(1) fournit 1 radical OH^- et 1 radical H^+ ,

(2) fournit 1 radical H^+ ,

(3) fournit 1 radical OH^- et 1 radical O^{2-} ,

$$\text{et on a donc } \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2) Matrice A telle que $\rho_{n+1} = A\rho_n$.

o_n radicaux O^{2-} donnent o_n radicaux OH^- et o_n radicaux H^+ dans la réaction (1),

$(oh)_n$ radicaux OH^- donnent $(oh)_n$ radicaux H^+ dans la réaction (2),

h_n radicaux H^+ donnent h_n radicaux OH^- et h_n radicaux O^{2-} dans la réaction (3),

$$\text{On a donc: } \begin{cases} o_{n+1} = h_n \\ (oh)_{n+1} = o_n + h_n \\ h_{n+1} = o_n + (oh)_n \end{cases} \quad \text{soit } \rho_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rho_n, \text{ donc } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3) \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) + (1 + \lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 1). \text{ Les valeurs}$$

propres de A sont: -1 , $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et donc A est diagonalisable. Il existe donc une matrice

P

$$\text{inversible telle que: } A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et par suite}$$

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}. \text{ Dès lors, } \rho_n = A^n \rho_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ s'écrit, en notant}$$

$$P = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{pmatrix}, \quad A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} (-1)^n u \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n v \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n w \end{pmatrix} \text{ et par suite}$$

$$o_n = au(-1)^n + a'v\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + a''w\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\text{soit } o_n = \alpha(-1)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \gamma\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \text{ trois constantes réelles.}$$

4) On détermine α, β, γ avec les conditions suivantes:

$$\begin{cases} o_0 = 1 = \alpha + \beta + \gamma \\ o_1 = 0 = -\alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\gamma \\ o_2 = 1 = \alpha + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\beta + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\gamma \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\beta + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\gamma = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases} \quad \text{ce qui fournit enfin}$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \quad \text{soit}$$

$$o_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5}+1) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + (\sqrt{5}-1) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Rq: Il fallait peut-être se contenter de vérifier que $\gamma = 0$ n'était pas possible dans le système précédent, puis dire que $\gamma > 0$, car $\gamma < 0$ conduirait à $o_n < 0$ pour n assez grand, ce qui n'a pas de sens dans l'expérience étudiée. Mais alors la question (5) est un peu redondante...

5) La suite $(o_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. En effet

$$\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| \approx 0,62 < 1 \text{ implique } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et}$$

$$\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \approx 1,62 > 1 \text{ implique } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \text{ ce qui démontre le résultat annoncé.}$$

Partie III: Diffusion d'un gaz

1) Soit $P = (p_{i,j})$ une matrice de $M_r(R)$ dont le terme générique est $p_{i,j}$. Notons $Q_n = PB_n$.

Le terme générique de Q_n est $q_{i,j}(n) = \sum_{k=1}^r p_{i,k} b_{k,j}(n)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{i,j}(n) = \sum_{k=1}^r p_{i,k} b_{k,j} = q_{i,j} \text{ terme générique de la matrice } Q = PB.$$

Donc $(PB_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers PB . Même type de calcul pour justifier que $(B_n P)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers BP .

Conclusion: si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers B alors $(PB_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n P)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers PB et BP .

2) Soient $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \frac{1}{6} I$.

Q est diagonalisable car symétrique réelle. $\det(Q - \lambda Id) = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ et les valeurs propres de

Q sont donc $\frac{5}{6}$ et $-\frac{1}{6}$. Dès lors il existe P inversible telle que $Q = P \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} P^{-1}$ et par suite

$$Q^n = P \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{6}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} = P B_n P^{-1} \text{ avec } B_n = \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{6}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Mais alors $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(P B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin

$$(P B_n) P^{-1} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ soit } \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) • Les valeurs propres de $I - Q$ sont: $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ et $1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$.

0 n'est donc pas valeur propre de $I - Q$, donc $I - Q$ est inversible.

• On a $(I - Q)(I + Q + Q^2 + \dots + Q^n) = I - Q^{n+1}$ et donc d'après ce qui précède

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I - Q)(I + Q + Q^2 + \dots + Q^n) = I \text{ et par suite}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((I - Q)^{-1} (I - Q)(I + Q + Q^2 + \dots + Q^n)) = (I - Q)^{-1} \text{ en appliquant (1) avec}$$

$P = (I - Q)^{-1}$ et $B_n = (I - Q)(I + Q + Q^2 + \dots + Q^n)$ et on a donc finalement:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I + Q + Q^2 + \dots + Q^n) = (I - Q)^{-1}$$

4) Calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$. A peut s'écrire par blocs sous la forme: $A = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ R & I \end{pmatrix}$. On a alors:

$$A^2 = \begin{pmatrix} Q^2 & 0 \\ R(I + Q) & I \end{pmatrix} \text{ en faisant un produit par blocs.}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} Q^3 & 0 \\ R(I + Q + Q^2) & I \end{pmatrix} \text{ et plus généralement } A^n = \begin{pmatrix} Q^n & 0 \\ R(I + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-1}) & I \end{pmatrix} \text{ de sorte que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R(I - Q)^{-1} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{6}(I - Q)^{-1} & I \end{pmatrix}$$

5) Notons $q_1(n)$, $q_2(n)$, $q_3(n)$, $q_4(n)$ les quantités de gaz contenues dans les réservoirs R_1 , R_2 , R_3 , R_4

au bout de n heures d'évolution du système. On aura au bout de $(n + 1)$ heures:

$$\begin{cases} q_1(n+1) = q_1(n) - \frac{1}{2}q_1(n) - \frac{1}{6}q_1(n) + \frac{1}{2}q_2(n) \\ q_2(n+1) = q_2(n) - \frac{1}{2}q_2(n) - \frac{1}{6}q_2(n) + \frac{1}{2}q_1(n) \\ q_3(n+1) = q_3(n) + \frac{1}{6}q_1(n) \\ q_4(n+1) = q_4(n) + \frac{1}{6}q_2(n) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \\ q_3(n+1) \\ q_4(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ q_3(n) \\ q_4(n) \end{pmatrix}$$

c'est à dire, avec des notations évidentes: $q_{n+1} = Aq_n$. On en déduit $q_n = A^n q_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

q_n a donc une limite quand $n \rightarrow \infty$ qui est $q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{6}(I-Q)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On doit calculer $(I-Q)^{-1}$.

$$(I-Q) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ de sorte que } (I-Q)^{-1} = \frac{36}{7} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et enfin}$$

$$q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Conclusion: au bout d'un temps infini, il n'y aura plus de gaz dans R_1 et R_2 , et il y aura $\frac{4}{7}l$ dans R_3 et $\frac{3}{7}l$ dans R_4 .

Partie IV: Un cas plus général

1) Pour montrer qu'une valeur propre de A est aussi valeur propre de tA , on montre que A et tA ont le même polynôme caractéristique. Or en effet: $\det(A - \lambda Id) = \det({}^t(A - \lambda Id)) = \det({}^tA - \lambda Id)$.

2) Soit x un vecteur propre de A associé à λ : $x \neq 0$ et $Ax = \lambda x$.

Soit y un vecteur propre de tA associé à μ : $y \neq 0$ et ${}^tAy = \mu y$.

Supposons $\lambda \neq \mu$, et calculons tyAx qui est un nombre réel, donc qui sera égal à son transposé.

$${}^tyAx = {}^ty\lambda x = \lambda {}^tyx = \lambda \sum_{i=1}^d x_i y_i \quad \text{et} \quad {}^t({}^tyAx) = {}^tx {}^tAy = {}^tx \mu y = \mu {}^txy = \mu \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

L'égalité des deux quantités, avec $\lambda \neq \mu$, implique ${}^tyx = 0$.

3) A admet d valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.

On suppose de plus que: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_d|$.

Soit x_i un vecteur propre de A associé à λ_i et y_i un vecteur propre de tA associé à λ_i .

a) $(x, y) \rightarrow {}^tyx$ est un produit scalaire sur R^d , c'est en effet le produit scalaire qui fait de la base fixée de R^d une base orthonormée.

b) Une famille de vecteurs propres de A , associés à des valeurs propres distinctes, est une famille libre.

$(x_1, x_2, \dots, x_d)$ est donc une famille libre de R^d , elle possède d éléments dans un espace de dimension d ,

c'est donc une base de R^d .

c) Soit y_i un vecteur propre de tA associé à λ_i . On a que $\forall k \neq i, {}^ty_i x_k = 0$ c'est à dire y_i est orthogonal à x_k . Si on avait également ${}^ty_i x_i = 0$, on aurait que y_i serait orthogonal à tous les vecteurs

d'une base de R^d , donc serait le vecteur nul, ce qui n'est pas le cas. Donc ${}^ty_i x_i = a_i \neq 0$, et en prenant

$$y'_i = \frac{y_i}{a_i} \text{ on aura: } y'_i \text{ est un vecteur propre de } {}^tA \text{ associé à } \lambda_i \text{ et } {}^ty'_i x_i = 1.$$

Conclusion: On peut donc choisir la famille $(y_1, y_2, \dots, y_d)$ de telle sorte que: $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$, ${}^ty_i x_i = 1$.

4) $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$, on pose $A_i = x_i {}^ty_i$.

• Soit $i \neq j$ $A_i A_j = x_i {}^ty_i x_j {}^ty_j = x_i 0 {}^ty_j = 0$.

• Soit $1 \leq i \leq d$ $A_i^2 = x_i {}^ty_i x_i {}^ty_i = x_i 1 {}^ty_i = x_i {}^ty_i = A_i$.

5) • Pour montrer $\sum_{i=1}^d A_i = I$ il faut montrer que $\sum_{i=1}^d A_i$ agit sur tout vecteur de la base $(x_1, x_2, \dots, x_d)$

comme le fait l'identité, c'est à dire laisse invariant chaque x_k . Or en effet

$$\left(\sum_{i=1}^d A_i \right) (x_k) = \left(\sum_{i=1}^d x_i {}^ty_i \right) x_k = \sum_{i=1}^d x_i ({}^ty_i x_k) = x_k \text{ car } {}^ty_i x_k = 0 \text{ pour } i \neq k.$$

• Pour montrer $\sum_{i=1}^d \lambda_i A_i = A$ on procède de la même façon:

$$\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i A_i \right) (x_k) = \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i {}^ty_i \right) x_k = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i ({}^ty_i x_k) = \lambda_k x_k = A x_k \text{ cqfd.}$$

6) Calcul de A^n . Les matrices A_i et A_j commutent entre elles d'après (4). Par conséquent:

$$A^2 = \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i A_i \right)^2 = \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 A_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} \lambda_i \lambda_j A_i A_j = \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 A_i \text{ en appliquant (4).}$$

Par une récurrence immédiate on montrerait que $A^n = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n A_i$.

$$7) \frac{1}{\lambda_1^n} A^n = \sum_{i=1}^d \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n A_i \quad \text{Or pour } i \geq 2, \quad \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1, \quad \text{et par suite } \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{Conclusion: } \frac{1}{\lambda_1^n} A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A_1$$

8) Reprenons la formule $A^n = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n A_i$.

- Si $|\lambda_1| \leq 1$ alors $|\lambda_i| < 1$ pour $i \geq 2$ et alors A^n converge vers $\begin{cases} A_1 & \text{si } \lambda_1 = 1 \\ 0 & \text{si } |\lambda_1| < 1 \end{cases}$
n'a pas de limite si $\lambda_1 = -1$ car $A_1 \neq 0$

- Si $|\lambda_1| > 1$ alors A^n ne peut pas converger, car si on avait $A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$ on aurait $\frac{\lambda_1^n}{\lambda_1^n} A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$ soit

$$\frac{B}{\lambda_1^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A_1, \quad \text{or } \frac{B}{\lambda_1^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{alors que } A_1 \neq 0 \quad \text{d'où la contradiction.}$$

$$\text{Conclusion: } A^n \text{ converge pour } \lambda_1 \in]-1, 1] \text{ vers } \begin{cases} 0 & \text{pour } \lambda_1 \in]-1, 1[\\ A_1 & \text{pour } \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

9) On retrouve certains résultats des parties I et II grâce aux résultats précédents.

- Pour la partie I

Les valeurs propres de A étaient $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$ donc $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ et $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, donc

A^n ne converge pas, mais $\frac{A^n}{(1 + \sqrt{2})^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A_1$.

- Vecteur propre de A associé à $1 + \sqrt{2}$: $-\sqrt{2}\alpha + 2\beta = 0$. On prendra $x_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
- Vecteur propre de ${}^t A$ associé à $1 + \sqrt{2}$: $-\sqrt{2}\alpha + \beta = 0$. On prendra $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ pour que

$${}^t y_1 x_1 = 1. \quad \text{Dès lors } A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et on a que}$$

$$\frac{A^n}{(1+\sqrt{2})^n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^n} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \text{ et on retrouve que } \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}$$

• Pour la partie II

Les valeurs propres de A étaient -1 , $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on a donc:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = -1, \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Comme précédemment A^n ne converge pas, mais $\frac{A^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A_1$.

$$\text{-- Vecteur propre de } A \text{ associé à } \frac{1+\sqrt{5}}{2}: \begin{cases} -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{On prendra } x_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{-- Vecteur propre de } {}^t A \text{ associé à } \frac{1+\sqrt{5}}{2}: \begin{cases} -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{fournit } \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ mais alors}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} = (3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5}+1+\sqrt{5}+3+\sqrt{5}) = (3+\sqrt{5})(5+3\sqrt{5}) = \sqrt{5}(14+6\sqrt{5})$$

$$\text{et on choisira donc } y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}(14+6\sqrt{5})} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ pour que } {}^t y_1 x_1 = 1. \text{ Dès lors on a:}$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}(14+6\sqrt{5})} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}(14+6\sqrt{5})} \begin{pmatrix} 8+4\sqrt{5} & 6+2\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5} \\ 14+6\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5} & 14+6\sqrt{5} \\ 14+6\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5} & 14+6\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } \frac{A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} \begin{pmatrix} o_n \\ (oh)_n \\ h_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}(14+6\sqrt{5})} \begin{pmatrix} 8+4\sqrt{5} & 6+2\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5} \\ 14+6\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5} & 14+6\sqrt{5} \\ 14+6\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5} & 14+6\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on a donc que

$$\frac{o_n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{8+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}(14+6\sqrt{5})} = \frac{4(2+\sqrt{5})}{30+14\sqrt{5}} = \frac{2(2+\sqrt{5})}{15+7\sqrt{5}} = \frac{2(2+\sqrt{5})(15-7\sqrt{5})}{-20} = \frac{2(-5+\sqrt{5})}{-20} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{c'est à dire } o_n \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ et on retrouve la valeur de } \gamma, \quad \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

Partie V: Etude d'une population

Je décide de définir les choses ainsi:

a_n , b_n , c_n sont les nombres d'insectes étant respectivement dans leur 1^{ère} année, 2^{ème} année, 3^{ème} année de vie au cours de l'année n°, avec $a_0 = b_0 = c_0 = 1000$.

Au cours de cette n^{ème} année, c'est à dire au cours de l'année n° n :

- Les c_n insectes qui sont dans leur 3^{ème} année donnent naissance à c_n insectes qui seront dans leur 1^{ère} année au cours de l'année $n+1$, puis meurent.
- Parmi les b_n insectes qui sont dans leur 2^{ème} année, tous donnent naissance à un insecte qui sera donc dans sa 1^{ère} année au cours de l'année $n+1$, et seuls $\frac{b_n}{4}$ seront dans leur 3^{ème} année au cours de l'année $n+1$.

- Parmi a_n les insectes qui sont dans leur 1^{ère} année, $\frac{a_n}{2}$ meurent et $\frac{a_n}{2}$ seront dans leur 2^{ème} année au cours de l'année $n+1$. Par suite on a:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \frac{1}{2}(-\lambda - \frac{1}{4}) = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{8} \quad \text{dont les racines sont:}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \cong -0,80, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cong 0,30. \quad \text{Nous sommes donc dans le cas où}$$

$$A^n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \quad \text{et donc} \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{On va donc vers l'extinction de cette vilaine espèce d'insectes....}$$

Fin.