

I Quelques préliminaires

I.A - Exemple

I.A.1) Il s'agit en fait de la matrice d'une forme quadratique dans une certaine base et de l'expression de cette forme en utilisant cette matrice, ce qui donne sans calculs : ${}^tMSM = (x^2 + y^2 - z^2)$.

I.A.2) C'est la définition de $\mathcal{S}$!

I.A.3) $\mathcal{S}$ est un cône de révolution de sommet o et d'axe oz . Si on précise que le demi angle au sommet est $\pi/4$, le cône est complètement identifié ! La figure est élémentaire.

I.B - Changement de repère

I.B.1) Toujours en utilisant les matrices de formes quadratiques, $\mathcal{S}$ a ici pour équation :

$$ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz = 0.$$

I.B.2) On sait que : $M = PM'$.

I.B.3) ${}^tS' = {}^t(PSP) = {}^tP {}^tSP = {}^tPSP = S'$, en utilisant le fait que la transposée de la transposée d'une matrice est elle-même. S' est bien symétrique.

P est inversible, donc de déterminant non nul, par ailleurs, $\det(S') = \det(P)^2 \det(S)$ nous indique que : $\det(S') = 0 \Leftrightarrow \det(S) = 0$, ou encore : S' inversible $\Leftrightarrow S$ inversible.

I.B.4) ${}^tM'S'M' = ({}^tM {}^tP^{-1})({}^tPSP)(P^{-1}M) = ({}^tM {}^tP^{-1} {}^tPSP P^{-1}M) = {}^tMSM$.

Ceci nous donne bien sûr l'équation de $\mathcal{S}$ dans le nouveau repère.

I.C - Nature de $\mathcal{S}$

I.C.1) a) S est symétrique **réelle**, elle est donc diagonalisable en utilisant si on le désire une matrice de passage P orthogonale, ($P^{-1} = {}^tP$), **ce qu'on fait ici**. La matrice S' obtenue est donc bien diagonale.

b) Dans le nouveau repère, l'équation de $\mathcal{S}$ est donc : $\lambda'_1 x'^2 + \lambda'_2 y'^2 + \lambda'_3 z'^2 = 0$.

I.C.2) S est maintenant inversible.

a) S inversible revient à ce que son noyau soit réduit au vecteur nul, ce qui est équivalent au fait que 0 ne soit pas valeur propre.

b) On suppose que c'est λ_3 qui n'est pas de même signe que les autres, en divisant l'équation par $-\lambda_3$ et en faisant passer le terme en z'^2 de l'autre côté, on obtient : $\frac{x'^2}{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} = z'^2$.

Les dénominateurs sont strictement positifs et on peut donc écrire : $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = z'^2$.

Ceci est un polynôme homogène et est donc bien l'équation d'un cône de sommet o .

c) Si les valeurs propres sont toutes strictement de même signe, la seule solution est :

$x' = y' = z' = 0$, qui correspond à l'origine (inchangée) du repère, c'est à dire le point o .

Comme on a vu qu'on avait un cône dans l'autre cas, l'équivalence est démontrée.

I.D - Inverse d'une matrice

Remarquons qu'ici M désigne une matrice à 3 colonnes et non une matrice unicolonne...

I.D.1) On calcule l'élément première ligne et première colonne de MM' , c'est :

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = \det(M).$$

On calcule maintenant l'élément deuxième ligne et première colonne de MM' , c'est :

$$a_{21}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{22}(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) + a_{23}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = 0.$$

En admettant le résultat pour les autres termes, cela donne bien : $MM' = (\det(M))I$.

I.D.2) Cela donne : $M\left(\frac{1}{\det(M)}M'\right) = I$, et comme M est inversible, on obtient : $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}M'$.

I.E - Calcul matriciel

I.E.1) tM_1SM_2 est la valeur de la forme bilinéaire φ , associée à la matrice S , qui est symétrique puisque S est symétrique, et appliquée aux vecteurs $\overrightarrow{om_1}$ et $\overrightarrow{om_2}$.

Comme $\varphi(\overrightarrow{om_1}, \overrightarrow{om_2}) = \varphi(\overrightarrow{om_2}, \overrightarrow{om_1})$, on a immédiatement : ${}^tM_1SM_2 = {}^tM_2SM_1$.

$$\text{I.E.2)} \quad M_0Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (q) = \begin{pmatrix} x_0q \\ y_0q \\ z_0q \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = qM_0$$

II Tangentes à une conique

II.A -

II.A.1) On a $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{om} + \mu \overrightarrow{om_0}$, on reconnaît une paramétrisation de la droite passant par m et de vecteur directeur $\overrightarrow{om_0}$. Comme o, m, m_0 ne sont pas alignés, cette droite ne passe pas par o et est bien par ailleurs tracée sur le plan défini par ces trois points.

II.A.2) On a $p \in \mathcal{S} \Leftrightarrow {}^tPSP = 0 \Leftrightarrow {}^t(\mu M_0 + M)S(\mu M_0 + M) = 0 \Leftrightarrow (\mu {}^tM_0 + {}^tM)S(\mu M_0 + M) = 0$
 $\Leftrightarrow \mu^2 {}^tM_0SM_0 + 2\mu {}^tM_0SM + {}^tMSM = 0$ en utilisant la symétrie.

C'est encore équivalent à : $\mu^2 \{ {}^tM_0SM_0 \} + 2\mu \{ {}^tM_0SM \} + \{ {}^tMSM \} = 0$

Le quart du discriminant de cette équation du second degré en μ est bien :

$$\Delta(M) = \{ {}^tM_0SM \}^2 - \{ {}^tM_0SM_0 \} \{ {}^tMSM \}$$

II.B -

II.B.1) ${}^tMTM = {}^tM(SM_0 {}^tM_0S - \{ {}^tM_0SM_0 \} S)M = {}^tMSM_0 {}^tM_0SM - {}^tM \{ {}^tM_0SM_0 \} SM$
 $= {}^tMSM_0 {}^tM_0SM - \{ {}^tM_0SM_0 \} {}^tMSM = ({}^tMSM_0)^2 - \{ {}^tM_0SM_0 \} {}^tMSM$.

Cette matrice scalaire a comme élément : $\{ {}^tM_0SM \}^2 - \{ {}^tM_0SM_0 \} \{ {}^tMSM \} = \Delta(M)$.

II.B.2) En utilisant la règle de transposition des produits et le fait que S est symétrique, on a immédiatement : ${}^tT = T$.

II.B.3) $\Delta(M_0) = \{ {}^tM_0SM_0 \}^2 - \{ {}^tM_0SM_0 \} \{ {}^tM_0SM_0 \} = 0$ donc $m_0 \in \mathcal{S}$ et est par ailleurs distinct de o .
 Mais $\mathcal{S}$ est un cône de sommet o , donc la droite om_0 est tracée sur $\mathcal{S}$.

II.C -

II.C.1) $TN = SM_0 {}^tM_0SN - \{ {}^tM_0SM_0 \} SN = SM_0 \{ {}^tM_0SN \} - \{ {}^tM_0SM_0 \} SN$
 $= S(\{ {}^tM_0SN \} M_0 - \{ {}^tM_0SM_0 \} N)$.

II.C.2) $TM_0 = S(\{ {}^tM_0SN \} M_0 - \{ {}^tM_0SM_0 \} M_0) = 0$.

Ce qui prouve M_0 (non nul) est propre pour T et la valeur propre 0.

Par ailleurs, $TN = 0 \Leftrightarrow S(\{ {}^tM_0SN \} M_0 - \{ {}^tM_0SM_0 \} N) = 0$, mais S est inversible et ceci équivaut donc à : $\{ {}^tM_0SN \} M_0 - \{ {}^tM_0SM_0 \} N = 0$.

Comme M_0 n'est pas nul, ainsi que $\{ {}^tM_0SM_0 \}$, cela entraîne N colinéaire à M_0 .

Le sous-espace propre associé à M_0 est donc bien la droite dirigée par M_0 .

II.C.3) Le noyau de T est donc de dimension 1, son rang est donc 2.

II.D -

II.D.1) T est symétrique réelle et vérifie donc les hypothèses de S du I.C.1). Une des valeurs propres est nulle et si on choisit $\lambda_3 = 0$, l'équation de $\mathcal{S}$ est donc alors : $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0$.

II.D.2) λ_1 et λ_2 ne sont pas nuls, s'ils sont de même signe, $\mathcal{S}$ est d'équation $x' = y' = 0$, et, étant l'intersection de deux plans sécants, est réduite à une droite, la droite om_0 .

S'ils sont de signe contraire, l'équation de $\mathcal{T}$ peut s'écrire : $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$.

$\mathcal{T}$ est donc la **réunion** des deux plans distincts d'équation : $\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b} = 0$ et $\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 0$.

La droite om_0 est d'équation $x' = y' = 0$ et est donc tracée sur chacun de ces plans, elle en constitue donc l'intersection.

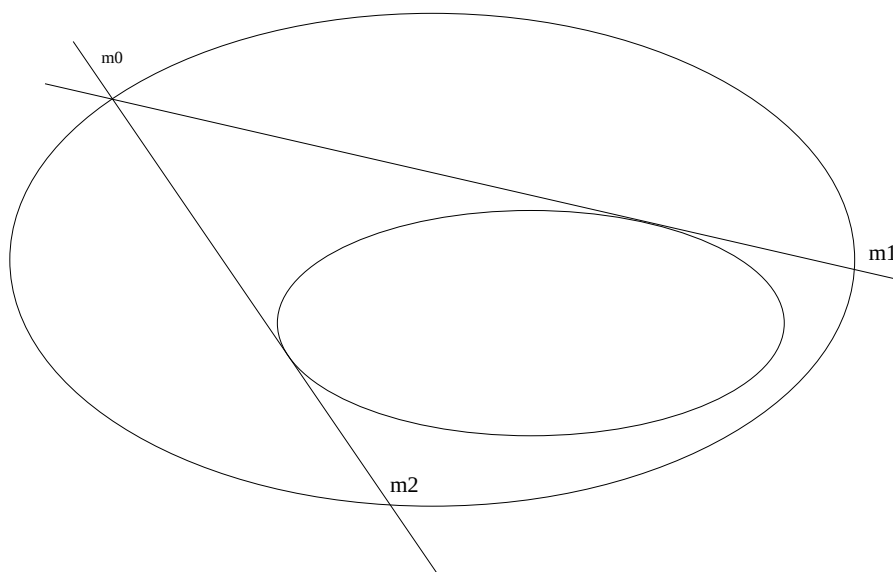
II.D.3) Les tangentes à $\mathcal{S}_1$ qui passent par m_0 sont les droites m_0m du plan d'équation $z = 1$ telles que $\Delta(M) = 0$ en vertu de la propriété admise, c'est à dire les droites m_0m telles que : $\{ {}^tMTM \} = 0$. Si les valeurs propres non nulles de T sont de même signe, cela revient à $x' = y' = 0$, c'est à dire que m est sur la droite om_0 et est donc le point m_0 . Il n'y a pas dans ce cas de tangentes à $\mathcal{S}_1$ qui passent par m_0 .

Si les valeurs propres non nulles de T sont de signe contraire, cela revient à l'intersection de chacun des deux plans de la question précédente avec le plan d'équation $z = 1$, on a donc bien 2 droites qui conviennent.

Le nombre de tangentes à $\mathcal{S}_1$ qui passent par m_0 est donc 0 ou 2.

III Utilisation de deux surfaces

III.A - Voici la figure demandée. Si on trace la droite m_1m_2 , on voit bien que la propriété $\mathcal{P}$ n'est pas ici vérifiée.



III.B -

III.B.1) Par définition du repère, on a : $M'_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

III.B.2) On sait que B' est symétrique, elle est donc de la forme : $\begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ a & \beta & c \\ b & c & \gamma \end{pmatrix}$.

Il faut donc montrer que les termes diagonaux sont nuls et que les termes non diagonaux sont non nuls et on aura la forme exacte demandée.

$m_0 \in \mathcal{B}$, donc ${}^tM'_0B'M'_0 = 0$.

Ce qui donne :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ a & \beta & c \\ b & c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha) = 0.$$

On a donc montré que $\alpha = 0$, on aura la nullité des autres termes diagonaux en travaillant avec m_1 et m_2 .

On a alors $\det B' = 2abc \neq 0$ car B , et donc B' , sont inversibles. Les termes non diagonaux de B' sont donc non nuls.

III.B.3) A' est inversible car A est inversible.

En appliquant la formule : $A'^{-1} = \frac{1}{\det(A')} A'$, on obtient facilement la valeur du troisième terme de la diagonale de A'^{-1} qui vaut : $\frac{xt-y^2}{\det(A')}$.

$${}^t M'_1 A' M'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & t & u \\ z & u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (y), \quad {}^t M'_0 A' M'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & t & u \\ z & u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x),$$

$${}^t M'_1 A' M'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & t & u \\ z & u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (t).$$

Ce qui donne : $\{ {}^t M'_1 A' M'_0 \}^2 - \{ {}^t M'_0 A' M'_0 \} \{ {}^t M'_1 A' M'_0 \} = y^2 - xt.$

III.B.4) Mais $\{ {}^t M'_1 A' M'_0 \}^2 - \{ {}^t M'_0 A' M'_0 \} \{ {}^t M'_1 A' M'_0 \} = \Delta(M'_1) = 0$ car la droite $m_0 m_1$ est tangente à $\mathcal{A}'_1$.
Finalement : $y^2 - xt = 0.$

III.B.5) Pour le deuxième terme de la diagonale de A'^{-1} , on obtient aussi 0 car cela revient à faire le même calcul avec m_0 et m_2 .

Comme A' est symétrique, il en est de même pour A'^{-1} qui est donc de la forme :
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & 0 & \delta \\ \gamma & \delta & 0 \end{pmatrix}$$

Comme pour les termes diagonaux précédents, $\alpha = 0$ si et seulement si $m_1 m_2$ est tangente à $\mathcal{A}'_1$, c'est à dire si et seulement si m_0 a la propriété $\mathcal{P}$.

Enfin, si $\delta = 0$, alors $\det(A') = 0$, ce qui est impossible car A , et donc A' est inversible.

III.C -
$$xI - M = \begin{pmatrix} x-d & -e & -f \\ -g & x-h & -i \\ -j & -k & x-l \end{pmatrix}$$

$\det(xI - M) = x^3 - (d+h+l)x^2 + (dh+hl+dl-ge-jf-ki)x - \det(M)$, par un calcul simple, ce qui donne : $\sigma_1 = -d-h-l$ et $\sigma_2 = dh+hl+dl-ge-jf-ki.$

Remarquons que, au signe près, $P(x)$ est le polynôme caractéristique de M .

III.D -

III.D.1)
$$M = A'^{-1} B' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & 0 & \delta \\ \gamma & \delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\beta + b\gamma & a\alpha + c\gamma & b\alpha + c\beta \\ b\delta & a\beta + c\delta & b\beta \\ a\delta & a\gamma & b\gamma + c\delta \end{pmatrix}$$

III.D.2) a) On écrit ici une procédure Maple la plus élémentaire possible :

```
Centrale06 := proc(a,b,c,alpha,beta,gamma,delta)
local sigma1,sigma2;
sigma1 := -2(a*beta+b*gamma+c*delta);
```

```

sigma2 := (a*beta+b*gamma)*(a*beta+c*delta) + (a*beta+b*gamma)*(b*gamma+c*delta) + (a*beta+c*delta)*(b*gamma+c*delta)
         - b*delta*(a*alpha+c*gamma) - a*delta*(b*alpha+c*beta) - a*gamma*b*beta;
sigma1*sigma1/4 - sigma2
end;

```

b) On a $\frac{\sigma_1^2}{4} - \sigma_2 = 2\alpha\delta ab$.

On sait que δ, a et b ne sont pas nuls, l'équivalence demandée est alors évidente.

III.E -

III.E.1) On sait que $A' = {}^tPAP$ et donc $A'^{-1} = P^{-1}A^{-1}{}^tP^{-1}$, on a aussi $B' = {}^tPBP$.

Ce qui donne $A'^{-1}B' = P^{-1}A^{-1}{}^tP^{-1}{}^tPBP = P^{-1}A^{-1}BP$, ce qui assure que $A'^{-1}B'$ et $A^{-1}B$ sont semblables.

III.E.2) Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc σ_1 et σ_2 sont les mêmes pour ces deux matrices.

$\frac{\sigma_1^2}{4} - \sigma_2$ ne dépend donc que de A et B , c'est à dire des deux coniques, et pas de m_0 .

III.E.3) Si on a un point m_0 de $\mathcal{B}_1$ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}$, tous les points de $\mathcal{B}_1$ vérifient cette propriété car elle ne dépend que de la nullité de $\frac{\sigma_1^2}{4} - \sigma_2$.

III.F -

III.F.1) $\det(xA - B) = \det(A) \det(xI - A^{-1}B) = \det(A) \det(xI - A'^{-1}B') = \det(A) P(x)$.

III.F.2) On a donc $s = \det(A) \sigma_1$ et $q = \det(A) \sigma_2$.

La relation $\sigma_1^2 = 4\sigma_2$ est donc équivalente à $\frac{s^2}{\det(A)^2} = 4 \frac{q}{\det(A)}$ ou encore $s^2 = 4q \det(A)$.

IV Exemple d'application aux coniques

IV.A - $\mathcal{A}_1$ est un cercle et $\mathcal{B}_1$ est une parabole.

Les figures, élémentaires, sont laissées au lecteur.

Quand $p = \frac{1}{6}$, on remarque que le point de coordonnées $\left(2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ est sur $\mathcal{B}_1$ et à l'intérieur du cercle $\mathcal{A}_1$.

Par ce point de $\mathcal{B}_1$, on ne peut donc pas tracer deux tangentes à $\mathcal{A}_1$.

IV.B -

IV.B.1) Quand on fait $z = 1$, $ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz = ax^2 + dy^2 + f + 2bxy + 2cx + 2ey$, les valeurs de A et B sont donc entièrement définies par les équations de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{B}_1$.

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV.B.2) $\det(A) = -1 \neq 0$ et $\det(B) = p^2 \neq 0$, les matrices sont bien inversibles.

$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{B}_1$ sont non vides donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas réduits à l'origine ce qui prouve que ni A ni B n'ont de valeurs propres **strictement** de même signe.

IV.C -

$$\text{IV.C.1) } \det(xA - B) = \begin{vmatrix} x & 0 & -2x+p \\ 0 & x-1 & 0 \\ -2x+p & 0 & 3x \end{vmatrix} = -x^3 + (1+4p)x^2 + (-p^2-4p)x + p^2$$

par un calcul simple.

On obtient donc $s = 1 + 4p$ et $q = -p^2 - 4p$.

IV.C.2) On a facilement $s^2 - 4q \det(A) = 12p^2 - 8p + 1$, et tout aussi facilement les racines qui sont $p = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{1}{6}$.

$p = \frac{1}{6}$ ne peut convenir car dans ce cas, l'hypothèse géométrique voulant que par tout point de $\mathcal{B}_1$ on puisse mener deux tangentes à $\mathcal{A}_1$ n'est pas vérifiée, en particulier pour le point de coordonnées $\left(2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

$p = \frac{1}{2}$ est donc la seule valeur convenable de p .

IV.C.3) La figure (approximative ici) se fait facilement.

