

## Math A – Concours X/ENS 2025 : Proposition de corrigé

Si vous repérez ce qui vous semble une erreur, n'hésitez pas à me contacter :

Y.Hamid : yahya6751290@gmail.com

### I. Questions préliminaires :

**1.** On a  $h$  est diagonalisable. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme scindé à racines simples annulant  $h$  (par exemple  $\pi_h$ ).

On a :  $P(h) = 0 \implies P(h_W) = 0$ , donc  $h_W$  est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

D'où  $h_W$  est diagonalisable.

**2.a)** Il suffit de montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\dim \ker(M^k) = \dim \ker((M')^k)$ .

Par le théorème du rang, cela revient à montrer que  $\text{rg}(M^k) = \text{rg}((M')^k)$ , ce qui est vrai car la similitude ne modifie pas le rang (multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles).

Donc  $\forall k \in \mathbb{N}$  on a  $\delta_k(M) = \delta_k(M')$

**2.b)** Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

On a (en calculant les puissance de  $J_r$ ) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \text{rang}(J_r^k) = \begin{cases} n - k & \text{si } k \leq r - 1, \\ 0 & \text{si } k \geq r. \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Donc d'après le théorème du rang on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \delta_k(J_r) = \begin{cases} r - (r - 1) - 2(r - r) + 0 = 1 & \text{si } k = r, \\ -(k - 1) + 2k - (k + 1) = 0 & \text{si } k < r, \\ -r + 2r - r = 0 & \text{si } k > r. \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

D'où le résultat.

**2.c)** Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux matrices carrées de taille quelconque et Soit  $M = \text{diag}(M_1, M_2)$

On pose:

- Pour tout entier  $r$ ,  $T_r = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  où les 1 apparaissent  $r$  fois.
- $\text{rang}(M_1) = r_1$  et  $\text{rang}(M_2) = r_2$

Par le théorème équivalence des matrices, il existent  $P_1, Q_1, P_2, Q_2$  des matrices inversibles (de tailles convenables) tel que :

$$\begin{cases} M_1 = P_1 \cdot T_{r_1} \cdot Q_1 \\ M_2 = P_2 \cdot T_{r_2} \cdot Q_2 \end{cases}$$

avec cette décomposition on a :

$$M = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{r_1} & 0 \\ 0 & T_{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.3})$$

Donc  $\text{rang}(M) = \text{rang}(M_1) + \text{rang}(M_2)$

D'où par théorème du rang again :  $\dim \text{Ker}(M) = \dim \text{Ker}(M_1) + \dim \text{Ker}(M_2)$

En élevant à la puissance  $k$  les deux membres de (I.3) et en appliquant la première partie de la question, on aura le résultat voulu. (par théorème du rang une fois encore !)

## II. Algèbre linéaire sur les polynômes de Laurent

**3.a)** Soit  $F \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}]$ . On pose  $\sum_{k=-p}^q f_k X^k$ .

On a d'une part :  $\hat{\xi}(\Pi(F)) = \Pi(X.\Pi(F))$

$$\text{Or } \Pi(F) = \sum_{k=-p}^{-1} f_k X^k \implies X.\Pi(F) = \sum_{k=-p+1}^0 f_{k-1} X^k \implies \Pi(X.\Pi(F)) = \sum_{k=-p+1}^{-1} f_{k-1} X^k$$

$$\text{D'autre part : } \hat{\xi}(F) = \Pi(X.F) = \Pi\left(\sum_{k=-p+1}^{q+1} f_{k-1} X^k\right) = \sum_{k=-p+1}^{-1} f_{k-1} X^k$$

Donc  $\hat{\xi}(\Pi(F)) = \hat{\xi}(F)$

Remarque : on pourrait utiliser la linéarité des deux application et les appliquer en les polynômes de Laurent.

**3.b)** Comme  $P \mapsto P(\xi)(F)$  et  $P \mapsto \Pi(PF)$  sont linéaires sur  $\mathbb{C}[X]$ , on utilise maintenant la base canonique de  $\mathbb{C}[X]$ .

Calculons  $\xi^2$  :

Soit  $F$  dans  $D$ , on a  $\xi^2(F) = \hat{\xi}_D(\Pi(XF)) = \hat{\xi}(XF) = \Pi(X^2F)$

Par récurrence simple, on montre que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$   $\xi^k(F) = \Pi(X^k F)$

Et c'est vrai aussi pour  $k = 0$  car  $\xi^0(F) = F$  et  $\Pi(X^0 F) = \Pi(F) = F$

Donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$   $\xi^k(F) = \Pi(X^k F)$

D'où le résultat.

**4)** Soit  $n \in \mathbb{N}$

On a

$$\begin{aligned} \xi^n : D &\rightarrow D \\ X &\mapsto \Pi(X^n F) \end{aligned}$$

Soit  $G \in D$  de la forme  $G = \sum_{k=-p}^{-1} g_k X^k$

On pose  $F = \sum_{k=-p}^{-1} g_k X^{-n+k} \in D$

On a bien  $X^n F = G$  donc  $\xi^n(F) = G$

D'où la surjectivité de  $\xi^n$

On a  $\text{Ker}(\xi^n) = \{F \in D \mid \xi^n(F) = 0_D\} = \{F \in D \mid X^n F \in \text{Ker}(\Pi)\} = \{F \in D \mid X^n F \in \mathbb{C}[X]\}$

donc une base de  $\text{Ker}(\xi^n)$  est  $(X^{-n}, \dots, X^{-1})$

5 Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ .

Montrons que  $D_r = \text{Vect}(X^{-r+k})_{0 \leq k \leq r-1}$

Soit  $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$  et soit  $A$  un sous espace vectoriel de  $D$  tel que  $X^{-r} \in A$  et  $\xi(D_r) \subseteq D_r$

on a  $X^{-r} \in A \implies \xi^k(X^{-r}) = X^{-r+k} \in A$

Donc  $\text{Vect}(X^{-r+k})_{0 \leq k \leq r-1} \subseteq A$

D'où  $\text{Vect}(X^{-r+k})_{0 \leq k \leq r-1} = D_r$

On en déduit immédiatement que la matrice de l'endomorphisme  $\xi_{D_r}$  induit par  $\xi$  sur  $D_r$  dans cette base est  $J_r$

### III. Prolongements compatibles

6)a) Pour montrer que  $J$  est un idéal de  $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$  on montre que :

- $(J, +)$  est un sous groupe de  $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ .
- $\forall (P, Q) \in (J, \mathbb{C}[\mathbb{X}]) \quad P \cdot Q \in J$  (car  $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$  est commutatif)

La première découle de la stabilité par combinaison linéaire de  $W$ .

Pour la deuxième, si  $P \in J$ , alors  $P(u)(v) \in W$ , donc  $\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(P(u)(v)) \in W$

Donc par linéarité de  $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$  pour tout  $Q \in \mathbb{C}[\mathbb{X}] \quad (Q \cdot P)(u)(v) \in W$

6)b) On a  $u$  est nilpotant, donc  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $u^n = 0$

donc  $X^n(u)(v) = 0$ . D'où  $X^n \in J$  (Notons ici que  $n$  est non nul car sinon  $id_v = 0$  !)

Comme  $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$  est principale alors  $\exists P \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$  tel que  $J = \langle P \rangle$

Or puisque  $X^n \in J$  alors  $P$  divise  $X^n$

Donc  $\exists r \in \mathbb{N}$  tel que  $J = \langle X^r \rangle$  (Notons que  $r \neq 0$  car sinon  $1(u)(v) = v \in W$ )

6)c) En posant  $P = 0 \in \mathbb{C}[X]$  on a  $W \subseteq W'$ . Et pour  $P = 1 \in \mathbb{C}[X]$  et  $w = 0 \in W$  on a  $v \in W'$ .

Soit  $x \in W'$ .  $\exists (P, w) \in \mathbb{C}[X] \times W$  tel que :  $x = P(u)(v) + w$

On a  $u(w) \in W$ .

On en déduit que, si l'on pose  $Q = XP \in \mathbb{C}[X]$ , on a, par linéarité de  $u$  :

$$u(x) = u \circ P(u)(v) + u(w) = Q(u)(v) + u(w) \in W'.$$

Donc  $u(W') \subseteq W'$

**6)d)** Puisque  $\xi^r$  est surjectif de  $D$  vers  $D$  et  $\pi$  est à valeurs dans  $D$ , le résultat est immédiat.

**6)e)** On a  $\xi \circ \varphi = \varphi \circ u_W$

Donc par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \xi^k \circ \varphi = \varphi \circ u_W^k.$$

Donc par linéarité pour tout polynôme  $Q \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$  on a :  $Q(\xi) \circ \varphi = \varphi \circ Q(u_W)$

Maintenant supposons que  $P(u)(v) = w$ , donc  $P(u)(v) \in W$ , càd  $P \in J = \langle X^r \rangle$

Donc il existe  $Q \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$  tel que  $P = X^r Q$

On a donc ;  $\varphi(w) = \varphi(P(u)(v)) = \varphi(Q(u)(u^r(v))) = Q(\xi) \circ \varphi(u^r(v))$  (notons que  $u^r(v) \in W$ )

Donc D'après la question précédente :

$$\varphi(w) = Q(\xi) \circ \xi^r(F_v) = (X^r Q)(\xi)(F_v) = P(\xi)(F_v)$$

**6)f)** (Question un peu technique)

- Montrons que  $\varphi'(x)$  ne depend que de  $x$ .

Soit donc  $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$  et  $w_1, w_2 \in W$  tel que  $x = P_1(u)(v) + w_1 = P_2(u)(v) + w_2$

Donc  $(P_1 - P_2)(u)(v) + (w_1 - w_2) = 0$  ( On a bien  $(P_1 - P_2) \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$  et  $(w_1 - w_2) \in W$ )

Donc d'après la question précédente  $(P_1 - P_2)(\xi)(F_v) + \varphi(w_1 - w_2) = 0$

Et par linéarité de  $\varphi$  on déduit que:  $P_1(\xi)(F_v) + \varphi(w_1) = P_2(\xi)(F_v) + \varphi(w_2)$

D'où  $\varphi'$  ne dépend pas des choix de  $P$  et  $w$ .

- Montrons maintenant que  $\varphi$  est la restriction de  $\varphi'$  à  $W$

Soit  $w \in W$ . On a :  $w = 0(u)(v) + w$  donc  $\varphi'(w) = 0(\xi)(F_v) + \varphi(w) = \varphi(w)$

D'où  $\varphi' = \varphi$  sur  $W$ .

- Montrons que  $\xi \circ \varphi' = \varphi' \circ u_{W'}$

Soit  $x \in W'$  tel que  $x = P(u)(v) + w$

On a d'une part :

$$\xi(\varphi'(x)) = \xi(P(\xi)(F_v) + \varphi(w)) = \xi(P(\xi)(F_v)) + \xi(\varphi(w)) = (XP)(\xi)(F_v) + \varphi(u(w))$$

Et d'autre part :

$$\varphi'(u(x)) = \varphi'((XP)(u)(v) + u(w)) \text{ et on a bien } XP \in \mathbb{C}[\mathbb{X}] \text{ et } u(w) \in W \text{ par stabilité de } u.$$

$$\text{Donc } \varphi'(u(x)) = (XP)(\xi)(F_v) + \varphi(u(w))$$

D'où l'égalité. On a montrer donc que  $\varphi'$  est un prolongement de  $\varphi$  à  $W'$  compatible avec  $u$ .

**7)** On est en dimension finie, donc le plus naturel est de raisonner par récurrence. Mais nous procédons autrement.

Soit  $A = \{W' \text{ sev de } V \mid W \subseteq W', \varphi \text{ se prolonge en } \varphi' \text{ sur } W' \text{ compatible avec } u\}$

Et soit  $B = \{\dim(W') \mid W' \in A\}$ .

On a  $W \in A$ , donc  $\dim(W) \in B$ , ceci implique que  $B \neq \emptyset$

Et  $B$  est clairement une partie de  $\mathbb{N}$  majorée par  $\dim(V)$  donc admet bien un maximum.

On pose donc  $r = \max(B)$ , et  $W'$  un sev de  $V$  où le max est atteint.

Supposons par absurde que  $V \neq W'$ , càd  $W' \subsetneq V$ . Soit donc  $v \in V'$  tel que  $v' \notin W'$

Soit  $\varphi'$  un prolongement sur  $W'$  compatible avec  $u$

On pose donc :  $W'' = \{P(u)(v') + w \mid P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } w \in W'\}$ .

On a bien  $W' \subsetneq W''$  puisque  $v' \in W''$  alors que  $v' \notin W'$

Donc d'après ce qui précède,  $\varphi'$  admet un prolongement sur  $W''$   $\varphi$  compatible avec  $u$ .

C'est en particulier un prolongement de  $\varphi$  compatible avec  $u$ . donc  $W'' \in A$ .

Par contre :  $\dim(W') = r < \dim(W'')$  ce qui est absurde.

Donc  $V = W'$  ce qui achève la démonstration.

#### IV. Théorème de décomposition pour les endomorphismes nilpotents

**8)a)** Soit  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(v_0) = 0$ . En composant par  $u^{n-1}$  l'égalité on obtient que  $a_0 = 0$  car  $u^{n-1}(v_0) \neq 0$ . On continue donc par récurrence finie en composant à chaque fois par  $u^{n-i}$  pour annuler le coefficient  $a_{i-1}$  pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Ceci implique que  $B = (v_0, u(v_0), \dots, u^{n-1}(v_0))$  est libre. Il est clair que  $v_0 \in W = \text{Vect}(v_0, u(v_0), \dots, u^{n-1}(v_0))$ . Et la stabilité par  $u$  découle directement du fait que  $u$  est nilpotent d'indice  $n$ . Et on a  $\text{Mat}(u_W) = J_n$

**8)b)** Définissons  $\varphi$  sur  $W$  par l'image de chaque élément de  $B$  :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varphi(u^k(v_0)) = X^{k-n}. \text{ (Bien définie car } k < n).$$

$$\text{Si } w = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(v_0), w' = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k u^k(v_0) \in W \text{ tel que } \varphi(w) = \varphi(w'), \text{ càd : } \varphi(w - w') = 0$$

Donc  $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a'_k) X^{k-n} = 0$ , ceci implique par liberté de  $(X^{k-n})_{0 \leq k \leq n-1}$  que  $a_k = a'_k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . D'où l'injectivité.

Pour montrer que :  $\xi \circ \varphi = \varphi \circ u_W$  il suffit de montrer l'égalité sur la base  $B$ . Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$\text{D'une part on a : } \xi(\varphi(u^k(v_0))) = \xi(X^{k-n}) :$$

- Pour  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$  on a  $\xi(X^{k-n}) = X^{k-n}$
- Pour  $k = n-1$  on a  $\xi(X^{n-n}) = \xi(1) = 0$

$$\text{D'autre part : } \varphi(u_W(u^k(v_0))) = \varphi(u^{k+1}(v_0)) :$$

- Pour  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$  on a  $\varphi(u^{k+1}(v_0)) = X^{k-n}$
- Pour  $k = n-1$  on a  $\varphi(u^{n-1+1}(v_0)) = \varphi(u^n(v_0)) = \varphi(0) = 0$

Ce qui achève la démonstration.

**8)c)** On montre par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \xi^k \circ \varphi = \varphi \circ u_W^k.$$

Pour  $k = n$  on a  $\xi^k \circ \psi = 0$  car  $u$  est nilpotent d'indice  $n$ . D'où  $Im(\psi) \subseteq Ker(\xi^n)$

**8)d)** Soit  $x \in Ker(\psi)$ , alors  $\psi(u(x)) = \xi(\psi(x)) = \xi(0) = 0$ . Donc  $u(Ker(\psi)) \subseteq Ker(\psi)$ .

Si  $x \in Ker(\psi) \cap W$ . Donc  $\psi_W(x) = \varphi(x) = 0$ . Par injectivité de  $\varphi$  ceci implique que  $x = 0$ .

Donc  $Ker(\psi)$  et  $W$  sont en somme directe.

Montrons que  $Ker(\psi) \oplus W = V$

Soit  $x \in V$ . On a d'après la question précédente  $Im(\psi) \subseteq Ker(\xi^n)$ .

Or d'après la question 4),  $Ker(\xi^n) = Vect(X^{k-n})_{0 \leq k \leq n-1} = \varphi(W)$ . Donc  $\psi(x) \in \varphi(W)$ .

Il existe donc  $z \in W$  tel que  $\psi(x) = \varphi(z) = \psi(z)$ . Il en découle que  $x - z \in Ker(\psi)$ .

On a montrer donc que  $V \subseteq Ker(\psi) \oplus W$  ce qui conclue la question.

**9)** Existence.

On va montrer l'existence par récurrence sur la dimension de  $V$

Explicitons l'hypothèse de récurrence pour tout entier  $k \geq 1$  :

$H_k$  : "Pour tout espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $\leq k$ , si  $u$  est un endomorphisme nilpotent de  $V$  alors il existe une base  $B$  de  $V$ , un entier naturel  $s$  et des entiers naturels non nuls  $r_1 \geq \dots \geq r_s$  tel que  $\text{Mat}_B(u) = \text{diag}(J_{r_1}, \dots, J_{r_s})$ "

Pour  $k = 1$  rien à démontrer.

Soit  $k$  un entier  $\geq 1$ . Supposons  $H_k$ .

Soit  $V$  un ev de dimension  $k + 1$  et  $u$  endomorphisme de  $V$  nilpotent d'indice  $n$ .

Si  $\dim(V) = n$  alors pour  $s = 1$  et  $r_1 = n$  et  $B = (v_0, u(v_0), \dots, u^{n-1}(v_0))$  avec  $v_0 \in V$  tel que  $u^{n-1}(v_0) \neq 0$  on aura  $\text{Mat}_B(u) = J_n$ .

Si  $\dim(V) > n$  alors en posant  $\psi$  comme défini précédemment on a  $\text{Ker}(\psi)$  un sous espace vectoriel (non trivial) de  $V$  stable par  $u$  (on a bien  $u|_{\text{Ker}(\psi)}$  est nilpotent). On applique donc l'hypothèse de récurrence sur  $\text{Ker}(\psi)$  : Il existe une base  $B$  de  $\text{Ker}(\psi)$ , un entier naturel  $p$  et des entiers naturels non nuls  $r_1 \geq \dots \geq r_s$  tel que  $\text{Mat}_B(u|_{\text{Ker}(\psi)}) = \text{diag}(J_{r_1}, \dots, J_{r_s})$ .

Or  $V = \text{Ker}(\psi) \oplus W$ , donc en concaténant  $B$  et  $(v_0, u(v_0), \dots, u^{n-1}(v_0))$  (qui est une base de  $W$ ) on aura une base de  $V$  dans laquelle  $\text{Mat}_B(u) = \text{diag}(J_{r_1}, \dots, J_{r_s}, J_n)$ . En permutant les blocs de jordan de la matrice  $\text{Mat}_B(u)$  de sorte que leurs tailles soient décroissantes, et en posant  $s = p + 1$  on obtient le résultat. (changement de base). ce qui achève l'hérédité.

**10)** Supposons que  $\text{Mat}_B(u) = \text{diag}(J_{r_1}, \dots, J_{r_{s_1}})$  et  $\text{Mat}_{B'}(u) = \text{diag}(J_{r'_1}, \dots, J_{r'_{s_2}})$  sont deux écriture matricielle de  $u$  comme défini précédemment.

Puisque les deux matrices sont semblables alors ils ont le même rang.

$$\text{Donc : } \text{rang}(\text{Mat}_B(u)) = \text{rang}(\text{Mat}_{B'}(u)) \implies \sum_{k=1}^{s_1} (r_k - 1) = \sum_{k=1}^{s_2} (r'_k - 1).$$

Donc  $\dim(V) - s_1 = \dim(V) - s_2$ . D'où  $s_1 = s_2 = s$ .

D'après la question 2, on a pour tout entier non nul  $k$  :

$$\delta_k(\text{diag}(J_{r_1}, \dots, J_{r_{s_1}})) = \delta_k(\text{diag}(J_{r'_1}, \dots, J_{r'_{s_1}})), \text{ donc } \sum_{i=1}^s \delta_k(J_{r_i}) = \sum_{i=1}^s \delta_k(J_{r'_i}).$$

Ceci implique d'après 2)b) que le nombre de bloc de taille  $k$  dans les deux matrices est égale,

ceci pour tout  $k$  donc  $(r_1, \dots, r_s) = (r'_1, \dots, r'_s)$  (les éléments sont ordonnés)

**V. Version « graduée » du théorème de décomposition**

**11)a)**  $X^N - 1$  est un polynôme scindé à racine simple dans  $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$  annihilant  $h$ , donc  $h$  est diagonalisable.

**11)b** Soit  $x \in V_j$ , On a  $h(u(x)) = \zeta.u(h(x)) = \zeta.u(\zeta^j x) = \zeta^{j+1}u(x)$ . Donc  $u(x) \in V_{j+1}$ .

D'où  $u(V_j) \subseteq V_{j+1}$ .

**11)c** Soit  $k$  un entier relatif. Notons d'abord qu'un sous-espace propre de  $h$  est l'un des  $V_j$  (éventuellement on peut avoir des  $V_j = \{0\}$ ). donc puisque  $h$  est diagonalisable alors on a :

$$V = \bigoplus_{j=0}^{N-1} V_j$$

Donc il suffit de calculer  $h^k \circ u \circ h^{-k}$  sur chaque  $V_j$ .

Soit donc  $x \in V_j$ . On a  $h(x) = \zeta^j x$ .

- Si  $k \geq 0$ , alors  $h^k(x) = \zeta^{jk} x$  (par récurrence)
- Si  $k \leq -1$ , donc  $h^{-k}(x) = \zeta^{-jk} x$ , alors  $x = \zeta^{-jk} h^k(x)$  impliquant  $h^k(x) = \zeta^{jk} x$ .

Rappelons que  $u(x) \in V_{j+1}$ .

$$h^k \circ u \circ h^{-k}(x) = h^k \circ u(\zeta^{-jk} x) = \zeta^{-jk} h^k(u(x)) = \zeta^{-jk} \cdot \zeta^{-(j+1)k} u(x) = \zeta^k u(x)$$

Donc :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, h^k \circ u \circ h^{-k} = \zeta^k u$$

Soit  $l$  un entier naturel. On a :  $h \circ u^l \circ h^{-1} = (h \circ u \circ h^{-1})^l = (\zeta u)^l = \zeta^l u^l$

**12)a**  $p$  est le projecteur sur  $W$  parallèlement à  $W'$ . Or puisque  $u$  stabilise  $W$  et  $W'$ , la commutativité est évidente.

**12)b** On a pour tout  $k \in [[0, N - 1]]$  :

$$h^k \circ p \circ h^{-k}(V) \subseteq h^k \circ p(V) \subseteq h^k(W) \subseteq W. \text{ Donc } \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k}(V) \subseteq W.$$

D'où  $Im(\bar{p}) \subseteq W$ .

Soit  $w \in W$ .

$$\text{On a } \bar{p}(w) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k}(w) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^k(h^{-k}(w)) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w = w \text{ ( car } h^{-k}(w) \in W).$$

D'où  $\bar{p}(w) = w$

**12)c** On a bien que  $\bar{p}$  est une application linéaire sur  $V$ . Calculons  $\bar{p}^2$

$$\text{On a : } \bar{p}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k} \circ h^i \circ p \circ h^{-i} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k+i} \circ p \circ h^{-i}$$

$$\text{Donc } \bar{p}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} h^k \circ h^{-k+i} \circ p \circ h^{-i} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} h^i \circ p \circ h^{-i} = \frac{N}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} h^i \circ p \circ h^{-i} = \bar{p}$$

Donc  $\bar{p}$  est un projecteur. On a alors  $Im(\bar{p}) = Ker(\bar{p} - id_V)$

Or d'après 12)b) on a  $Im(\bar{p}) \subseteq W$  et  $W \subseteq Ker(\bar{p} - id_V)$ .

Donc on a  $Im(\bar{p}) \subseteq W \subseteq Ker(\bar{p} - id_V) = Im(\bar{p})$ . D'où  $Im(\bar{p}) = W$

**12)d** Soit  $k \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ .

On a :  $u \circ h^k \circ p \circ h^{-k} = \zeta^{-k} \circ h^k \circ u \circ p \circ h^{-k}$ . Or  $p$  et  $u$  commutent.

Donc  $u \circ h^k \circ p \circ h^{-k} = \zeta^{-k} \circ h^k \circ p \circ u \circ h^{-k} = \zeta^{-k} \zeta^k \circ h^k \circ p \circ h^{-k} \circ u$ .

Donc en appliquant la somme on a bien  $u \circ \bar{p} = \bar{p} \circ u$ .

Maintenant  $h \circ h^k \circ p \circ h^{-k} = h^{k+1} \circ p \circ h^{-(k+1)} \circ h$

Donc  $h \circ \bar{p} = \frac{1}{N} \left( \sum_{k=0}^{N-1} h^{k+1} \circ p \circ h^{-(k+1)} \right) \circ h = \frac{1}{N} \left( \sum_{k=1}^N h^k \circ p \circ h^{-k} \right) \circ h$

Ainsi  $h \circ \bar{p} = \frac{1}{N} \left( \cancel{h^0 \circ p \circ h^0} + \cancel{h^N \circ p \circ h^{-N}} + \sum_{k=0}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k} \right) \circ h = \bar{p} \circ h$

**12)e**  $\bar{p}$  commute avec  $u$  et  $h$ , alors  $Ker(\bar{p})$  est stable par  $u$  et  $h$ . Or puisque  $\bar{p}$  est un projecteur alors  $Ker(\bar{p})$  et  $Im(\bar{p}) = W$  sont supplémentaires.

**13)a** Supposons que pour tout vecteur propre  $v$  de  $h$  on a  $u^{n-1}(v) = 0$ . Alors  $u^{n-1}$  est nul sur chaque sous espace propre de  $h$  qui est diagonalisable. Donc  $u^{n-1} = 0$ . Ce qui est absurde. Donc un tel vecteur existe.

**13)b** On démontre le résultat voulu par récurrence sur la dimension.

Si  $V$  est de dimension 1, alors l'endomorphisme nilpotent  $u$  est nul (donc de matrice  $J_1$  dans toute base) et la matrice de  $h$  dans toute base est d'ordre 1, donc diagonale, son unique coefficient est  $\zeta^k$  avec  $k \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ . Cela initialise la récurrence.

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons le résultat vrai pour tout espace vectoriel  $V$  de dimension  $\leq k$  et tous endomorphismes  $u$  et  $h$  de  $V$  vérifiant les propriétés de cette partie.

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $k + 1$ , et soient  $u$  et  $h$  vérifiant les propriétés de cette partie. Soit  $n$  l'indice de nilpotence de  $u$ .

Soit  $v$ , un vecteur propre de  $h$ , tel que  $u^{n-1}(v) \neq 0$  (il en existe par la question précédente), et on pose

$$W = \text{Vect}((v, u(v), \dots, u^{n-1}(v))).$$

Par la question 8.(a), c'est un sous-espace stable par  $u$ , et la matrice de  $u_W$  dans la base  $(v, u(v), \dots, u^{n-1}(v))$  est  $J_n$ .

De plus, comme  $v$  est un vecteur propre de  $h$ , et que les valeurs propres de  $h$  sont de la forme  $\zeta^a$  avec  $a \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ , on a :

$$h(v) = \zeta^a v.$$

On en déduit, par la deuxième identité de la question :

$$\forall \ell \in [0, N - 1], \quad h(u^\ell(v)) = \zeta^\ell u^\ell(h(v)) = \zeta^\ell u^\ell(\zeta^a v) = \zeta^{a+\ell} u^\ell(v).$$

Donc  $W$  est stable par  $h$ , et la matrice de  $h_W$  relativement à la base  $(v, u(v), \dots, u^{n-1}(v))$  est :

$$\begin{pmatrix} \zeta^a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta^{a+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta^{a+n-1} \end{pmatrix} = D_{n,a}.$$

Si  $n = \dim(V)$ , alors le résultat est démontré pour  $u$  et  $h$ .

Sinon, on introduit un supplémentaire  $W'$  de  $W$  dans  $V$ , stable par  $u$  et  $h$ , dont l'existence a été établie dans la question 12. Il est non trivial, puisque c'est le cas de  $W$ , et la stabilité par  $u$  et  $h$  assure qu'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes  $u_{W'}$  et  $h_{W'}$  de  $W'$ , qui vérifient les mêmes propriétés que  $u$  et  $h$ . On en déduit l'existence d'une base  $B$  de  $W'$  telle que les matrices de  $u_{W'}$  et  $h_{W'}$  dans cette base soient respectivement  $\text{diag}(J_{r_1}, \dots, J_{r_s})$  et  $\text{diag}(D_{r_1, a_1}, \dots, D_{r_s, a_s})$  pour des  $r_i$  et  $a_i$  adéquats.

En concaténant  $(v, u(v), \dots, u^{n-1}(v))$  et  $B$ , on obtient une base de  $V$  dans laquelle les matrices de  $u$  et  $h$  sont respectivement :

$$\text{diag}(J_n, J_{r_1}, \dots, J_{r_s}) \quad \text{et} \quad \text{diag}(D_{n,a}, D_{r_1, a_1}, \dots, D_{r_s, a_s}).$$

Cela donne l'hérédité.

**14)a)** D'après 11)b), on a :

$$u^3(V_1) \subseteq u^2(V_2) \subseteq u(V_3) \subseteq V_4 = V_0 = \{0\}.$$

On en déduit que  $u^3|_{V_1}$  est nul, et de même pour  $V_2$  et  $V_3$ .

Comme  $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = V$  car  $h$  est diagonalisable, on en déduit que :  $u^3 = 0$ .

**14)b)** On a  $\zeta = e^{2i\pi/4} = i$ . Nous cherchons pour  $u$  et  $h$  des endomorphismes dont les matrices dans une base donnée sont  $\text{diag}(J_{r_1}, \dots, J_{r_s})$  et  $\text{diag}(D_{r_1, a_1}, \dots, D_{r_s, a_s})$  respectivement, avec les  $a_i \in \{1, 3\}$  (1 n'est pas valeur propre de  $h$ ). Le fait que  $u^3$  soit nul impose de prendre des blocs de taille au plus 3, puisque  $\max(r_1, \dots, r_s)$  est l'indice de nilpotence de  $u$ . Ainsi les types possibles sont dans  $\{1, 3\}^2$ . Or, tous les couples de  $\{1, 3\}^2$  ne se réalisent pas, à cause de l'inclusion :  $u(V_3) \subset V_4 = \{0\}$  : ceci impose que si  $i_3$  apparaît sur la diagonale de  $D_{r_i, a_i}$ , la colonne correspondante de  $J_{r_i}$  doit être nulle. Or, la seule colonne nulle de  $J_{r_i}$  est sa dernière, donc si  $i_3$  apparaît sur la diagonale de  $D_{r_i, a_i}$ , alors il doit être son dernier coefficient diagonal. Les couples réalisant ceci sont :

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1).$$

Réciproquement, tous ces types peuvent se réaliser. Il suffit en effet de prendre pour  $(u, h)$  les endomorphismes représentant canoniquement les matrices suivantes (on ne donne des exemples qu'en petite dimension ; mais en dimension quelconque, il suffit de prendre des matrices diagonales par blocs dont les blocs sont ceux ci-dessous) :

$$\left( (0), (i) \right), \left( (0), (i^2) \right), \left( (0), (i^3) \right), \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^3 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^3 \end{pmatrix} \right).$$

Ces couples vérifient bien les hypothèses  $h^4 = \text{id}_V$  et  $h \circ u \circ h^{-1} = iu$ .

**14)c)** (c) On remarque que pour les six types de la question précédente, les différentes dimensions se lisent matriciellement. En posant  $n(r, a)$  le nombre de couples de type  $(r, a)$  dans la réduction ci-avant, et ce pour tout  $(r, a)$ , on a les relations suivantes :

- La dimension de  $V_1$  est la somme des couples de type  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ , et  $(3, 1)$ , soit :

$$\dim(V_1) = n(1, 1) + n(2, 1) + n(3, 1).$$

- La dimension de  $V_2$  est la somme des couples de type  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$ , et  $(3, 1)$ , soit :

$$\dim(V_2) = n(1, 2) + n(2, 1) + n(2, 2) + n(3, 1).$$

- La dimension de  $V_3$  est la somme des couples de type  $(1, 3)$ ,  $(2, 2)$ , et  $(3, 1)$ , soit :

$$\dim(V_3) = n(1, 3) + n(2, 2) + n(3, 1).$$

-  $r_1$  est le nombre de couples de type  $(2, 1)$  et  $(3, 1)$ , soit :

$$r_1 = n(2, 1) + n(3, 1).$$

-  $r_2$  est le nombre de couples de type  $(2, 2)$  et  $(3, 1)$ , soit :

$$r_2 = n(2, 2) + n(3, 1).$$

-  $r_{2,1}$  est le nombre de couples de type  $(3, 1)$ , soit :

$$r_{2,1} = n(3, 1).$$

En résolvant ce système linéaire vérifié par les  $n(r, a)$ , on obtient après calculs :

$$\begin{aligned} n(1, 1) &= \dim(V_1) - r_1, \\ n(1, 2) &= \dim(V_2) - r_1 - r_2 + r_{2,1}, \\ n(1, 3) &= \dim(V_3) - r_2, \\ n(2, 1) &= r_1 - r_{2,1}, \\ n(2, 2) &= r_2 - r_{2,1}, \\ n(3, 1) &= r_{2,1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

## VI. Classification des couples de matrices rectangulaires

**15** On procède par implications circulaires.

-(i)  $\iff$  (ii):

Par définition de l'équivalence simultanée.

-(ii) implique (iii):

Supposons l'existence de  $P \in \text{GL}_m(\mathbb{C})$  et  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telles que  $A' = QAP^{-1}$  et  $B' = PBQ^{-1}$ . On a :

$$M_{A', B'} = \begin{pmatrix} 0_{m,n} & I_m \\ I_n & 0_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & 0_n \\ 0_m & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{m,n} & I_m \\ I_n & 0_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_m & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_m & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0_n \\ 0_m & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$M_{A',B'} = \begin{pmatrix} 0_{m,n} & I_m \\ I_n & 0_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_m & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n,m} & I_n \\ I_m & 0_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_m & B \\ A & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0_n \\ 0_m & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$M_{A',B'} = \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_m & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_m & B \\ A & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0_n \\ 0_m & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

Posons alors  $R = \begin{pmatrix} P & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & Q \end{pmatrix}$ , qui est bien carrée d'ordre  $m+n$  et inversible puisque son déterminant est  $\det(P)\det(Q) \neq 0$ . Les égalités ci-dessus démontrent que l'on a  $M_{A',B'} = RM_{A,B}R^{-1}$ .

De plus :

$$RHR^{-1} = \begin{pmatrix} P & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^{-1} & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & -QQ^{-1} \end{pmatrix} = H,$$

donc (ii) implique bien (iii).

-(iii) implique (i):

Il suffit de montrer que (iii) implique (ii)

Supposons qu'il existe  $R \in GL_{m+n}(\mathbb{C})$  telle que  $M_{A',B'} = RM_{A,B}R^{-1}$  et  $H = RHR^{-1}$ . L'implication précédente indique que  $R$  devrait être diagonale par blocs, ce que nous allons commencer par démontrer. Notons :

$$R = \begin{pmatrix} P & T \\ S & Q \end{pmatrix},$$

avec  $P \in M_m(\mathbb{C})$ ,  $Q \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $T \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  et  $S \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ . On a :

$$HR = RH, \quad \text{ce qu'on peut réécrire ainsi :} \quad \begin{pmatrix} P & T \\ -S & -Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -T \\ S & -Q \end{pmatrix},$$

d'où  $T = -T$ , et  $S = -S$ . Ceci implique la nullité des matrices  $T$  et  $S$ , donc :

$$R = \begin{pmatrix} P & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & Q \end{pmatrix}.$$

L'inversibilité de  $R$  implique celle de  $P$  et  $Q$ , puisque  $\det(P)\det(Q) = \det(R) \neq 0$ . On a en outre :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

L'égalité  $M_{A',B'} = RM_{A,B}R^{-1}$  équivaut alors, par identification des blocs, à :

$$A' = QAP^{-1}, \quad B' = PBQ^{-1}.$$

Cela démontre que (iii) implique (ii) et donc impliquant (i).

**16)a)** On a :  $H^2 = I_{m+n}$ , et  $HMH^{-1} = -M$ . En élevant la relation précédente à la puissance  $k$ , on en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad HM^k H^{-1} = (HMH^{-1})^k = (-M)^k.$$

Les applications linéaires  $P \mapsto HPH(M)H^{-1}$  et  $P \mapsto P(-M)$  coïncident sur  $\{X^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui engendrent  $\mathbb{C}[X]$ , donc elles sont égales :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad HPH(M)H^{-1} = P(-M).$$

**16)b)** Soit  $x \in \mathbb{C}^*$ . On a :

$$\begin{pmatrix} I_m & 0_{m,n} \\ 1/x & I_n \end{pmatrix} (xI_{m+n} - M) = \begin{pmatrix} I_m & 0_{m,n} \\ 1/x & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xI_m - B & 0_{n,m} \\ -A & xI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xI_m - B & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & xI_n - A \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\det(I_m) \det(I_n) \chi_M(x) = \det(xI_m) \det \left( xI_n - \frac{1}{x} AB \right) = x^m \cdot \frac{1}{x^n} \det(x^2 I_n - AB).$$

Autrement dit :

$$\chi_M(x) = x^{m-n} \chi_{AB}(x^2).$$

Quitte à multiplier par  $x^{n-m}$ , nous avons une égalité polynomiale valable en une infinité de nombres complexes, donc l'égalité est dans  $\mathbb{C}(X)$ . On a démontré :

$$X^{n-m} \chi_M = \chi_{AB}(X^2).$$

Comme le membre de droite est un polynôme pair, si  $\lambda$  est une racine d'ordre  $k$  de  $\chi_{AB}(X^2)$ , alors  $-\lambda$  l'est aussi. Il en est de même pour les racines de  $\chi_M$ , où il faut simplement traiter le cas  $\lambda = 0$  à part à cause du facteur  $X^{n-m}$ . Mais dans ce cas,  $\lambda = -\lambda$ , et il est donc trivial que  $\lambda$  et  $-\lambda$  sont racines de même ordre de multiplicité.

D'où le résultat, puisque les racines de  $\chi_M$  sont les valeurs propres de  $M$ .

**16)c)** Soit  $\chi_M(X) = X^r Q(X)$  où  $Q(0) \neq 0$ .

D'après le théorème de décomposition des noyaux, puisque  $X^r$  et  $Q(X)$  sont premiers entre eux (car  $Q(0) \neq 0$ ), on a :

$$\ker(\chi_M(M)) = \ker(M^r Q(M)) = \ker(M^r) \oplus \ker(Q(M)).$$

Or  $\chi_M(M) = 0$ , donc  $\ker(\chi_M(M)) = \mathbb{C}^{m+n}$ . Ainsi,  $\mathbb{C}^{m+n} = \ker(M^r) \oplus \ker(Q(M))$ .

Stabilité par  $H$  :

Soit  $v \in \ker(M^r)$ , donc  $M^r v = 0$ . On a  $H M^r H^{-1} = (-1)^r M^r$ , donc  $M^r H = (-1)^r H M^r$  et

$$M^r(Hv) = H((-1)^r M^r v) = (-1)^r H(0) = 0.$$

Ainsi  $Hv \in \ker(M^r)$  et  $\ker(M^r)$  est stable par  $H$ .

Soit  $v \in \ker(Q(M))$ , donc  $Q(M)v = 0$ . On a  $HQ(M)H^{-1} = Q(-M)$ . Donc

$$Q(-M)(Hv) = (HQ(M)H^{-1})(Hv) = HQ(M)v = H(0) = 0.$$

On sait que  $Q(X) = (-1)^{p+r} Q(-X)$ . Donc  $Q(M) = (-1)^{p+r} Q(-M)$  et

$$Q(M)(Hv) = (-1)^{p+r} Q(-M)(Hv) = (-1)^{p+r} 0 = 0.$$

Ainsi  $Hv \in \ker(Q(M))$  et  $\ker(Q(M))$  est stable par  $H$ .

17) Nous allons appliquer le théorème de décomposition graduée. Comme  $H^2 = I_n$ , et :

$$HMH^{-1} = -M = e^{\frac{2i\pi}{2}} M$$

avec  $M$  nilpotente, on peut appliquer ce théorème avec  $N = 2$ . Dans une même base convenable, les applications  $X \mapsto MX$  et  $X \mapsto HX$  ont respectivement pour matrices :

$$\text{diag}(J_{r_1}, \dots, J_{r_s}), \quad \text{et} \quad \text{diag}(D_{r_1, a_1}, \dots, D_{r_s, a_s}),$$

avec  $r_1, \dots, r_s$  et  $a_1, \dots, a_s \in \{0, 1\}$  des entiers convenables. Les coefficients diagonaux sont une alternance de  $-1$  et de  $1$  (commençant par  $-1$  si  $a_i = 1$ , et par  $1$  si  $a_i = 0$ ).

Pour obtenir la décomposition de l'énoncé, nous allons faire un changement de base qui regroupe les  $1$  et les  $-1$ . Pour alléger la rédaction, nous nous contenterons de réduire simultanément  $J_n$  et  $D_{n,1}$  avec  $n$  un entier naturel non nul : nous indiquerons brièvement comment traiter le cas de  $J_n$  et  $D_{n,0}$ , puis conviendrons que la réduction des matrices diagonales par blocs en découle immédiatement.

Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . Supposons d'abord que  $n$  est pair, de la forme  $n = 2r$  avec  $r$  un entier non nul. Considérons la famille :

$$F = (e_2, \dots, e_{2r}, e_1, \dots, e_{2r-1}).$$

C'est une base de  $\mathbb{C}^n$ , puisque nous n'avons fait que permuter les vecteurs de  $B$ . On a, par définition de  $D_{r,1}$  :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad D_{n,1}(e_{2i}) = 1, \quad D_{n,1}(e_{2i-1}) = -1.$$

Si l'on note  $P$  la matrice de passage de  $B$  dans  $F$  on aura :

$$D_{n,1} = P \begin{pmatrix} I_r & 0_r \\ 0_r & -I_r \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On a ici  $s = r$  (qui vérifie bien sûr  $|r - s| \leq 1$ ). De plus :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad J_n(e_{2i}) = \begin{cases} e_{2i+1} & \text{si } i < r, \\ 0 & \text{si } i = r, \end{cases} \quad J_n(e_{2i-1}) = e_{2i}.$$

La formule du changement de base donne donc :

$$J_n = P \begin{pmatrix} 0_r & B_0 \\ A_0 & 0_r \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec :

$$A_0 = J_r, \quad B_0 = I_r :$$

D'où le résultat pour  $J_n$  et  $D_{n,1}$  lorsque  $n$  est pair.

Supposons à présent que  $n$  est impair, de la forme  $n = 2r + 1$  avec  $r$  entier naturel. On considère cette fois-ci la base :

$$F = (e_2, \dots, e_{2r}, e_1, \dots, e_{2r+1}).$$

Le même calcul donne :

$$D_{n,1} = P \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,r+1} \\ 0_{r+1,r} & -I_{r+1} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

De plus :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad J_n(e_{2i}) = e_{2i+1}, \quad \forall i \in \{1, \dots, r+1\}, \quad J_n(e_{2i-1}) = \begin{cases} e_{2i} & \text{si } i < r+1, \\ 0 & \text{si } i = r+1. \end{cases}$$

La formule du changement de base donne donc :

$$J_n = P \begin{pmatrix} 0_r & B_0 \\ A_0 & 0_{r+1} \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{r+1,r}(\mathbb{C}), \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{r,r+1}(\mathbb{C}).$$

D'où le résultat en posant cette fois-ci  $s = r + 1$ .

On procède de la même manière  $D_{n,0}$

**18)a)** On a :

$$M_2 = \begin{pmatrix} BA & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & AB \end{pmatrix},$$

donc :

$$\det(AB) \det(BA) = \det(M_2) \neq 0.$$

On en déduit que les matrices  $AB$  et  $BA$  sont inversibles et donc de rang maximal,  $n$  dans le premier cas et  $m$  dans le second.

Or :

$$\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B)), \quad \text{rang}(BA) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B)).$$

Si par exemple  $n < m$ , alors  $A$  et  $B$  sont de rang au plus  $n$ , et donc la deuxième inégalité donne  $m \leq n$ , ce qui est absurde. C'est la première inégalité qui fournit une contradiction si  $m < n$ , d'où l'égalité  $m = n$ .

Donc  $A$  et  $B$  sont inversibles puisque :  $\det(A) \det(B) = \det(AB) \neq 0$ .

**18)b)** Cette question est laissée au lecteur