

Concours e3a PC 2012
Epreuve de Mathématiques B
Corrigé

Exercice 1

1. D'après le cours, le développement en série entière de l'exponentielle est

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Son rayon de convergence étant $+\infty$, son domaine de validité est $\mathbb{R}$.

2. 2.1 Par continuité sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto e^{-t}g(t)$ et par théorème fondamental de l'intégration,

$$x \mapsto \int_{\beta}^x g(t)e^{-t}dt \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et sa dérivée est } x \mapsto e^{-x}g(x).$$

Alors G est C^1 sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions C^1 et

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = e^x \int_{\beta}^x g(t)e^{-t}dt + e^x e^{-x}g(x) = G(x) + g(x)$$

Ainsi G est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle proposée.

2.2 $G(\beta) = e^{\beta} \int_{\beta}^{\beta} g(t)e^{-t}dt = 0.$

- 2.3 D'une part, l'équation homogène a pour solution : $y : x \in \mathbb{R} \mapsto c e^x$ où $c \in \mathbb{R}$.

D'autre part, on applique la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière : on la cherche sous la forme $y_p(x) = c(x)e^x$. En reportant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c'(x)e^x = g(x)$$

Choisissons la primitive de c qui s'annule en β , c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) = \int_{\beta}^x g(t)e^{-t}dt.$

Ainsi, une solution particulière de l'équation différentielle proposée est G et les solutions de $(\mathcal{E})$ sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = c e^x + G(x), \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

- 2.4 D'après le cours (on utilise en particulier la continuité de $x \mapsto 1$ et g) et les questions précédentes, le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(x) + g(x) \\ y(\beta) = 0 \end{cases}$$

a pour unique solution G

- 3 Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

On pose $z = y'$ et on se ramène à l'équation différentielle du premier ordre : $\lambda z' - (1 + \lambda)z = 0$ dont les solutions sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}, z(x) = a e^{\frac{1+\lambda}{\lambda}x}, a \in \mathbb{R}$$

Par intégration, on obtient ainsi :

Si $\lambda = -1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = a x + b, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Si $\lambda \neq -1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = a \frac{\lambda}{1+\lambda} e^{\frac{1+\lambda}{\lambda}x} + b = \tilde{a} e^{\frac{1+\lambda}{\lambda}x} + b, \quad (\tilde{a}, b) \in \mathbb{R}^2$$

4 f_0 est continue sur le segment I_a donc est bornée. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I_a, |f_0(x)| \leq M$$

Montrons par récurrence sur k : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I_a, |f_k(x)| \leq M \frac{|x|^k}{k!}$.

On a la relation vérifiée pour $k = 0$.

Supposons : $\forall x \in I_a, |f_k(x)| \leq M \frac{|x|^k}{k!}$ pour k fixé.

Alors $\forall x \in I_a$,

$$|f_{k+1}(x)| \leq \begin{cases} \int_0^x |f_k(t)| dt & \text{si } x \geq 0 \\ \int_x^0 |f_k(t)| dt & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Par la relation de récurrence, on arrive alors à

$$|f_{k+1}(x)| \leq \begin{cases} \frac{M}{k!} \int_0^x t^k dt & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{M(-1)^k}{k!} \int_x^0 t^k dt & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

C'est à dire encore

$$|f_{k+1}(x)| \leq \begin{cases} \frac{M}{k!} \frac{x^{k+1}}{k+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{M(-1)^{k+1}}{k!} \frac{x^{k+1}}{k+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

ce qui revient à :

$$\forall x \in I_a, |f_{k+1}(x)| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}$$

ce qui montre la relation vérifiée au rang $k+1$.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I_a, |f_k(x)| \leq M \frac{|x|^k}{k!}$

5 Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $a > 0$ tel que $x \in I_a$.

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n}{n!}$ converge (il s'agit d'une série exponentielle), alors par la relation de 4 et le critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

En conclusion, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Sa somme est notée F .

6 Il s'agit d'appliquer le théorème de dérivabilité des séries de fonctions. Nous allons l'appliquer pour la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur un intervalle du type I_a pour $a > 0$:

– f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ alors, par théorème fondamental de l'intégration $f_1 : x \mapsto \int_0^x f_0(t) dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur I_a et $f_1' = f_0$.

Par récurrence immédiate, du fait de la relation $\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$, on obtient que : $\forall n \geq 1, f_n$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur I_a et $f_n' = f_{n-1}$.

– $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ donc sur I_a .

– Montrons que $\sum_{n \geq 1} f_n' = \sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur I_a : Par la question 4, nous pouvons écrire :

$$\forall x \in I_a, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq M \frac{a^n}{n!}$$

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge (il s'agit d'une série exponentielle), alors on obtient la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n'$ sur I_a .

– Conclusion : Par théorème, $F = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est C^1 sur I_a , pour tout $a > 0$ donc sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$F' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

7 Par définition, pour tout $n \geq 1$, f_n est la primitive d'une fonction continue qui s'annule en 0, donc $F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = 0$.

8 On a vu que $F' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. On a alors $F' = f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f_0 + F$.

Ainsi, F est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & y'(x) - y(x) = f_0(x) \\ & y(0) = 0 \end{cases}$$

9 Il suffit d'appliquer la question 2.4 avec $\beta = 0$ et $g = f_0$.

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^x \int_0^x f_0(t) e^{-t} dt$$

10 Par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^x \int_0^x t^2 e^{-t} dt$$

On procède par deux intégrations par partie :

$$\begin{aligned} F(x) &= e^x \left(-x^2 e^{-x} + 2 \int_0^x t e^{-t} dt \right) \\ &= e^x \left(-x^2 e^{-x} + 2 \left(-x e^{-x} + [-e^{-t}]_0^x \right) \right) \\ &= 2e^x - x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

Remarque : on vérifie que $F(0) = 0$ comme indiquée à la question 7

11 11.1 Etant donné que, pour tout $n \geq 0$, f_{n+1} est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'_{n+1} = f_n$, on établit par récurrence, que f_{n+1} est C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et, on peut ainsi appliquer le formule de Taylor avec reste intégral, ce qui donne la relation demandée.

11.2 Par la formule de Taylor avec reste intégral, $\forall k \in \{0..n\}$, $a_k = \frac{f_{n+1}^{(k)}(0)}{k!}$.

Or, $(\star) \quad \forall p \geq 1, f_p(x) = \int_0^x f_{p-1}(t) dt \implies f_p(0) = 0$ et $f'_p = f_{p-1}$

Montrons par récurrence : $\forall n \geq 1, \forall p \in \{1, .., n\}, f_n^{(p)} = f_{n-p}$.

Vrai pour $n = 1$, d'après $(\star)$

Supposons vrai à un rang n :

Or, $f'_{n+1} = f_n$ donc $\forall p \in \{1, .., n\}, f_{n+1}^{(p)} = f_n^{(p)} = f_{n-p} = f_{n+1-(p+1)}$

C'est-à-dire : $\forall p \in \{2, .., n+1\}, f_{n+1}^{(p)} = f_{n+1-p}$ et comme $f'_{n+1} = f_n = f_{n+1-1}$, on obtient finalement

$$\forall p \in \{1, .., n+1\}, f_{n+1}^{(p)} = f_{n+1-p}$$

La relation de récurrence est ainsi vérifiée au rang $n+1$.

Alors, $\forall k \in \{0..n\}, f_{n+1}^{(k)}(0) = f_{n+1-k}(0) = 0$ car $n+1-k \geq 1$ et par $(\star)$, d'où, $a_k = 0$ et $f_{n+1}^{(n+1)} = f_0$.

D'où, la relation demandée.

11.3 Par la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f_k(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} f_{k+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} f_0(t) dt \\ &= \int_0^x f_0(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} dt\end{aligned}$$

On justifie l'échange somme et intégrale par linéarité de l'intégrale puisqu'il s'agit d'une somme finie.

11.4 Par définition de F ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f_0(t) dt$$

Posons : Pour $x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, x], S_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f_0(t)$.

Appliquons le théorème de convergence dominée :

– $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues convergente simplement sur $[0, x]$ vers

$$S : t \mapsto e^{x-t}$$

– S est continue sur $[0, x]$

– $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, x], |S_n(t)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x-t|^k}{k!} |f_0(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x-t|^k}{k!} |f_0(t)| = e^{|x-t|} |f_0(t)|$

Avec, $t \mapsto e^{|x-t|} |f_0(t)|$ positive, continue donc intégrable sur le segment $[0, x]$

– Alors, par théorème de convergence dominée, $F(x) = \int_0^x S(t) dt = e^x \int_0^x f_0(t) e^{-t} dt$

12 12.1 Par théorème fondamental de l'intégration, $x \mapsto \int_0^x f(t) e^{-t} dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ (on a utilisé l'hypothèse f continue sur $\mathbb{R}$), d'où par produit de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$, H l'est et donc appartient à E .

Ψ est linéaire car : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (f, g) \in E \times E, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda f + \mu g)(x) &= e^x \int_0^x (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-t} dt \\ &= e^x \lambda \int_0^x f(t) e^{-t} dt + \mu \int_0^x g(t) e^{-t} dt \\ &= \lambda \Psi(f)(x) + \mu \Psi(g)(x)\end{aligned}$$

Finalement, $\Psi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Psi(f) + \mu \Psi(g)$ i.e Ψ est linéaire.

12.2 Soit $f \in \text{Ker}(\Psi)$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) e^{-t} dt = 0$ et par dérivation, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) e^{-x} = 0$.

Puisque $\exp$ ne s'annule pas, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ i.e $f = 0$ et le noyau de Ψ est réduit à $\{0\}$ donc Ψ est injective.

12.3 On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ non nuls tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \lambda f(x)$, c'est-à-dire encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t) e^{-t} dt = \lambda e^{-x} f(x).$$

Par dérivation de cette relation, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) e^{-x} = \lambda(-e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x))$.

– 0 n'est pas valeur propre puisque Ψ est injective.

– Si λ est valeur propre alors tout vecteur propre est solution de l'équation différentielle

$$y' = \frac{(1+\lambda)}{\lambda} y.$$

Pour tout λ non nul, cette équation admet les solutions de la forme : $f : x \mapsto c e^{\frac{(1+\lambda)}{\lambda} x}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Mais $\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(f)(x) = ce^x \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}t} dt = c\lambda \left(e^{\frac{(1+\lambda)}{\lambda}x} - e^x \right)$.

Ainsi $\Psi(f) = \lambda f$ si et seulement si $c = 0$. Donc finalement λ n'est pas valeur propre.

Conclusion : le spectre de Ψ est vide.

Exercice 2

Question préliminaire $(1 + \alpha)(1 + \beta) = 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta \geq 1 + \alpha + \beta$ puisque $\alpha\beta \geq 0$.

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_1v_1$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2v_2 - u_1 \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2v_2 - u_1(-v_1) = 1 + u_2v_2 + u_1v_1$$

par développement par rapport à la première colonne

2. Développons Δ_n par rapport à sa dernière ligne :

$$\Delta_n = (-1)^{n+1+n}u_n \begin{vmatrix} & & 0 \\ & \Delta_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & -v_n \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}$$

Puis par développement par rapport à la dernière ligne,

$$\Delta_n = u_nv_n\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}$$

3. Montrons dans un premier temps par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \geq 0$.

La relation est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ puisque Δ_1 et Δ_2 sont des sommes de termes positifs.

Supposons la relation vraie au rang n et $n - 1$ où $n \geq 2$.

Alors, puisque $a_{n+1} \geq 0$, $\Delta_{n+1} = \Delta_n + a_{n+1}\Delta_{n-1} \geq 0$, montrant ainsi la relation vérifiée au rang $n + 1$.

Conclusion : $\forall n \geq 1, \Delta_n \geq 0$ et alors, $\forall n \geq 3, \Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n\Delta_{n-2} \geq 0$.

On a également $\Delta_2 - \Delta_1 = u_2v_2 \geq 0$ et on en conclut que $(\Delta_n)_n$ est croissante.

4. On a l'égalité pour $n = 1$ et $\Delta_2 = 1 + u_2v_2 + u_1v_1 \leq (1 + a_1)(1 + a_2)$ par la question préliminaire.

Supposons la relation vérifiée aux rangs n et $n - 1$.

Alors

$$\Delta_{n+1} \leq \prod_{k=1}^n (1+a_k) + a_{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} (1+a_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (1+a_k)(1+a_n+a_{n+1}) \leq \prod_{k=1}^{n-1} (1+a_k)(1+a_n)(1+a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} (1+a_k)$$

On a utilisé la question préliminaire.

Ceci termine la récurrence.

5. 5.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est clairement strictement positif. On peut donc considérer la suite $(\ln P_n)_n$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \ln P_n = S_n$.

La suite $(S_n)_n$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + a_n)$.

Or cette série est une série convergente car :

– elle est à termes positifs.

– $\ln(1 + a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$.

– $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge

– On conclut par critère d'équivalence.

Ainsi, $(S_n)_n$ converge donc $(\ln P_n)_n$ converge. Par continuité de exp et caractérisation séquentielle de la continuité, $(P_n)_n$ converge. On peut même préciser vers une limite strictement positive.

- 5.2 Etant convergente, la suite $(P_n)_n$ est majorée. L'inégalité du 4 nous montre ainsi que $(\Delta_n)_n$ est majorée. Etant croissante et majorée, elle converge alors.
6. 6.1 à vérifier par récurrence sur n .

6.2 Considérons la suite des sommes partielles $(T_n)_n$ de la série $\sum_{n \geq 2} t_n$:

$$\forall n \geq 2, T_n = \sum_{k=2}^n t_k = \Delta_n - \Delta_1, \text{ par télescopie .}$$

Par hypothèse, $(\Delta_n)_n$ converge donc il en est de même pour $(T_n)_n$, ce qui signifie que la série

$$\sum_{n \geq 2} t_n \text{ converge.}$$

6.3 $\forall n \geq 3, t_n = a_n \Delta_{n-2} \geq a_n \geq 0$ par 6.1.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, et puisque la série $\sum_{n \geq 2} t_n$ converge, on

obtient la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge

7. On a établi l'équivalence entre la convergence de la suite $(\Delta_n)_n$ et la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

Exercice 3

1. Les fonctions x et y sont 2π périodiques, il suffit donc d'un intervalle d'amplitude 2π pour tracer toute la courbe. On prend l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Ensuite, x est paire et y impaire, ainsi le point de paramètre $-t$ s'obtient à partir de celui de paramètre t par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. C'est pourquoi, il suffit d'étudier la courbe pour $t \in [0, \pi]$.
2. 2.1 $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ et $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$.
2.2 Les points singuliers sont les points de vecteur dérivée première nul.

Par dérivation, simplification, factorisation (en utilisant 2.1), on arrive à :

$$\begin{cases} x'(t) &= 2\sin(t)(1 + 2\cos(t)) \\ y'(t) &= 2(1 - \cos(t))(1 + 2\cos(t)) \end{cases}$$

On en déduit que le vecteur dérivé est nul sur $[0, \pi]$ ssi

$$\sin t = 0 \text{ et } \cos(t) = 1 \text{ ou } 1 + 2\cos(t) = 0$$

c'est à dire

$$t = 0 \text{ et } t = \frac{2\pi}{3}$$

3. Par un développement limité en 0 à l'ordre 3 de chacune des applications coordonnées, on peut écrire :

$$\begin{cases} x(t) &= 3t^2 + o(t^3) \\ y(t) &= t^3 + o(t^3) \end{cases}$$

C'est à dire encore :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{o}(t^3)$$

ce qui signifie que le vecteur tangent en $M(0) = O$ à la courbe est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ autrement dit le vecteur $\vec{i}$, ainsi la tangente en 0 a pour équation $y = 0$, et le premier vecteur dérivée d'ordre supérieur non colinéaire au vecteur tangent est le vecteur dérivée d'ordre 3 et dans ce repère local un point de la courbe a comme coordonnée $(3t^2, t^3)$, ce qui donne l'allure suivante au voisinage du point O :

4. Pour trouver un vecteur directeur de la tangente en $\mathcal{I} = M(\frac{2\pi}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, on détermine le premier vecteur dérivé non nul. On sait que celui d'ordre 1 est nul.

Puis

$$\begin{pmatrix} x''(\frac{2\pi}{3}) \\ y''(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Ce dernier est colinéaire à $\vec{u}_0$, donc ce dernier est bien un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{D}_1$ en $\mathcal{I}$.

Une équation de $\mathcal{T}$ s'obtient en écrivant : $M \in \mathcal{T} \iff \det(\vec{\mathcal{I}M}, \vec{u}_0) = 0$, c'est ainsi qu'on obtient l'équation : $\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0$.

5. 5.1 $\sqrt{3} \times 3 - 0 - 3\sqrt{3} = 0$ donc Ω appartient à $\mathcal{T}$.

5.2 Le cercle $\mathcal{C}_1$ a pour équation : $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

Un point $M(t)$ de la courbe est sur $\mathcal{C}_1$ ssi : $(2\cos(t) + \cos(2t))^2 + (2\sin(t) - \sin(2t))^2 = 9$, ce qui conduit à l'équation $\cos(3t) = 1$. Il suffit de prendre $t \in [0, \pi]$ puis de considérer les symétriques orthogonaux par rapport à $(O, \vec{i})$.

Or $\cos(3t) = 1$ avec $t \in [0, \pi]$ ssi $3t = 2k\pi$ où $k \in \{0, 1\}$. On retrouve les points O et $\mathcal{I}$.

Conclusion : $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_1 = \{O, \mathcal{I}, \mathcal{I}'\}$ où $\mathcal{I}'$ est le symétrique orthogonal de $\mathcal{I}$ par rapport à l'axe des abscisses.

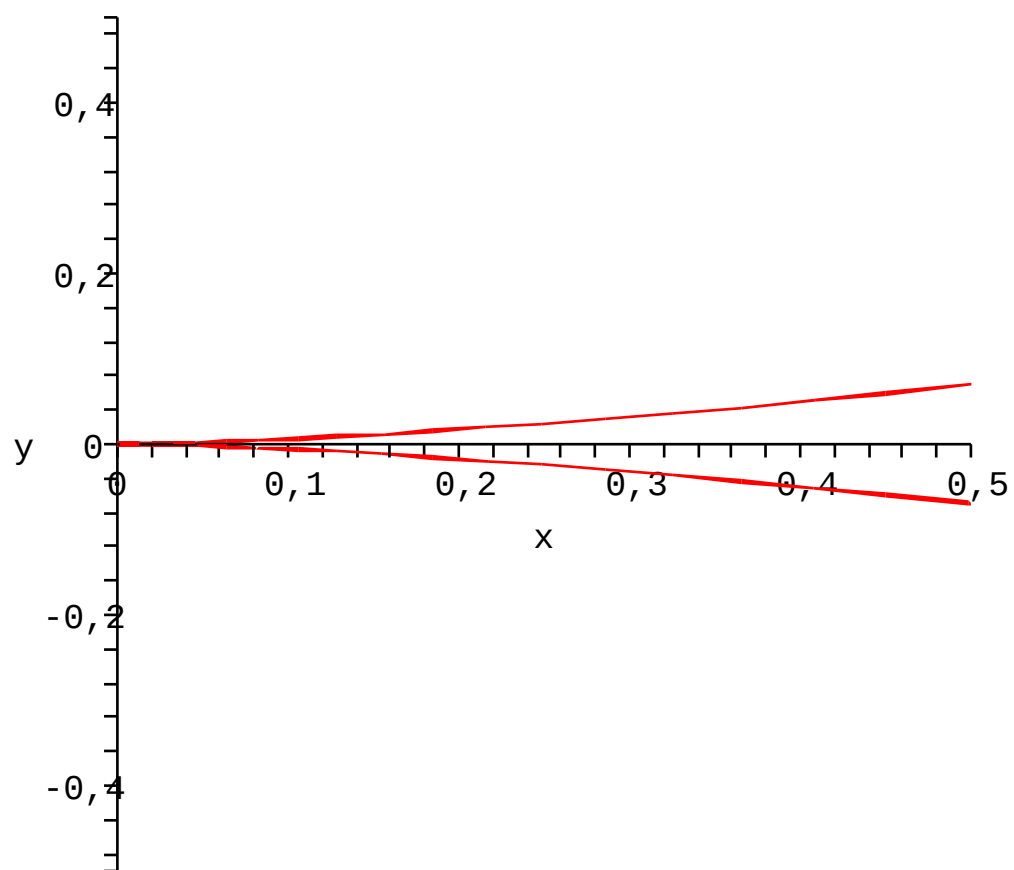


FIGURE 1 – Allure de la courbe au point stationnaire O

5.3 Un vecteur directeur de la tangente en J est $(x'(\frac{\pi}{3}), y'(\frac{\pi}{3})) = (2\sqrt{3}, 2)$.

Il reste à vérifier qu'il est orthogonal au vecteur $\vec{\Omega J}$.

Or $\vec{\Omega J} = (\frac{5}{2} - 3, \frac{\sqrt{3}}{2} - 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

On a bien que le produit scalaire entre ce vecteur et un vecteur directeur de la tangente est nul, ce qui signifie que $\mathcal{D}$ est tangente en J à $\mathcal{C}_2$.

6. Le tableau des variations est le suivant :

	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π		
x'	0	+	+	0	-	0
x	0 $\nearrow$ $\searrow$ 4 $\frac{9}{2}$					
y'	0	+	+	0	-	-4
y	0 $\nearrow$ $\searrow$ 0 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$					

D'où l'allure de la courbe $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$, où on trace aussi les deux cercles et la droite $\mathcal{T}$:

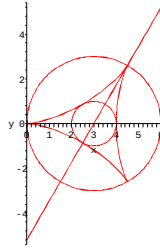


FIGURE 2 – Tracé de la courbe $\mathcal{D}$, des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et de la tangente $\mathcal{T}$ en I

7. Passons par la représentation complexe de la rotation r : L'image de tout point d'affixe z est le point d'affixe $z' = z_{\Omega} + e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_{\Omega})$.

$z_{\Omega} = 3$ et tout point de la courbe $\mathcal{D}$ a une affixe du type :

$$z(t) = (3 - 2\cos(t) - \cos(2t)) + i(2\sin(t) - \sin(2t))$$

Alors, son image par r est :

$$z'(t) = 3 + e^{i\frac{2\pi}{3}}((-2\cos(t) - \cos(2t)) + i(2\sin(t) - \sin(2t))) = 3 - e^{i\frac{2\pi}{3}}(2e^{-it} + e^{2it}) = z(t - \frac{2\pi}{3})$$

Donc l'image d'un point de la courbe appartient à la courbe, autrement dit $r(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.

Mais on peut écrire aussi, $z(t) = r(z(t + \frac{2\pi}{3}))$ c'est-à-dire $\mathcal{D} \subset r(\mathcal{D})$.

Conclusion, $\mathcal{D} = r(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}$ est invariante par cette rotation.

8. Par symétrie, la longueur de cette courbe est :

$$\begin{aligned}
 L &= 3 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
 &= 3 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{(2 \sin(t) + 2 \sin(2t))^2 + (2 \cos(t) - 2 \cos(2t))^2} dt \\
 &= 3 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{8 - 8 \cos(3t)} dt \\
 &= 6\sqrt{2} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{2 \sin^2(\frac{3t}{2})} dt \\
 &= 12 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} |\sin(\frac{3t}{2})| dt \\
 &= 12 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin(\frac{3t}{2}) dt \\
 &= 12 \left[-\frac{2}{3} \cos(\frac{3t}{2}) \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} dt \\
 &= 16 \text{ unités de longueur}
 \end{aligned}$$