CENTRALE 2001 TSI – MATHEMATIQUES 2

Question Préliminaire

Une matrice symétrique réelle a toutes ses valeurs propres réelles.
Soit $X \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur propre relatif à la valeur propre λ
La matrice étant positive (resp définie positive) :
$X^* AX \;=\; \lambda X^* X \;=\; \lambda \| X \|^2 \;\geq 0$ (resp > 0).
Donc toutes les valeurs propres d'une matrice positive sont positives ou nulles, et toutes les valeurs propres d'une matrice définie positive sont stictement positives.

PARTIE I

I.A. En fait on peut écrire la définition sous la forme : $N(A) \;=\; \sup\limits_{\| x \|=1} \| Ax \|$

Prouver l'existence de $N(A)$ revient à prouver que l'ensemble des $\{ \| Ax \| \}_{\| x \|=1}$ est borné.

Or : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\| x \| = 1$

$$\| Ax \| \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right)^2} \;\leq\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\;|x_j|\right)^2} \;\leq\; n \| x \| \operatorname*{Sup}_{i,j}\; a_{i,j}^2 \;\leq\; n \operatorname*{Sup}_{i,j}\; a_{i,j}^2$$

(plus grand élément d'un nombre fini de termes)
d'où l'existence de $N(A)$

Enfin pour un vecteur quelconque x non nul de $\mathbb{R}^n$, on pose $x' \;=\; \dfrac{1}{\| x \|}x$ $\quad$ $(\, \| x' \| \;=\; 1)$

$\| Ax \| \;=\; \| A(\| x \| x') \| \;=\; \| x \| \, \| Ax' \|$ donne la deuxième formule.

$$\boxed{N(A) \;=\; \sup_{\| x \|=1} \| Ax \| \;=\; \sup_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}}$$

I.B. On vérifie la définition à l'aide de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rl} \forall A \;\in\; M_n(\mathbb{R}) & N(A) \;>=\; 0 \\ & N(A) \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; A \;=\; O \\ \forall A \;\in\; M_n(\mathbb{R})\; \forall \lambda \in \mathbb{R} & N(\lambda A) \;=\; |\lambda| \; N(A) \\ \forall (A,B) \;\in\; M_n(\mathbb{R})^2 & N(A+B) \;\leq\; N(A) + N(B) \end{array}$$

Puis : $\forall\, (A,B) \;\in\; M_n(\mathbb{R})^2$ $\qquad$ Si $B \;\neq\; 0$

$$N(A.B) \;=\; \operatorname*{Sup}_{\| x \|=1} \| A.B\,x \| \;=\; \operatorname*{Sup}_{\| x \|=1} \| A(B\,x) \| \;=\; \operatorname*{Sup}_{\| x \|=1} \left(\frac{\| A(B\,x) \|}{\| B\,x \|} \; \| B\,x \| \right) \;\leq\; N(A)\,.\,N(B)$$

Si $B\,x = 0$ $\quad$ alors : $A.B\,x = 0$

Donc : $\boxed{N(A.B) \;\leq\; N(A).N(B)}$

I.C. Il suffit de calculer $\| Ax \|$ avec les vecteurs de la base canonique : $\forall\, i \in \{1..n\}$ $\qquad$ $A\,e_i \;=\; c_i$:
$\forall\, i \in \{1..n\}$ $\qquad$ $\| A\,e_i \| \;=\; \| c_i \| \;\leq\; N(A)$

I.D. En reprenant dans ce cas le calcul de (**I.A**) avec $A \;=\; [0,\ldots,0,v]$:

$$\forall x \quad \| x \| \;=\; 1 \qquad \| Ax \| \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i x_n)^2} \;\leq\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \;\leq\; \| v \|$$

Ici : $N(A) \;\leq\; \| v \|$ et on a dejà (**I.C**) : $N(A) \;\geq\; \| v \|$

d'où le résultat : $\boxed{N([0,\ldots,0,v]) \;=\; \| v \|}$.

I.E. $(A^*A)^* = A^*A$ prouve que la matrice est symétrique.

$\forall X \in M_{n,1}\ X^*(A^*A)X = (AX)^*(AX) = \|AX\|^2 \geq 0$

Donc (A^*A) est une matrice symétrique positive.

Comme toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ de matrice de passage P orthogonale $(P^{-1} = P^*)$ avec ici toutes les valeurs propres (λ_i) positives ou nulles, on a :

$X = x = \sum_{i=1}^{n} x'_i \varepsilon_i$ et $A^*Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_i \varepsilon_i$

$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'^2_i \leq \rho(A^*A)\|x\|^2$ (valeur atteinte pour les vecteurs propres relatifs à $\rho(A^*A)$)

donc : $N(A) = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

I.F. De même le calcul de $N(A^*A)$: $\|A^*A\,x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x'^2_i \leq \rho(A^*A)^2\|x\|^2$ valeur atteinte pour les vecteurs propres relatifs à $\rho(A^*A)$ donc : $N(A^*A) = \rho(A^*A)$.

$\boxed{N(A^*A) = N(A)^2}$

PARTIE II

II.A.

Remarque : *Il faut définir la limite d'une suite de matrices* ($A = \lim_{m\to+\infty} A(m)$ *par :* $a_{i,j} = \lim_{m\to+\infty} a_{i,j}(m)$) *et vérifier que l'on peut l'obtenir avec :* $\lim_{m\to+\infty} N(A(m) - A) = 0$

Dans ces conditions, on reconnaît la somme partielle d'une série dont la convergence est assurée par l'étude du reste :$R_m = \sum_{k\geq m+1} A^k$

Or : $N(R_m) \leq (N(A))^{m+1} \sum_{k=0}^{+\infty} N(A)^k \leq (N(A))^{m+1} \dfrac{1}{1-N(A)}$

Avec l'hypothèse $N(A) < 1$ on a : $\lim_{m\to+\infty} N(R_m) = 0$ donc : $\lim_{m\to+\infty} R_m = O$

$\boxed{\text{La suite } S_m \text{ converge et : } \lim_{m\to+\infty} S_m = S}$

On remarque que : $(I_n - A)S_m = I_n - A^{m+1}$

Puis : $\lim_{m\to+\infty}(I_n - A)S_m = \lim_{m\to+\infty}(I_n - A^{m+1}) = I_n = (I_n - A)S$ prouve que $(I_n - A)$ est inversible, d'inverse S.

II.B.

B n'est pas inversible, donc $I_n - A^{-1}(A - B)$ n'est pas inversible. D'après la question précédente : $N(A^{-1}(A - B)) \geq 1$ soit :

$1 \leq A^{-1}(A - B) \leq N(A^{-1})(N(A - B))$

et le résultat en mutipliant par $N(A)$: $\boxed{\operatorname{cond}(A) \geq \dfrac{N(A)}{N(A-B)}}$

II.C.

$A - M = [c_1, \ldots, c_{n-1}, p(c_n)]$

Ces vecteurs sont liées car :$p(c_n) \in \operatorname{Vect}(c_1, \ldots, c_{n-1})$ donc $A - M$ n'est pas inversible.

On est dans les hypothèses de la question précédente : $\operatorname{cond}(A) \geq \dfrac{N(A)}{N(A-(A-M))} \geq \dfrac{Max(\|c_i\|)}{N(M)} >= \dfrac{\|c_1\|}{\|v\|}$

PARTIE III

III.A. Remarquons que : $v \in H^\perp$ donc : $< u,v > = 0$

$$\| X^{n-1}q - u \|^2 = \| (X^{n-1}q - p(X^{n-1}q)) + ((p(X^{n-1}q) - u) \|^2$$
$$= \| X^{n-1}q - p(X^{n-1}q) \|^2 + \| (p(X^{n-1}q) - u \|^2 + < (X^{n-1}q - p(X^{n-1}q), (p(X^{n-1}q) - u) >$$
$$= \| X^{n-1}q - p(X^{n-1}q) \|^2 + \| (p(X^{n-1}q) - u \|^2 + 0$$
$$\| X^{n-1}q - u \|^2 \geq \| v \|^2$$

En écrivant le polynôme sous la forme : $P(X)q = X^{n-1}q - u$ $(u \in H)$ on retrouve : $\| v \| \leq \| P(X)q \|$

III.B. En appliquant **II.C** à la matrice A de type VDM :

$\| c_1 \| = \| q \|$ et

$$\| v \| \leq \| P(X)q \| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (P(x_i)q_i)^2} \leq \| q \| \operatorname*{Sup}_{x \in [-1,1]} |P(x)| \qquad \text{(hypothèse sur les } x_i)$$

d'où le résultat : $\boxed{\text{cond}(A) \geq \dfrac{1}{\operatorname*{Sup}\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)|}}$.

III.C. Démonstration par récurrence :

La formule est vraie pour $t = 0$ et $t = 1$ supposons le résultat vrai pour n et $n+1$ et vérifions qu'il est alors vrai pour $n+1$ et $n+2$

$T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta \cos(n+1)\theta - \cos n\theta = \cos(n+2)\theta$ en linéarisant le produit des cos.

La formules est donc vraie pour tout n.

Si $x \leq 1$ on peut poser : $x = \cos\theta$ alors : $T_n(\cos\theta) = cos(n\theta)$

donc $\boxed{\operatorname*{Sup}\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| \leq 1}$

III.D. Il est facile par récurrence de trouver que T_n est de degré n avec un coefficient dominant égal à : 2^{n-1} pour $n \geq 1$

III.E. Il suffit de poser :$P(x) = 2^{2-n}\, T_{n-1}(x)$ pour avoir un polynôme normalisé et appliquer **III.B**.

$\boxed{\text{Cond}(A) \geq 2^{2-n}}$

PARTIE IV

IV.A. La base canonique est orthonormée. En posant $B = [v_1, \ldots, v_n]$ le système $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une nouvelle base quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Par la méthode de Schmidt, on peut construire une nouvelle base orthonormée $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ dont la matrice de passage à partir de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une matrice triangulaire supérieure P . Enfin Q la matrice de passage de cette base orthonormée $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ a partir de la base canonique $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une matrice orhogonale.

Donc : $Q = B\,P$. En Posant $P^{-1} = R$ également triangulaire supérieure on obtient : $\boxed{B = Q\,R}$

IV.B. On a montré que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée (matrice symétrique) avec une matrice diagonale D n'ayant que des valeurs propres $\lambda_i > 0$ Soit P la matrice de passage orthogonale.

Posons D' la matrice diagonale de coefficients sur la diagonale : $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ donc inversible. $D'^2 = D$

$A = P\,D\,P^{-1} = P\,D'\,P^{-1}\,P\,D'\,P^{-1} = (P^{*-1}\,D'\,P^*)\,(P\,D'\,P^{-1}) = (P\,D'\,P^{-1})^*\,(P\,D'\,P^{-1})$

il suffit de poser : $\boxed{B = P\,D'\,P^{-1}}$ pour avoir $A = B^*\,B$

En decomposant B suivant la question précédente :

$A = (QR)^*\,QR = R^*\,(Q^*\,Q)\,R = R^*\,R$ (Q orthogonale).

IV.C. Remarquer que : $c_1 = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.
$< c_i, c_j > = c_i^* c_j = r_{1,1}^{-2} a_{i,j}$
Propriètè de la matrice de Hankel : $\forall \ (i,j) \in \{1, \dots, n-1\}^2 \quad < c_{i+1,j}, c_j > = < c_i, c_{j+1} >$

IV.D. Il suffit de remarquer que la matrice $[c_1, \dots, c_n]$ est une matrice triangulaire supérieure inversible : les vecteurs $c_1, \dots, c_{n-1}$ forment un système libre et n'ont pas de composante sur e_n.
$\boxed{\mathrm{Vect}(c_1, \dots, c_{n-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})}$ (même hyperplan).

IV.E. En remarquant que $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on reconnait la définition de la matrice associée à un endomorphisme comme tableau des images des vecteurs de la base.
$T^*(e_n)$ est la dernière ligne de T et donc $t_{n,n}$ est le seul coefficient arbitraire.

$$T = [c_2, c_3, \dots, c_n, T^*(e_n)]$$

IV.F. Avec : $c_1 = e_1$ on a $c_k = T^{k-1}(e_1) \qquad (k \in \{2, n\})$
On retrouve **IV.C** : $< T(T^i(e_1), T^j(e_1) > = < c_{i+2}, c_{j+1} >$
$< T^*(T^i(e_1), T^j(e_1) > = < T^*(c_{i+1}), c_{j+1} > = (T.c_{i+1})^* c_{j+1} = c_{i+1}^* T(c_{j+1}) = < c_{i+1}, c_{j+2} >$
$\boxed{\forall (i,j) \in \{0, \dots, n-2\}^2 \qquad < T(T^i e_1), T^j e_1 > = < T^*(T^i e_1), T^j e_1 >}$

IV.G. Posons $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i c_i + x_n e_n$

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i c_{i+1} + x_n T(e_n)$$
pour $k \in \{1, n-1\}$
$$< T(x), c_k > = \sum_{i=1}^{n-1} x_i < c_{i+1}, c_k > + x_n < T(e_n), c_k >$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} x_i < T^*(c_i), c_k > + x_n T^*(e_n), c_k > = < T^*(x), c_k >$$
$$< T(x), e_n > = \sum_{i=1}^{n-1} x_i < c_{i+1}, e_n > + x_n < T(e_n), e_n >$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} x_i < T^*(c_i), e_n > + x_n < T^*(e_n), e_n > = < T^*(x), c_k >$$
car : $< T(c_i), e_n > = c_i^* T^*, e_n = < c_i, T(e_n) >$
$= < c_i, T^*(e_n) > = c_i^* T^* e_n = < T^*(c_i), e_n >$
La propriété étant vrai pour tous les vecteurs de la base et en prenant la décomposition de chaque vecteur dans cette base on a :
$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad < Tx, y > = < T^* x, y >}$

IV.H. Donc en prenant pour y les vecteurs de la base canonique (orthonormée) où les composantes d'un vecteur sont calculées par : $x_i = < x, e_i >$, les deux vecteurs ont respectivement les mêmes composantes
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Tx = T^* x$ et aussi : $\boxed{T = T^*}$

IV.I. Cette matrice symétrique T est diagonalisable dans un changement de base orthonormée (matrice de passage Q orthogonale et T' matrice diagonale).
$T = Q T' Q^{-1}$
donc : $R = r_{1,1} Q [Q^{-1} e_1, T' Q^{-1} e_1, T'^2 Q^{-1} e_1, \dots, T'^{n-1} Q^{-1} e_1]$
En posant : $q = r_{1,1} Q^{-1} e_1$ et en identifiant $X = T'$
on reconnait : $R = Q B$ avec $B = [q, T'q, T'^2 q, \dots, T'^{n-1} q]$ une matrice de type VDM.
Alors : $A = R^* R = B^* Q^* Q B = B^* B$

IV.J. D'après le résultat donné en **III.E** sur le conditionnement des matrices de type VDM :
$\mathrm{cond}(A) = N(B^* B).N((B^* B)^{-1}) = (N(B).N(B^{-1}))^2 = \dfrac{3}{2^6} 2^n = 3.2^{n-6}$

IV.K. **Remarque :** *Pour le produit scalaire proposé, la base canonique* $\{1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}\}$ *n'est pas orthonormée.*

Pour tout polynôme $P = \sum_0^{n-1} a_i X^i \neq 0$ posons $Q = H_n P = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+k+1} \right) X^k$

$$(P, Q) = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+k+1} \right) x^k \right) \underset{\cdot}{x}$$

$$(P, Q) = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+k+1} \right) x^{i+k} \right) \underset{\cdot}{x}$$

$$(P, Q) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+k+1} \frac{a_i}{i+k+1}$$

$$(P, Q) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+k+1} \frac{a_i}{i+k+1} \right)$$

$$(P, Q) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+k+1} \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+k+1} \right)$$

$$(P, Q) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+k+1} \right)^2 > 0$$

La matrice H_n est une matrice de Hankel définie positive.