E3A 2009 MP : maths B

Corrigé :

Exercice I :

1) Pour $x \neq 0$ et $n \geq 0$, on pose $u_n = \dfrac{\left|(-x)^n\right|}{3n+1}$; on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3n+1}{3n+4}|x|$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = |x|$.

Par la régle de d'Alembert, $\boxed{R = 1}$.

2) a) On a immédiatement : $\boxed{\int_0^1 t^{3n}dt = \dfrac{1}{3n+1}}$.

b) On fixe $x\in]-1, 1[$ et on pose alors : $\forall t\in [0, 1], f(t) = \dfrac{1}{1+xt^3}$. On a : $\forall t\in [0, 1], f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x)^n t^{3n}$.

Or : $\forall t\in [0, 1]$, $|(-x)^n t^{3n}| \leq |x|^n$ et $\sum |x|^n$ converge puisque $|x| < 1$.

Donc la série $\sum(-x)^n t^{3n}$ est normalement convergente sur le segment $[0, 1]$, donc uniformément convergente sur ce segment. Par théorème, la convergence uniforme implique la convergence en moyenne.

Donc : $\int_0^1\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x)^n t^{3n}\right)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\int_0^1 t^{3n}\, dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-x)^n}{3n+1}$ d'après le **a)**.

D'où : $\boxed{\forall x\in]-1, 1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-x)^n}{3n+1} = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+xt^3}}$.

On calcule ensuite l'intégrale. Si $x = 0$, on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-x)^n}{3n+1} = 1$.

Si $x \neq 0$, on pose $a = \sqrt[3]{x}$ et l'on décompose $\dfrac{1}{1+a^3t^3}$ en éléments simples.

Sachant que : $1 + a^3 t^3 = (1 + at)(1 - at + a^2 t^2)$, on obtient, après calculs :

$$\frac{1}{1+a^3t^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+at} + \frac{1}{3}\frac{(-at+2)}{1-at+a^2t^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+at} - \frac{1}{6a}\times\frac{(2a^2t-1)}{1-at+a^2t^2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{(at-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

D'où, en intégrant entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+xt^3} = \frac{1}{3a}\ln(1+a) - \frac{1}{6a}\ln(1-a+a^2) + \frac{\sqrt{3}}{3a}[\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2a-1)) + \frac{\pi}{6}].$$

Enfin, en remplaçant a par $\sqrt[3]{x}$, on obtient :

$$\boxed{\forall x\in]-1, 1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{3n+1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}[\ln(1+\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt[3]{x}+x^{\frac{2}{3}}) + \sqrt{3}\,(\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2a-1)) + \frac{\pi}{6})]}.$$

3) La série $\sum\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ est une série alternée. La suite $(\dfrac{1}{3n+1})$ est décroissante et converge vers 0, donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\boxed{\sum\dfrac{(-1)^n}{3n+1} \text{ est convergente}}$.

Plus généralement, si $x\in [0, 1]$, la série $\sum\dfrac{(-x)^n}{3n+1}$ est alternée et converge d'après le critère spécial des séries alternées. Donc le reste de cette série est majorée, en valeur absolue, par la valeur absolue de son premier terme.

E3A 2009 MP : maths B

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0, 1]$, $|R_n(x)| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{(-x)^p}{3p+1}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{3n+4} \leq \frac{1}{3n+4}$. Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{3n+4}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n+4} = 0$, $\lim_{n\to+\infty}\|R_n\|_\infty = 0$ par le théorème d'encadrement.

Le reste de la série converge uniformément vers 0 sur [0, 1], donc la série converge $\sum\frac{(-x)^n}{3n+1}$ uniformément sur [0, 1]. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x\longrightarrow\frac{(-x)^n}{3n+1}$ est continue sur [0, 1]. Par théorème, l'application $x\longrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{3n+1}$ est continue sur [0, 1]. En particulier, $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{3n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

D'autre part, l'application $x\longrightarrow\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}[\ln(1+\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt[3]{x}+x^{\frac{2}{3}}) + \sqrt{3}\ (\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2a-1)) + \frac{\pi}{6})]$ est continue sur]0, 1] par propriétés des fonctions usuelles.

Comme : $\forall x\in]0, 1]$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{3n+1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}[\ln(1+\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt[3]{x}+x^{\frac{2}{3}}) + \sqrt{3}\ (\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2a-1)) + \frac{\pi}{6})]$,

par passage à la limite quand x tend vers 1 par valeur inférieure, on obtient : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$.

Exercice II :

Première partie

1) On vérifie par récurrence, à l'aide du produit matriciel par blocs, que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $U^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ O & A^k \end{pmatrix}$.

Soit $R\in\mathbb{C}[X]$ avec $R(X) = \sum_{k=0}^{m}a_kX^k$; alors $R(U) = \sum_{k=0}^{m}a_kU^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m}a_kA^k & \sum_{k=0}^{m}a_kkA^k \\ O & \sum_{k=0}^{m}a_kA^k \end{pmatrix}$.

On en déduit donc que : $\boxed{R(U) = \begin{pmatrix} R(A) & AR'(A) \\ O & R(A) \end{pmatrix}}$.

2) Toujours grâce au produit matriciel par blocs : $\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ V^k = \begin{pmatrix} A^k & O \\ O & A^k \end{pmatrix}}$.

Comme dans la question précédente, on vérifie que : $\Pi(V) = \begin{pmatrix} \Pi(A) & O \\ O & \Pi(A) \end{pmatrix}$. Or, $\Pi(A) = O$. Donc $\boxed{\Pi(V) = O}$.

3) Comme : $\forall k\in\mathbb{N}$, $U^k = P^{-1}V^kP$, on en déduit que $\Pi(U) = P^{-1}\,\Pi(V)\,P = O$.

Or, d'après la question **1)**, $\Pi(U) = \begin{pmatrix} \Pi(A) & A\Pi'(A) \\ O & \Pi(A) \end{pmatrix}$. D'où $A\Pi'(A) = O$.

Donc $X\,\Pi'$ est un polynôme annulateur de A. Donc Π divise $X\,\Pi'$. Or, $\deg(\Pi) = \deg(X\,\Pi') = \alpha$.
Donc Π et $X\,\Pi'$ sont associés. Comme Π est unitaire, le coefficient dominant de $X\,\Pi'$ est égal à α donc $\boxed{X\,\Pi' = \alpha\,\Pi}$.

E3A 2009 MP : maths B

4) De l'égalité précédente, on déduit que : $\sum_{p=0}^{\alpha} p b_p \mathrm{X}^p = \sum_{p=0}^{\alpha} \alpha b_p \mathrm{X}^p$.

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on a : $\forall p \in [\![0, \alpha - 1]\!]$, $p\, b_p = \alpha\, b_p$, soit $\forall p \in [\![0, \alpha - 1]\!]$, $b_p = 0$.
Donc $\Pi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Comme $\Pi(\mathrm{A}) = \mathrm{O}$, on en déduit que : $\mathrm{A}^{\alpha} = \mathrm{O}$, donc $\boxed{\text{A est nilpotente}}$.

Deuxième partie

1) Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. On a : $f^n = \Theta$ et $f^{n-1} \neq \Theta$.
Donc il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
Posons $\mathcal{B} = (x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$. $\mathcal{B}$ est de cardinal n égal à la dimension de $\mathbb{C}^n$.
Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que : $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x) = 0$.

On note $j \in [\![0, n-1]\!]$ le plus petit indice tel que $\alpha_j \neq 0$ (s'il existe).
On a alors : $\sum_{k=j}^{n-1} \alpha_k f^k(x) = 0$. On applique f^{n-1-j} à cette égalité. On obtient : $\alpha_j f^{n-1}(x) = 0$, soit $\alpha_j = 0$

puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$. D'où une contradiction. Donc : $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_j = 0$. $\mathcal{B}$ est libre.
Par caractérisation, c'est une base de $\mathbb{C}^n$.
Dans cette base, la matrice de f est J. Donc $\boxed{\text{A est semblable à J}}$.

2) On note $\mathrm{D} = (d_{ij}) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. On a : $\mathrm{J} = (\alpha_{ij})$ avec : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\alpha_{ij} = 0$ si $i \neq j + 1$ et

$\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $\alpha_{j+1, j} = 1$. Alors $\mathrm{DJ} - \mathrm{JD} = (m_{ij})$ avec : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{ij} = 0$ si $i \neq j + 1$

et $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $m_{j+1, j} = d_{j+1, j+1} - d_{jj}$.

Donc $\mathrm{DJ} - \mathrm{JD} = \mathrm{J} \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $d_{j+1, j+1} - d_{jj} = 1 \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $d_{j+1, j+1} = d_{jj} + 1$.

Donc on peut choisir $\boxed{\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & 0 \\ 0 & \ldots & & & n-1 \end{pmatrix}}$.

3) Comma A est semblable à J, il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\mathrm{A} = \mathrm{P\,J\,P}^{-1}$.
D'où la relation DJ – JD= J implique : $\mathrm{P\,D\,P}^{-1}\,\mathrm{P\,J\,P}^{-1} - \mathrm{P\,J\,P}^{-1}\,\mathrm{P\,D\,P}^{-1} = \mathrm{P\,J\,P}^{-1}$, soit en posant
$\boxed{\mathrm{H} = \mathrm{P\,D\,P}^{-1} : \mathrm{HA} - \mathrm{AH} = \mathrm{A}}$.

4) A l'aide du produit matriciel par blocs, on obtient :
$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{H} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{O} & \mathrm{A} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{H} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A - HA} \\ \mathrm{O} & \mathrm{A} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{H} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A - HA + AH} \\ \mathrm{O} & \mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{A} \end{pmatrix}$$
puisque AH – HA = – A. D'où : $\boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{H} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{O} & \mathrm{A} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{H} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{A} \end{pmatrix}}$.

E3A 2009 MP : maths B

5) On a : $\begin{pmatrix} I_n & -H \\ O & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & H \\ O & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & H \\ O & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & -H \\ O & I_n \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} I_n & H \\ O & I_n \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et $\begin{pmatrix} I_n & H \\ O & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -H \\ O & I_n \end{pmatrix}$. D'après l'égalité de la question précédente, on en déduit que :

$\boxed{\text{les matrices } \begin{pmatrix} A & A \\ O & A \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \text{ sont semblables}}$.

Exercice III :

1) a) Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}\,(1, 1, 1)$ et un vecteur normal au plan (Q) est $\vec{m}\,(-1, 1, 0)$.
On a : $\vec{n}\,.\,\vec{m} = 0$. $\boxed{\text{Donc les plans (P) et (Q) sont orthogonaux}}$.

b) On prend $\boxed{\vec{I}\,\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ \vec{J}\,\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ et } \vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}, \text{ soit } \vec{K}\,\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}$.

c) D'après les formules de changement de bases, en notant P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, on a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y + \frac{\sqrt{6}}{6}Z \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y + \frac{\sqrt{6}}{6}Z \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}X - 2\times\frac{\sqrt{6}}{6}Z \end{cases}$ et on a aussi :

$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tP \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+y+z) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ Z = \frac{\sqrt{6}}{6}(x+y-2z) \end{cases}$.

Donc $(x + y + z)^2 = 3\,X^2$, $(-x + y)^2 = 2\,Y^2$ et $(2\,y + z)^2 = (\sqrt{3}\,X - \sqrt{2}\,Y)^2$.
$\boxed{\text{Une équation de } (\Sigma) \text{ dans le repère } \mathcal{R}' \text{ est donc : } 3\,\alpha^2 X^2 + 2\,\beta^2 Y^2 + \gamma^2(\sqrt{3}\,X - \sqrt{2}\,Y)^2 = 1}$.

d) $\boxed{\text{On en déduit que } (\Sigma) \text{ est un cylindre d'axe dirigé par le vecteur } \vec{K}}$.

2) $(\mathcal{E})$ a pour équation : $3\,\alpha^2 X^2 + 2\,\beta^2 Y^2 + \gamma^2(\sqrt{3}\,X - \sqrt{2}\,Y)^2 = 1$, soit
$3(\alpha^2 + \gamma^2)\,X^2 - 2\,\gamma^2\,\sqrt{6}\,XY + 2(\beta^2 + \gamma^2)\,Y^2 = 1$.
La matrice associée à la forme quadratique $q(X, Y) = 3(\alpha^2 + \gamma^2)\,X^2 - 2\,\gamma^2\,\sqrt{6}\,XY + 2(\beta^2 + \gamma^2)\,Y^2$
est : $M = \begin{pmatrix} 3(\alpha^2+\gamma^2) & -\sqrt{6}\gamma^2 \\ -\sqrt{6}\gamma^2 & 2(\beta^2+\gamma^2) \end{pmatrix}$.
Par le théorème spectral, on sait que M admet deux valeurs propres réelles, que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont orthogonaux et que M est diagonalisable dans une base orthonormale $(\vec{I}', \vec{J}')$ constituée de vecteurs propres.

E3A 2009 MP : maths B

Après calculs, on trouve comme valeurs propres : $a' = \frac{1}{2}(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 + \sqrt{\theta})$

et $b' = \frac{1}{2}(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 - \sqrt{\theta})$ où $\theta = 9\alpha^4 + 4\beta^4 + 25\gamma^4 - 12\alpha^2\beta^2 - 4\beta^2\gamma^2 + 6\alpha^2\gamma^2$.

Un vecteur propre associé à a' est $\vec{U}(\sqrt{6}\gamma^2, 3(\alpha^2 + \gamma^2) - a')$ et un vecteur propre associé à b' est $\vec{V}(\sqrt{6}\gamma^2, 3(\alpha^2 + \gamma^2) - b')$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$.

On pose : $\vec{I}' = \frac{1}{\|\vec{U}\|}\vec{U}$ et $\vec{J}' = \frac{1}{\|\vec{V}\|}\vec{V}$. On sait de plus que : $a' + b' = \mathrm{Tr}(M) = 3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 > 0$

et que $a'b' = \det(M) = 6(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) > 0$. Donc on a : $0 < b' < a'$.

Dans la repère orthonormal $(O, \vec{I}', \vec{J}')$, $(\mathcal{E})$ a pour équation réduite : $a'X'^2 + b'Y'^2 = 1$.

$\boxed{(\mathcal{E}) \text{ est donc une ellipse et } (\Sigma) \text{ un cylindre elliptique}}$.

On pose $\vec{K}' = \vec{K}$, $a = \frac{1}{\sqrt{a'}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{b'}}$. On a : $0 < a < b$ et l'équation de (Σ) dans le repère orthonormal $\mathcal{R}'' = (O, \vec{I}', \vec{J}', \vec{K}')$ est alors : $\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$.

3) a) On a :

$$(*)\quad \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}X'^2 - \frac{1}{b^2}Z'^2 = \left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b}\right)\left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right).$$

Soit $M \in (C_k)$; alors ses coordonnées (X', Y', Z') dans le repère $\mathcal{R}''$ vérifient :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1 \text{ et } \frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k.$$

Donc, en remplaçant dans (*), on obtient (**) : $1 - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = k\left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right)$, soit

$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + \frac{kb\sqrt{b^2 - a^2}}{a}X' + kbZ' = b^2$, soit $\boxed{\left(X' + \frac{kb\sqrt{b^2 - a^2}}{2a}\right)^2 + Y'^2 + \left(Z' + \frac{kb}{2}\right)^2 = \frac{b^2(k^2b^2 + 4a^2)}{4a^2}}$.

Donc M appartient aussi à la sphère (S_k) de centre Ω_k de coordonnées $\left(-\frac{kb\sqrt{b^2 - a^2}}{2a}, 0, -\frac{kb}{2}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}''$ et de rayon $R_k = \frac{b\sqrt{k^2b^2 + 4a^2}}{2a}$.

Réciproquement, si $M \in (S_k) \cap (P_k)$, on a la relation (**) et $\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k$, d'où :

$1 - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b}\right)\left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right) = \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)$, donc

$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$. Donc $M \in (\Sigma)$. D'où l'égalité : $\boxed{(C_k) = (P_k) \cap (\Sigma) = (P_k) \cap (S_k)}$.

b) En tant qu'intersection d'un plan et d'une sphère, (C_k) est soit vide, soit un point, soit un cercle.
C'est un cercle ssi la distance d de Ω_k au plan (P_k) est strictement inférieure à R_k.
Dans ce cas, d'après le théorème de Pythagore, le rayon de (C_k), noté r_k, est égal à : $\sqrt{R_k^2 - d^2}$.

On a : $R_k = \dfrac{b\sqrt{k^2b^2+4a^2}}{2a}$ et $d = d(\Omega_k, (P_k)) = \dfrac{\left|-\dfrac{k(b^2-a^2)}{2a^2}+\dfrac{k}{2}-k\right|}{\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}+\dfrac{1}{b^2}}} = \dfrac{kb^2}{2a}$.

D'où $R_k - d = \dfrac{b}{2a}\left(\sqrt{k^2b^2+4a^2}-kb\right) > 0$ car $a > 0$. $\boxed{\text{Donc } (C_k) \text{ est un cercle de rayon } r_k = b}$.

c) $\boxed{\text{Le rayon du cercle } (C_k) \text{ est égal à la demi-longueur du grand axe de l'ellipse } (\mathcal{E})}$.

On pouvait le prévoir puisque l'ellipse $(\mathcal{E})$ est l'image du cercle (C_k) par la projection orthogonale sur le plan d'équation $Z' = 0$.
Or, (C_k) est inclus dans le plan (P_k) dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{J'}$ aussi vecteur directeur du plan $Z' = 0$. Donc un diamètre de (C_k) dirigé selon $\vec{J'}$ a sa longueur inchangée par la projection orthogonale considérée.