

MINES-I PSI-2002

PREMIERE PARTIE

I-1. Rayon de convergence

a) Exemples :

$$\square \text{ Pour } f_1(t) = \alpha, \text{ on a } u_n = \alpha^n \text{ donc } F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1 - \alpha x} \text{ de rayon } R = \frac{1}{|\alpha|}$$

$$\square \text{ Pour } f_2(t) = \alpha t, \text{ on a } u_n = \frac{\alpha^n}{n!} \text{ donc } F_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!} = \exp(\alpha x) \text{ de rayon } R = \infty$$

$$\square \text{ Pour } f_3(t) = pt - 1, \text{ on a } u_n = (p-1)\binom{p-1}{2} \dots \binom{p-1}{n} = C_{p-1}^n \text{ (nul si } p \leq n)$$

$$\text{donc } F_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p-1}{n} x^n = (1+x)^{p-1} \text{ de rayon } R = \infty$$

b) Si f s'annule en un point $\frac{1}{k}$, u_n est nul pour $n \geq k$ et F est un polynôme, donc $R = \infty$. Sinon, on peut

appliquer le critère de D'Alembert : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right|$ de limite $|f(0)|$, donc $R = \frac{1}{|f(0)|}$ ($= \infty$ si $f(0) = 0$).

(Cohérent avec les trois exemples du a))

1-2. Suite de terme général u_n

a) Il existe N tel que, pour $0 < x < \frac{1}{N}$, on ait $f(x) > 0$. Donc pour $n > N$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$. Donc les u_n ont même signe que u_{N+1} pour $n > N$.

b) Cas i : Si α est tel que $|f(0)| < \alpha < 1$, alors pour n assez grand, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \alpha$ et (u_n) tend vers 0.

Cas ii : Si α est tel que $|f(0)| > \alpha > 1$, alors pour n assez grand $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > \alpha$ et (u_n) tend vers ∞

I-3. Série de terme général u_n

$$w_n = \ln \frac{v_n}{v_{n-1}} = \ln \left(\frac{u_n}{u_{n-1}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\beta \right) = \ln f\left(\frac{1}{n}\right) + \beta \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{or } f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\Rightarrow w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ terme général d'une série absolument convergente.

$w_1 + \dots + w_n = \ln v_n$ tend vers $S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ donc v_n admet une limite $L = \exp(S)$ donc $u_n \sim Ln^\beta$.

I-4. Fonction F

a) La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ est absolument convergente si et seulement si il en est de même de $\sum_{n=0}^{\infty} n^\beta x^n$ est

absolument convergente. Les deux séries ont même rayon de convergence, et le critère de D'Alembert montre pour la deuxième que $R = 1$. F est définie en $x = 1$ si et seulement si $\beta < -1$. En

ce qui concerne le cas $x = -1$, il est nécessaire pour que $F(-1)$ existe que $\beta < 0$. Si $\beta < -1$, la série est absolument convergente et $F(-1)$ existe. Si $-1 \leq \beta < 0$, on applique le critère des séries alternées à $\sum_{n=0}^{\infty}$

$u_n (-1)^n$. u_n est positive, de limite nulle et décroissante puisque $\frac{u_n}{u_{n-1}} = f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) < 1$ pour n assez grand.

b) On a supposé précédemment que f était positive sur $[0,1]$ ce qui n'est pas nécessairement le cas de la fonction f de l'exemple. Passons...

$$u_n = (1 - \alpha)\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\dots\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) = (-1)^n \binom{\alpha-1}{n} \text{ donc } F = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} (-x)^n = (1-x)^{\alpha-1} \text{ de rayon } 1.$$

DEUXIEME PARTIE

II-1. Propriétés de la fonction g

a) En 0, $g(x) = \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} \sim \frac{\pi x - \tan(\pi x)}{\pi^2 x^2} = o(x)$

$$I_{\alpha} = \int_0^{\alpha} \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} (\ln(\sin(\pi\alpha)) - \ln(\sin(\pi\varepsilon)) - \ln(\alpha) + \ln(\varepsilon))$$

$$= \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

b) $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\alpha t) \exp(-int) dt = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - \exp(-i(n+\alpha)2\pi)}{n + \alpha} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - \exp(-i\alpha 2\pi)}{n + \alpha}$

La convergence est simple vers $h \in C^1$ par morceaux (Théorème de Dirichlet), sauf en 0 où la limite est la valeur moyenne de h à gauche et à droite de 0, soit $\frac{1 + \exp(-2\pi i\alpha)}{2}$.

Précisément, en 0, on a alors :

$$\frac{1 + \exp(-2\pi i\alpha)}{2} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - \exp(-i\alpha 2\pi)}{\alpha} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(1 - \exp(-i\alpha 2\pi))}{\alpha^2 - n^2}$$

En multipliant les deux membres par $\exp(\pi i\alpha)$, on obtient :

$$\cos(\pi\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

$$\Rightarrow g(\alpha) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

c) $I_{\alpha} = \int_0^{\alpha} g(t) dt = \int_0^{\alpha} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2} dt$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\alpha} \frac{2t}{t^2 - n^2} dt \text{ (interversion possible car la série est à termes négatifs).}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right) \Rightarrow \ln \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)$$

II-2. Convergence de la suite (u_n)

On cherche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$

TROISIEME PARTIE

III-1. Existence des fonctions G_n et G

G est la fonction Γ . Existence classique à montrer. $\varphi_n(t)$ tend vers $t^{x-1} e^{-t}$ en étant majorée par cette dernière. Le théorème de convergence dominée montre que $G_n(x)$ tend vers $G(x)$ quand n tend vers l'infini.

III-2. Une expression de $G_n(x)$

a) $J_n(x) = \frac{n}{x} J_{n-1}(x+1)$ en intégrant par parties

Par récurrence, $J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

b) $G_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ on pose $t = nu$

$$= n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} n^x$$

III-3. Relation des compléments

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} n^x$$

$$G(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-x} n!}{(1-x)(2-x)\dots(n+1-x)}$$

$$\Rightarrow G(x) G(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \frac{n^{1-x} n!}{(1-x)(2-x)\dots(n+1-x)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \frac{n!}{(1-x)(2-x)\dots(n-x)} \frac{n}{n+1-x}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(x+1)(x/2+1)\dots(x/n+1)} \frac{1}{(1-x)(1-x/2)\dots(1-x/n)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$