Corrigé X - E.N.S. 2003 - (Maths - PSI)

François Jaboeuf - PSI* - Lycée Joffre-Montpellier

29 août 2003

0. PRELIMINAIRES

Rappel : On reconnaît dans la norme N de l'énoncé, la norme de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B et subordonnée à la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout scalaire non nul λ, $\frac{\|B\lambda x\|}{\|\lambda x\|} = \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$ et donc les deux ensembles $\left\{\frac{\|Bx\|}{\|x\|},\ x \in \mathbb{R}^n - \{0\},\ \|x\| \leq 1\right\}$ et $\left\{\frac{\|Bx\|}{\|x\|},\ x \in \mathbb{R}^n - \{0\}\right\}$ sont égaux et ont la même borne supérieure N(B). D'après le cours cette norme vérifie l'inégalité : $\forall (B,C) \in \mathcal{M}_n^2;\ \boxed{N(B\,C) \leq N(B)\,N(C)}$.
En effet pour tout x dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ *(même si* Cx *est nul) :* $\|B\,(C\,x)\| \leq N(B)\,\|C\,x\| \leq N(B)\,N(C)\,\|x\|$*, d'où le résultat en divisant par* $\|x\|$ *non nul : le majorant* $N(B)\,N(C)$ *des rapports* $\frac{\|B\,C\,x\|}{\|x\|}$ *majore par définition la borne supérieure* $N(B\,C)$ *.*
Ensuite par récurrence immédiate on en déduit :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall B \in \mathcal{M}_n,\ N(B^k) \leq N(B)^k}$$

Pour des questions de typographie nous noterons I_n la matrice identité et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n$.

Question N° 1

Le résultat rappellé ci-dessus prouve que la série indiquée est absolument convergente dans l'espace vectoriel réel de dimension finie $\mathcal{M}_n$ muni de la norme N (*car la norme de son terme général est majorée par le terme général* $\frac{N(B)^k}{k!}$ *de la série convergente* $e^{N(B)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N(B)^k}{k!}$). Elle est donc aussi convergente.

Question N° 2

Si B et C sont deux matrices de $\mathcal{M}_n$, qui commutent, on peut appliquer la formule du produit de Cauchy aux deux séries absolument convergentes définissant exp(B) et exp(C) et la formule du binôme :

$$\begin{aligned} exp(B)\,exp(C) &= \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{B^k}{k!}\,\frac{C^{m-k}}{(m-k)!}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k\,B^k\,C^{m-k}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(B+C)^m}{m!} \\ &= exp(B+C) \end{aligned}$$

Comme par construction $exp(0_n) = I_n$, le cas où $C = -B$ prouve que $exp(B)$ est inversible (donc dans $\mathcal{GL}_n$) et que $\boxed{exp(B)^{-1} = exp(-B)}$.

Question N° 3

La convergence simple de la série de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n$ et définissant ϕ est déja établie (au 1.) La convergence de la série des dérivées ($t \mapsto \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}B^k$) est normale sur tout segment ([a,b]) de $\mathbb{R}$ puisque :
$\underset{t\in[a,b]}{Sup}\left\{N(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}B^k)\right\} \leq \frac{Max(|a|,|b|)^{k-1}}{(k-1)!}N(B)^k$ qui est au facteur N(B) près le terme général de la série convergente définissant $exp(Max(|a|,|b|)N(B))$. Le théorème de dérivation termes à termes des séries peut donc s'appliquer : ϕ est C^1 sur tout segment de $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$ et on obtient l'égalité :

$$\boxed{\dot{\phi}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}B^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}B^{k+1} = B\,\phi(t) = \phi(t)\,B}$$

Question N° 4

Les deux dernières égalités proviennent de la distributivité du produit de B sur les sommes partielles de la série définissant exp(tB) et de la commutativité de B avec ces sommes partielles qui sont des polynômes en B. Les égalités obtenues passent ensuite à la limite puisque le produit par B est une opération linéaire donc continue (en dimension finie). Ainsi B et $\phi(t) = expt(tB)$ commutent.

I. EQUATION DE LAX

Question N° 1

1.(a) Le produit de deux matrices est une opération bilinéaire et la différence conserve la bilinéarité : ainsi le *crochet* est une opération bilinéaire sur $\mathcal{M}_n$. On a de plus clairement pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n$, $[A, A] = A^2 - A^2 = 0$, donc le *crochet* est une opération bilinéaire alternée.

1.(b) La trace est linéaire et vérifie pour toutes matrices A et B dont on peut faire le produit dans les deux sens (c'est le cas des matrices carrées) : trace(A B)=trace(B A), d'où immédiatement : $\boxed{trace([A, B]) = 0}$.

1.(c) Sachant que la transposition est linéaire et que pour toutes matrices carrées A et B : ${}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA$, on peut écrire : ${}^t[A, B] = {}^t(A\,B) - {}^t(B\,A) = {}^tB\,{}^tA - {}^tA\,{}^tB = [{}^tB, {}^tA] = -[{}^tA, {}^tB]$.
Dans le cas de deux matrices antisymétriques A et B on obtient alors : ${}^t[A, B] = -[-A, -B] = -[A, B]$ ce qui montre le caractère antisymétrique de [A, B].

1.(d) $\mathcal{T}_n$ est visiblement non vide et stable par combinaison linéaire : c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$. Il est stable par produit : en effet si A et B sont dans $\mathcal{T}_n$, soit $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ l'élément du produit AB situé à la i-ème ligne et j-ème colonne. Si $i < j$, il n'existe aucun k qui vérifie à la fois $k \leq i$ et $k \geq j$ donc il y a toujours un terme au moins qui est nul dans chaque produit de la somme ci-dessus, d'où $\boxed{c_{i,j} = 0}$. La matrice AB est bien dans $\mathcal{T}_n$. De même BA et finalement $[A, B]$ est aussi dans $\mathcal{T}_n$.
On peut aussi raisonner à l'aide du drapeau de $\mathbb{R}^n$ défini par les n s.e.v. $(E_i = Vect(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_{n-i+1}))_{1\leq i\leq n}$, où $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$: une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dans $\mathcal{T}_n$ si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé u laisse stable ce drapeau (c'est un résultat du cours adapté ici au cas des matrices triangulaires inférieures au lieu de "supérieures"). Un drapeau stable par deux endomorphismes l'est aussi par leur produit : d'où le résultat pour la matrice produit AB.)
En prévision de la question II.1.(b), montrons que si A est inversible et dans $\mathcal{T}_n$, alors A^{-1} est encore dans $\mathcal{T}_n$:
- On peut vérifier aisément que la comatrice de A est triangulaire supérieure car tout cofacteur d'un coefficient de A situé sous la diagonale égale au signe près un déterminant mineur triangulaire ayant au moins un 0 sur sa diagonale, donc est nul ; ainsi la matrice complémentaire $\tilde{A} = {}^tcom(A)$ de A est triangulaire inférieure et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ aussi.
- On peut aussi, avec les notations précédentes du drapeau, dire que si u, isomorphisme de $\mathbb{R}^n$, laisse stable le drapeau alors, pour tout i, $u(E_i) = E_i$ (puisque $u(E_i)$ est inclus dans E_i et de même dimension finie) et donc $u^{-1}(E_i) = E_i$: u^{-1} laisse stable ce même drapeau et A^{-1} est bien triangulaire inférieure.
- On peut enfin remarquer que, dans $\mathcal{M}_n$, l'application $M \mapsto M\,A$ est linéaire et induit un endomorphisme de $\mathcal{T}_n$ (par stabilité multiplicative) dont le noyau est réduit à $\{0\}$ puisque A est inversible : c'est donc un automorphisme de $\mathcal{T}_n$ et la matrice I_n ($I_n \in \mathcal{T}_n$) admet un unique antécédent dans $\mathcal{T}_n$ qui ne peut être que A^{-1}.

Question N° 2

2.(a) Les coefficients de la matrice complémentaire $\tilde{A} = {}^tcom(A)$ de A sont des polynômes en ceux de A (les cofacteurs de A sont au signe près des déterminants mineurs extraits de A) donc sont des fonctions C^1 de t sur I (rappelons qu'une matrice est une fonction de classe C^k sur I si et seulement si tous ses coefficients, qui sont aussi ses coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n$, sont de classe C^k sur I). Donc $\tilde{A}$ est également de classe C^k sur I et de même $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ puisque det(A) est toujours un polynôme en les coefficients de A qui ne s'annule pas sur I (puisque A est toujours inversible).
Nous n'utiliserons évidemment pas cette égalité pour calculer la dérivée de A^{-1}, mais maintenant que le caractère C^1 de A sur I est établi, nous pouvons dériver l'égalité : $A\,A^{-1} = I_n$, grâce au caractère bilinéaire du produit, nous avons : $\dot{A}\,A^{-1} + A\,\dot{\overline{A^{-1}}} = 0$, et en multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $\boxed{\dot{\overline{A^{-1}}} = -A^{-1}\,\dot{A}\,A^{-1}}$ (on reconnaît là une généralisation de la dérivée de l'inverse d'une fonction numérique).

2.(b) Compte-tenu du caractère bilinéaire du produit matriciel et du résultat précédent, l'application $t \mapsto A(t)^{-1}\, X\, A(t)$ est de classe C^1 sur I et sa dérivée s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(A^{-1}\, X\, A\right) &= \frac{d}{dt}\left(A^{-1}\right)\, X\, A + A^{-1}\, X\, \frac{d}{dt}\,(A) = -A^{-1}\, \dot{A}\, A^{-1}\, X\, A + A^{-1}\, X\, \dot{A} \\ &= A^{-1}\, X\, A\, A^{-1}\, \dot{A} - A^{-1}\, \dot{A}\, A^{-1}\, X\, A = \boxed{[A^{-1}\, X\, A,\; A^{-1}\, \dot{A}]}\end{aligned}$$

Question N° 3

L est dérivable sur I puisque solution de (1), et la trace est linéaire donc on sait que : $\frac{d}{dt}\,(Tr(L)) = Tr(\frac{d}{dt}\,(L))$ et donc compte-tenu de I.1.(b) : $\frac{d}{dt}\,(Tr(L)) = Tr([L, M]) = 0$. Ainsi la fonction $t \mapsto Tr(L(t))$ est constante sur l'intervalle I et vaut donc $\boxed{Tr(X)}$.

Question N° 4

4.(a) Il s'agit d'une question difficile d'autant plus que l'énoncé ne précise pas en fonction de quoi le résultat est attendu ! Nous donnerons deux démonstrations et deux formules, la deuxième étant valable même dans le cas où la matrice B n'est pas inversible.

4.(a).i En notant $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n, $\det(B)$ se développe selon la formule :
$\det(B) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{i,\sigma(i)}$. B étant C^1 sur I, ses coefficients le sont aussi et l'égalité précédente se dérive :
$\dot{det}(B) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{k=1}^{n} \dot{b}_{k,\sigma(k)} \prod_{i\neq k} b_{i,\sigma(i)}$. En prenant la valeur en 0, le produit $\prod_{i\neq k} b_{i,\sigma(i)}(0)$ est nul dès qu'il existe un indice $i \neq k$ tel que $\sigma(i) \neq i$(*en effet* $B(0) = I_n$ *donc* $b_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$, *le symbole de Kronecker*). Mais la seule permutation σ de l'ensemble $[1, n]$ qui laisse fixe les (n-1) points i différents de k est l'identité (le n-iéme point k est nécessairement fixe aussi !), d'où le résultat :

$$\dot{det}(B)(0) = \sum_{k=1}^{n} \dot{b}_{k,k}(0) \prod_{i\neq k} b_{i,i}(0) = \sum_{k=1}^{n} \dot{b}_{k,k}(0) = \boxed{Tr(\dot{B}(0))}$$

4.(a).ii Soit t_0 un élément de I et posons $C = B(t_0)^{-1}B$ de telle sorte que comme à la question précédente $C(t_0) = I_n$. Comme B, C est de classe C^1 sur I et en dérivant l'égalité : $\det(B) = \det(B(t_0))\det(C)$, on obtient au point t_0 compte-tenu du résulat précédent :

$$\begin{aligned}\dot{det}(B)(t_0) &= \det(B(t_0))\dot{det}(C)(t_0) = \det(B(t_0))Tr(\dot{C}(t_0)) \\ &= \det(B(t_0))Tr(B(t_0)^{-1}\dot{B}(t_0)) = \boxed{Tr(\det(B(t_0))B(t_0)^{-1}\dot{B}(t_0))}\end{aligned}$$

Ce résultat est donc valable pour tout t_0 de I puisque d'après l'énoncé toutes les matrices $(B(t); t \in I)$ sont inversibles. Toutefois avec les notations du I.2.(a) on peut aussi écrire : $\det(B)B^{-1} = \tilde{B} = {}^t com(B)$ d'où une nouvelle expression : $\boxed{\dot{det}(B) = Tr(\tilde{B}\,\dot{B}) = Tr({}^t com(B)\,\dot{B})}$.

Cette dernière égalité est en fait valable même si B n'est pas toujours inversible sur I grâce au principe de densité algébrique : Introduisons un paramètre λ variant dans $\mathbb{C}$; l'égalité précédente appliquée en un point t_0 de I à la matrice $B - \lambda I_n$ est assurée pour tous les λ non situés dans le spectre (fini !) de $B(t_0)$. Mais par construction il s'agit d'une égalité polynômiale en λ vérifiée pour une infinité de valeurs de λ donc pour tout λ, en particulier pour $\lambda = 0$ ce qui valide bien l'égalité voulue dans tous les cas.

Deuxième démonstration : Donnons maintenant une démonstration directe du résultat général $\dot{det}(B) = Tr(\tilde{B}\,\dot{B}) = Tr({}^t com(B)\,\dot{B})$. Rappelons que l'espace $\mathcal{M}_n$ a une structure d'espace vectoriel euclidien canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$ pour le produit scalaire défini par $< M, N >= Tr({}^t M\, N)$ et que sa base canonique est orthonormale ; enfin les coordonnées d'une matrice dans cette base sont ses coefficients. L'application det : $M \mapsto \det(M)$ est polynômiale en les coefficients de M donc de classe C^∞ sur $\mathcal{M}_n$ et la formule du développement suivant une colonne : $\det(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j}M_{k,j}$ (où $M_{k,j} = (-1)^{k+j}N_{k,j}$ désigne le cofacteur du coefficient $m_{k,j}$ et $N_{k,j}$ le déterminant mineur obtenu en supprimant le k-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice M) prouve que $\frac{\partial}{\partial m_{i,j}}\,(\det)\,(M) = M_{i,j}$ puisqu'aucun des $(M_{k,j})_{1\leq k\leq n}$ ne dépend du coefficient $m_{i,j}$. Ainsi la différentielle $d(\det)_M$ est la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$ définie par :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n,\; d(\det)_M(H) = \sum_{1\leq i,j\leq n} M_{i,j}h_{i,j} = Tr({}^t com(M)\, H) =< com(M), H >$$

Par définition même $\boxed{grad(\det)_M = com(M)}$. Finalement le théorème de composition des différentielles permet alors d'écrire : $\boxed{\dot{\det(B)} = d(\det)_B(\dot{B}) = Tr({}^t com(B)\,\dot{B})}$ ce qui n'est autre que la formule obtenue précédemment.

4.(b) D'après le résultat ci-dessus et compte-tenu de l'équation (1),

$$\dot{\det(L)} = Tr({}^t com(L)\,\dot{L}) = Tr({}^t com(L)\,[L, M]) = Tr({}^t com(L)\,L\,M) - Tr({}^t com(L)\,M\,L) = \boxed{0}$$

puisque L et ${}^t com(L)$ commutent ($L\,{}^t com(L) = {}^t com(L)\,L = \det(L) I_n$) et que

$$Tr(({}^t com(L)\,M)\,L) = Tr(L\,({}^t com(L)\,M)) = Tr({}^t com(L)\,L\,M\ (= \det(L) Tr(M)))$$

La condition de l'énoncé : $\det(L(t_0)) \neq 0$ est inutile en fait ici. La fonction $t \mapsto \det(L(t))$ ayant sa dérivée nulle sur l'intervalle I est donc constante sur I.

Notons maintenant $L_\lambda = L - \lambda I_n$ et $M_\lambda = M_\lambda(L_\lambda) = M(L_\lambda + \lambda I_n) = M(L)$, alors L_λ vérifie $\dot{L_\lambda} = \dot{L} = [L, M] = [L_\lambda + \lambda I_n, M] = [L_\lambda, M]$ puisque I_n commute avec M. Ainsi L_λ est solution de l'équation différentielle de Lax : $\boxed{\dot{L_\lambda} = [L_\lambda, M_\lambda]}$. On peut donc lui appliquer le résultat précédent : Pour tout λ fixé dans $\mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto \det(L(t) - \lambda I_n)$ est constante sur I.

4.(c) Toutes les matrices $(L(t); t \in I)$ ont d'après I.4.(b) le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres avec leurs multiplicités : Le spectre de L ne varie pas.

Question N° 5

Toutes les matrices $(L(t); t \in I)$ ont d'après ci-dessus les mêmes n valeurs propres distinctes donc sont diagonalisables et semblables à la même matrice diagonale, donc semblables entre elles.

5.(a) X = L(0) est donc semblable à toute matrice $(L(t); t \in I)$: ceci prouve, pour tout t dans I, l'existence d'une matrice inversible $A(t)$ telle que $\boxed{L(t) = A(t)^{-1}\,X\,A(t)}$. On peut, entre autres possibilités, multiplier $A(t)$ par tout nombre (dépendant éventuellement de t) non nul sans changer l'égalité ci-dessus; il n'y a pas d'unicité à espérer.

5.(b) D'après les calculs du I.2.(b), $\dot{L} = [A^{-1}\,X\,A, A^{-1}\,\dot{A}]$ donc L est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si A est solution de l'équation différentielle $\boxed{[A^{-1}\,X\,A, A^{-1}\,\dot{A}] = [A^{-1}\,X\,A, M]}$ (*Dans cette équation il faut à priori considérer M comme une matrice dépendant continûment de A, puisque M dépend continûment de $L = A^{-1}\,X\,A$ qui dépend continûment de A (les considérations du I.2.(a) montrant que les coefficients de A^{-1} et donc ceux de L sont des fractions rationnelles en les coefficients de A*).

5.(c) Considérons donc une solution L de (1) sur I : alors $M = M(L)$ est une fonction matricielle donnée, continue de la variable t sur I . Toute solution de (2) sur I, vérifie l'équation différentielle précédente à la double condition : $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1}\,X\,A = L}$ puisqu'alors (2) $\Leftrightarrow A^{-1}\,\dot{A} = M(L)$.

1. A est inversible (sur I) :
   Compte-tenu de I.4.(a), de l'équation (2) et de ${}^t com(A)\,A = \det(A)\,I_n$,

$$\begin{aligned} \dot{\det(A)} &= Tr({}^t com(A)\,\dot{A}) = Tr({}^t com(A)\,A\,M) \\ &= Tr(M)\,\det(A) \end{aligned}$$

   Ainsi la fonction $t \mapsto \det(A(t))$ est solution sur I de l'équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre ci-dessus dans laquelle la fonction $t \mapsto Tr(M(L(t)))$ est donnée et continue sur I. On sait qu'alors, pour tout t dans I : $\boxed{\det(A(t)) = \lambda e^{\int_0^t Tr(M(L(u)))\,du}}$ avec $\lambda = \det(A(0)) = 1$, ce qui prouve que $\det(A)$ ne s'annule pas sur I.

2. $A^{-1}\,X\,A = L$:
   D'après (2), A est de classe C^1 sur I et donc aussi A^{-1} d'après I.2.(a). Posons $L_1 = A\,L\,A^{-1}$, des calculs similaires à ceux du I.2.(b) mais en tenant compte du remplacement de A par A^{-1} et de la matrice constante X par la fonction L conduisent à : $\dot{L_1} = [A\,L\,A^{-1}, A\,\dot{A^{-1}}] + A\,\dot{L}\,A^{-1}$; il ne reste plus qu'à utiliser la formule de dérivée de A^{-1} du I.2.(a) et les équations (2) puis (1) :

$$\begin{aligned} \dot{L_1} &= [A\,L\,A^{-1}, -A\,A^{-1}\,\dot{A}\,A^{-1}] + A\,\dot{L}\,A^{-1} = [A\,L\,A^{-1}, -A\,M\,A^{-1}] + A\,\dot{L}\,A^{-1} \\ &= -A\,[L, M]\,A^{-1} + A\,\dot{L}\,A^{-1} = 0 \end{aligned}$$

   Ainsi la fonction matricielle L_1 est constante sur l'intervalle I et vaut donc, puisque $A(0) = I_n$, $L_1(0) = L(0) = X$ ce qui achève la démonstration : $\boxed{\forall t \in I,\ A^{-1}(t)\,X\,A(t) = L(t)}$.

Pour M=M(L) fonction matricielle de t, continue sur I, donnée, l'équation (2) apparait comme un système différentiel linéaire d'ordre n^2 en les coefficients de A (car $A \mapsto A\,M$ est linéaire). Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence (et même l'unicité pour une solution maximale sur I) d'une solution A vérifiant la condition initiale : $A(0) = I_n$.

Les raisonnements précédents montrent que toute solution L de (1) sur I peut s'écrire $\boxed{L = A^{-1}\,X\,A}$ où A est solution de (2) sur I avec $M = M(L) = M(A^{-1}\,X\,A)$.

Réciproquement , sans maintenant se donner L solution de (1), considérons l'équation (2) dans laquelle $M = M(A^{-1}\,X\,A)$ comme une équation autonome d'inconnue A (inversible sur I) ; pour toute solution A sur I, on peut poser $L = A^{-1}\,X\,A$ qui sera bien solution de (1) sur I d'après l'équivalence établie au 5.(b) (l'équation assure que A est de classe C^1 sur I et donc A^{-1} (cf.I.2.(a)) et L aussi . On obtiendra donc toutes les solutions L de (1) sur I en résolvant l'équation différentielle (2) sur I et en prenant $\boxed{L = A^{-1}\,X\,A}$.

Cas où X n'a pas toutes ses valeurs propres distinctes : On sait que deux matrices d'ordre n ($n \geq 2$) peuvent avoir le même polynôme caractéristique sans être semblables (penser par exemple à une matrice triangulaire nilpotente non nulle dont le polynôme caractéristique est X^n comme celui de la matrice nulle). Dans ces conditions l'existence de A inversible sur I telle que $L = A^{-1}\,X\,A$ n'est plus assurée à priori comme ci-dessus. **Toutefois le raisonnement du début du 5.(c) reste valable** : Si L est une solution donnée de (1) sur I, l'équation (2), où $M = M(L)$ est donc fixée, admet toujours une solution A sur I et on a toujours $L = A^{-1}\,X\,A$: finalement pour tout t de I, $L(t)$ et X sont bien semblables ! La méthode précédente de résolution de (1) en se ramenant à (2) est valable dans tous les cas.

Question N° 6

Lorsque M est constante, la résolution de (2) est immédiate compte-tenu des résultats des préliminaires. La fonction $t \mapsto exp(tM)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et solution maximale de (2) d'après 0.2 et 0.3 ; c'est donc l'unique solution maximale du problème de Cauchy associé à (2). Les raisonnements du I.5 prouvent alors que (1) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ $\boxed{L : t \mapsto exp(-tM)\,X\,exp(tM)}$.

II. DECOMPOSITION DE MATRICES

Question N° 1

1.(a) $\mathcal{A}_n$ est le sous-espace propre, associé à la valeur propre (-1), de la transposition donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$, tout comme $\mathcal{T}_n$ qui est visiblement non vide et stable par combinaison linéaire. On sait que, si $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{A}_n$ admet pour base la famille $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$ donc est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$; quant à $\mathcal{T}_n$ la famille $(E_{i,j})_{1\leq j\leq i\leq n}$ en est visiblement une base, il est donc de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. La somme de ces deux dimensions est bien $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n)$ et $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{T}_n = \{0_n\}$ puisque pour une matrice de cette intersection les coefficients diagonaux sont nuls car égaux à leurs opposés, ceux au dessus de la diagonale sont nuls et ceux situés au dessous sont les opposés des précédents. Finalement $\boxed{\mathcal{M}_n = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{T}_n}$.

1.(b) O_n n'est autre que le groupe orthogonal, sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{P}_n$ est inclus dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ puisque les matrices de $\mathcal{P}_n$ ont pour déterminant le produit de leurs coefficients diagonaux, tous strictement positifs ; il contient I_n et est stable pour la multiplication matricielle (cf. I.1.(d) pour la propriété "triangulaire inférieure" et dans un tel produit $C = A\,B$, les coefficients diagonaux se multiplient : ($\forall i \in [1,n],\ c_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i} > 0$ donc C est dans $\mathcal{P}_n$) ; il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{P}_n$ contient l'inverse de ses éléments : Les dernières démonstrations du I.1.(d) ont prouvé que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure A (inversible !) est toujours triangulaire inférieure et dans ce cas ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A puisque $A\,A^{-1} = I_n$, ils sont donc strictement positifs et $\boxed{A^{-1} \in \mathcal{P}_n}$. On a bien obtenu la caractérisation de la propriété " $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$".

1.(c) Par linéarité la transposition est continue sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n$ et commute avec toute somme finie et toute limite, donc avec un somme de série convergente : ${}^t exp(M) = exp({}^t M)$ et compte-tenu des résultats des préliminaires : $\boxed{\forall M \in \mathcal{A}_n,\ exp(M)\,{}^t exp(M) = exp(M - M) = exp(0_n) = I_n}$ ce qui prouve l'orthogonalité de $exp(M)$.

Le sous-espace vectoriel réel de dimension finie $\mathcal{T}_n$ est fermé dans $\mathcal{M}_n$ donc toute série de ses éléments convergente dans $\mathcal{M}_n$ converge en fait dans $\mathcal{T}_n$. Or si M est dans $\mathcal{T}_n$, le terme général ($\frac{M^k}{k!}$) de la série définissant $exp(M)$ est bien dans $\mathcal{T}_n$ d'après la stabilité multiplicative démontrée au I.1.(d), ce qui prouve donc que la somme de cette série : $exp(M)$ est bien dans $\mathcal{T}_n$. De plus par multiplicativité des coefficients diagonaux des matrices triangulaires, les coefficients diagonaux de $\sum_{k=0}^{p} \frac{M^k}{k!}$ sont $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{m_{i,i}^k}{k!}\right)_{1\leq i\leq n}$ et par passage à la limite quand ($p \to \infty$) : les coefficients diagonaux de $exp(M)$ sont

$(e^{m_{i,i}} > 0)_{1\leq i\leq n}$: finalement $\boxed{exp(M) \in \mathcal{P}_n}$.

1.(d) Par dérivation de l'égalité $(I_n = {}^tR\,R)$: et compte-tenu que la transposition (par linéarité) commute avec la dérivation et que l'on ait pour une matrice orthogonale ${}^tR = R^{-1}$ on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= {}^t\dot{R}\,R + {}^tR\,\dot{R} = {}^t({}^tR\,\dot{R}) + {}^tR\,\dot{R} \\ &= {}^t(R^{-1}\dot{R}) + R^{-1}\dot{R} \end{aligned}$$

Ainsi la matrice $R^{-1}\dot{R}$ est bien à valeur dans A_n.

Si T est à valeur dans P_n, d'après II.1.(b), il en est de même pour T^{-1} qui reste donc triangulaire inférieure de même que $\dot{T}$ dont les coefficients sont les dérivées des coefficients de T ; enfin par stabilité multiplicative de T_n : $\boxed{T^{-1}\,\dot{T} \in \mathcal{T}_n}$.

Question N° 2

2.(a) Notons $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique (orthonormale pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$) et $(b_1, \cdots, b_n)$ les vecteurs colonnes de B qui forment une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ puisque B est inversible ; B est alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$. Orthonormalisons par le procédé de Gram-Schmidt la base $(b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1)$ (*et non* $(b_1, \cdots, b_n)$ *qui conduirait à une matrice T triangulaire supérieure au lieu d'inférieure !*) en une base orthonormale $(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots, \varepsilon_1)$ et notons Tb la matrice de passage ainsi obtenue : elle est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs. Soit maintenant $\hat{T}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, on a clairement pour tous les couples d'indices $\{i, j\}$: $\hat{t}_{i,j} = tb_{n+1-i,n+1-j}$ ce qui assure (car $i < j \Leftrightarrow n+1-i > n+1-j$) que $\hat{T}$ est triangulaire inférieure et à coefficients diagonaux strictement positifs, donc dans P_n. Il ne reste plus qu'à poser R la matrice de passage de la base canonique orthonormale $\mathcal{B}_1$ à la base orthonormale $\mathcal{B}_3$: R est donc orthogonale. La formule de composition des matrices de changement de bases donne ici : $P_{1,3} = P_{1,2}\,P_{2,3}$ soit $R = B\,\hat{T}$ ou encore, en posant $T = \hat{T}^{-1}$ qui reste dans le sous-groupe P_n : $\boxed{B = R\,T}$.

2.(b) Les matrices de O_n et de P_n étant inversibles, l'égalité $R\,T = R_1\,T_1$ où R et R_1 sont dans O_n et T et T_1 dans P_n, équivaut à $R^{-1}R_1 = T\,T_1^{-1}$. Il suffit donc de prouver que l'intersection des deux sous groupes O_n et P_n est réduite à $\{I_n\}$ pour obtenir l'unicité de la décomposition. Soit donc U une matrice à la fois orthogonale et dans P_n : on sait d'après II.1.(b) que ${}^tU = U^{-1}$ reste dans P_n ce qui prouve que U et sa transposée sont toutes les deux triangulaires inférieures, donc U est diagonale et comme alors $U\,{}^tU = U^2 = I_n$, tous les coefficients diagonaux de U valent ± 1, mais comme ils sont positifs $(U \in P_n)$, ils valent tous 1 : $\boxed{O_n \cap P_n = \{I_n\}}$ et il y a bien unicité de la décomposition du 2.(a).

2.(c) Tout revient à montrer que R est de classe C^1 sur I puisqu'alors R^{-1} aussi (car $R^{-1} = {}^tR$ ou cf.I.2.(a)) et donc $T = R^{-1}B$ également. Or R est C^1 sur I si et seulement si ses coefficients le sont, ou encore si et seulement si ses vecteurs colonnes le sont. On a vu au 2.(a) que ces vecteurs colonnes ne sont autres que les vecteurs $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ obtenus à partir du procédé de Gram-Schmidt. Les formules de récurrence adaptées ici à la numérotation inversée des vecteurs s'écrivent :

$$\varepsilon_n = \frac{b_n}{\|b_n\|};\ \text{et}\ \forall i \in [1, n-1],\ \varepsilon_{n-i} = \frac{b_{n-i} - \sum_{k=1}^{i} < \varepsilon_{n-k+1}, b_{n-i} > \varepsilon_{n-k+1}}{\|\overline{\phantom{b_{n-i} - \sum_{k=1}^{i} < \varepsilon_{n-k+1}, b_{n-i} > \varepsilon_{n-k+1}}}\|}$$

Sachant que les vecteurs $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ sont de classe C^1 sur I (car B l'est), que le produit scalaire (et donc la norme euclidienne, là où elle ne s'annule pas, aussi) conserve la classe C^1 ainsi que les opérations élémentaires (combinaison linéaire, produit par une fonction scalaire, quotient), ces formules de récurrence prouvent (par récurrence !) que les vecteurs $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et donc R sont de classe C^1 sur I.

Question N° 3

3.(a) En posant $M = \pi_1(L)$, fonction continue et même linéaire de L, on retrouve l'équation (1) de la partie I. Les raisonnements du I.5.(c) ont montré que les solutions A inversibles de (2)' : $\boxed{\dot{A} = A\,\pi_1(A^{-1}X\,A)}$ avec la condition initiale $A(0) = I_n$ garantissent que $L = A^{-1}X\,A$ est solution de (1) et que réciproquement toute solution de (1) est de cette forme.

3.(b) Puisque exp(tX) est toujours inversible, $A(t) = \Pi_1(exp(tX))$ et $T(t) = \Pi_2(exp(tX))$ existent bien et sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ d'après II.2.(c).

Dérivons l'égalité $exp(tX) = A(t)\,T(t)$: $X\exp(tX) = X\,A(t)\,T(t) = \dot{A}(t)\,T(t) + A(t)\,\dot{T}(t)$; puis en multipliant à gauche par $A^{-1}(t)$ et à droite par $T^{-1}(t)$:

$$A^{-1}(t)X\,A(t) = A^{-1}(t)\,\dot{A}(t) + \dot{T}(t)\,T^{-1}(t)$$

Or d'après II.1.(d), A étant à valeurs dans O_n et T dans $\mathcal{P}_n$, $A^{-1}(t)\,\dot{A}(t)$ est dans A_n et $T^{-1}(t)\dot{T}(t)$ mais aussi, par le même raisonnement du II.1.(d), $\dot{T}(t)\,T^{-1}(t)$ sont dans $\mathcal{T}_n$. L'égalité ci-dessus est donc la décomposition unique de la matrice

$A^{-1}(t)X\,A(t)$ dans la somme directe $\mathcal{M}_n = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{T}_n$. Ainsi par définition $\boxed{\pi_1(A^{-1}(t)X\,A(t)) = A^{-1}(t)\,\dot{A}(t)}$ ce qui équivaut à dire que A est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (2)'. De plus $A(0) = \Pi_1(I_n) = I_n$ puisque I_n est dans les deux sous-groupes O_n et $\mathcal{P}_n$ et que l'on a l'unique décomposition du II.2.(b) : $I_n = I_n\, I_n$.

Unicité : Les coeffcients de A^{-1} sont des fractions rationnelles en les coefficients de A (cf I.2.(a)) ce qui prouve que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathcal{GL}_n$ de $\mathcal{M}_n$, de même que $A \mapsto A^{-1}X\,A$; comme π_1 est linéaire, elle est encore de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n$ et par composition et produit : $A \mapsto A\,\pi_1(A^{-1}X\,A)$ l'est également sur $\mathcal{GL}_n$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz [1] appliqué à l'équation différentielle (2)' avec la condition initiale $A(0) = I_n$ assure dans ces conditions l'unicité (et l'existence) d'une solution maximale A qui ne peut donc être que la solution sur $\mathbb{R}$ déterminée ci-dessus. De même l'équation autonome $\dot{L} = f(L) = [L, \pi_1(L)]$ admet, sur $\mathbb{R}$, une unique solution maximale [2] :

$$\boxed{t \mapsto L(t) = (\Pi_1(exp(tX)))^{-1}X\,\Pi_1(exp(tX)) = {}^t(\Pi_1(exp(tX)))X\,\Pi_1(exp(tX))}$$

III. RESEAU DE TODA

Question N° 1

On reconnait un système différentiel autonome d'ordre $2n$, de la forme $\dot{\widehat{(q,p)}} = f(q,p)$, où f est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^{2n}$ sur lui-même. Le théorème de Cauchy-Lipschitz [1] assure donc l'existence d'une solution sur un intervalle I, non réduit à un point et contenant 0, donc contenant $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et vérifiant la condition initiale donnée dans l'énoncé.

Question N° 2

H est dérivable sur I, car p et q le sont et $\frac{d}{dt}(H(q,p)) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{p_i} + 2\sum_{i=1}^{n-1}(\dot{q_i} - \dot{q_{i+1}})e^{2(q_i-q_{i+1})}$; en tenant compte du système (*), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(H(q,p)) &= 2p_n e^{2(q_{n-1}-q_n)} - 2p_1 e^{2(q_1-q_2)} + 2\sum_{i=2}^{n-1} p_i\left(e^{2(q_{i-1}-q_i)} - e^{2(q_i-q_{i+1})}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1}(p_i - p_{i+1})e^{2(q_i-q_{i+1})} \\
&= 2p_n e^{2(q_{n-1}-q_n)} - 2p_1 e^{2(q_1-q_2)} + 2\sum_{i=1}^{n-2} p_{i+1}e^{2(q_i-q_{i+1})} - 2\sum_{i=2}^{n-1} p_i e^{2(q_i-q_{i+1})} + 2\sum_{i=1}^{n-1}(p_i - p_{i+1})e^{2(q_i-q_{i+1})} \\
&= 2\sum_{i=1}^{n-1} p_{i+1}e^{2(q_i-q_{i+1})} - 2\sum_{i=1}^{n-1} p_i e^{2(q_i-q_{i+1})} + 2\sum_{i=1}^{n-1}(p_i - p_{i+1})e^{2(q_i-q_{i+1})} \\
&= -2\sum_{i=1}^{n-1}(p_i - p_{i+1})e^{2(q_i-q_{i+1})} + 2\sum_{i=1}^{n-1}(p_i - p_{i+1})e^{2(q_i-q_{i+1})} = \boxed{0}
\end{aligned}$$

La fonction H(q,p) est donc constante sur l'intervalle I : c'est bien une intégrale première du mouvement.

Question N° 3

De même que ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(P) &= \sum_{i=1}^{n}\dot{p_i} = 2e^{2(q_{n-1}-q_n)} - 2e^{2(q_1-q_2)} + 2\sum_{i=2}^{n-1} e^{2(q_{i-1}-q_i)} - 2\sum_{i=2}^{n-1} e^{2(q_i-q_{i+1})} \\
&= 2\left(\sum_{i=2}^{n} e^{2(q_{i-1}-q_i)} - \sum_{i=1}^{n-1} e^{2(q_i-q_{i+1})}\right) = \boxed{0}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la fonction P(q,p) est constante sur I.

[1] ce théorème est hors-programme en dimension ≥ 2, ce qui est le cas ici

[2] on peut regretter la formulation vague de l'énoncé de cette question : on y parle de **"la solution"** (visiblement de (3) pour (a), mais sans doute de (2)' pour (b)- sans que cela ne soit précisé) et sans précision sur son intervalle de définition ou son caractère maximal : il n'y a plus d'unicité à espérer alors !

Question N° 4

compte-tenu des résultats précédents et de $\frac{d}{dt}\left(Q(q(t),p(t))\right) = P(q(t),p(t))$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(Q(q(t),p(t)) - tP(q(t),p(t))\right) &= \frac{d}{dt}\left(Q(q(t),p(t))\right) - t\frac{d}{dt}\left(P(q(t),p(t))\right) - P(q(t),p(t)) \\ &= P(q(t),p(t)) - P(q(t),p(t)) = \boxed{0}\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto Q(q(t),p(t)) - tP(q(t),p(t))$ est donc constante sur l'intervalle I et vaut $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \overline{q_i}}$.

Si l'on note m la valeur constante de P(q,p) et que l'on remplace q par $(q_i - mt)_{1\leq i\leq n}$ et p par $(p_i - m)_{1\leq i\leq n}$, il est alors clair que le système (*) reste inchangé, les q_i n'intervenant que par leurs dérivées ou par leur différence deux à deux, les $\dot{p_i}$ étant eux inchangés. On se ramène alors au cas où $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$ et à la question suivante !

Question N° 5

On voit immédiatement que M est antisymétrique ($M \in \mathcal{A}_n$) et que L-M est triangulaire inférieure ($L - M \in \mathcal{T}_n$) et donc par définition : $\boxed{M = \pi_1(L)}$. Il reste donc à vérifier que L est solution de l'équation (3) : $\dot{L} = [L, \pi_1(L)]$ avec la condition initiale $L(0) = X$. Or

$$\dot{l_{i,j}} = \begin{cases} \dot{p_i} = -2e^{2(q_1-q_2)} & \text{Si } i = j \\ (\dot{q_i} - \dot{q_{i+1}})e^{q_i-q_{i+1}} = (p_i - p_{i+1})e^{q_i-q_{i+1}} & \text{Si } j = i+1 \\ (\dot{q_j} - \dot{q_{j+1}})e^{q_j-q_{j+1}} = (p_j - p_{j+1})e^{q_j-q_{j+1}} & \text{Si } i = j+1 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Notons $(\alpha_{i,j})$ les coefficients de la matrice $[L, M]$ et remarquons tout d'abord que L et $\dot{L}$ sont des matrices symétriques tandis que M est antisymétrique et donc (cf les calculs du I.1.(c)) $[L, M]$ est symétrique ; il suffit donc de vérifier l'égalité des coefficients de ces deux matices situés sur ou au dessus de la diagonale.
De plus tous les coefficients $l_{i,j}$ de la matrice L tels que $|j-i| > 1$ sont nuls de même que, pour $|j-i| \neq 1$, $m_{i,j}$.

Par définition du "crochet" , pour tout couple d'indices (i,j) :

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}(l_{i,k}m_{k,j} - m_{i,k}l_{k,j}) = \sum_{\substack{k;|k-i|\leq 1\\ |k-j|=1}} l_{i,k}m_{k,j} - \sum_{\substack{k;|k-j|\leq 1\\ |k-i|=1}} m_{i,k}l_{k,j}$$

On en déduit immédiatement :

1. <u>Cas où $|j-i| > 2$: $\alpha_{i,j} = 0$</u>
   En effet, par inégalité triangulaire : $|j-i| \leq |k-i| + |k-j| \leq 2$ pour tous les indices k restant dans l'une ou l'autre des deux sommes précédentes.
2. <u>Cas où $j = i+2$: $\alpha_{i,j} = 0$</u>
   En effet le seul indice k restant dans chaque somme est $(k = i+1)$, d'où :
   $\alpha_{i,i+2} = l_{i,i+1}m_{i+1,i+2} - m_{i,i+1}l_{i+1,i+2} = e^{q_i-q_{i+1}}e^{q_{i+1}-q_{i+2}} - e^{q_i-q_{i+1}}e^{q_{i+1}-q_{i+2}} = \boxed{0}$.
3. <u>Cas où $j = i+1$: $\alpha_{i,i+1} = \dot{l_{i,i+1}}$:</u>
   Les seuls indices k restant sont $(k = i)$ dans la première somme et $(k = i+1)$ pour la deuxième :
   $\alpha_{i,i+1} = l_{i,i}m_{i,i+1} - m_{i,i+1}l_{i+1,i+1} = p_i e^{q_i-q_{i+1}} - p_{i+1}e^{q_i-q_{i+1}} = (p_i - p_{i+1})e^{q_i-q_{i+1}} = \boxed{\dot{l_{i,i+1}}}$.
4. <u>Cas où $j = i$: $\alpha_{i,i} = \dot{l_{i,i}}$:</u>
   Les seuls indices k restant dans les deux sommes sont, s'ils sont compris entre 1 et n : $(k = i+1)$ et $(k = i-1)$ d'où les trois cas :
   (a) <u>Cas où $i = 1$:</u> $\alpha_{1,1} = l_{1,2}m_{2,1} - m_{1,2}l_{2,1} = 2l_{1,2}m_{2,1} = -2e^{2(q_1-q_2)} = \dot{p_1} = \dot{l_{1,1}}$.
   (b) <u>Cas où $i = n$:</u> $\alpha_{n,n} = l_{n,n-1}m_{n-1,n} - m_{n,n-1}l_{n-1,n} = 2l_{n,n-1}m_{n-1,n} = 2e^{2(q_{n-1}-q_n)} = \dot{p_n} = \dot{l_{n,n}}$.
   (c) <u>Cas où $2 \leq i \leq (n-1)$:</u> $\alpha_{i,i} = l_{i,i-1}m_{i-1,i} - m_{i,i-1}l_{i-1,i} + l_{i,i+1}m_{i+1,i} - m_{i,i+1}l_{i+1,i} = 2(l_{i,i-1}m_{i-1,i} + l_{i,i+1}m_{i+1,i}) = 2(e^{2(q_{i-1}-q_i)} - e^{2(q_i-q_{i+1})}) = \dot{p_i} = \dot{l_{i,i}}$.

L'équation (3) est donc bien vérifiée par L, et les résultats du II.3. montrent que la solution maximale unique sur $\mathbb{R}$, n'est autre que

$$\boxed{t \mapsto L(t) = {}^t(\Pi_1(exp(tX)))X\,\Pi_1(exp(tX))}$$

dans laquelle X est la matrice L(0), obtenue en prenant $\overline{q}$ et $\overline{p}$ à la place de q et p.

Réciproquement : Soit L la solution de (3) vérifiant la condition initiale L(0)=X, où l'on impose $Tr(X) = \sum_{i=1}^{n} \overline{p_i} = 0$. D'où, puisque L est semblable à X, $Tr(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 0$. Dans la discussion précédente, les deux premiers cas sont toujours vérifiés mais le troisième équivaut à la condition : $(\forall i \in [1, n-1],\ p_i - p_{i+1} = \dot{q_i} - \dot{q_{i+1}})$, soit $(\forall i \in [1, n-1],\ \dot{q_{i+1}} - p_{i+1} = \dot{q_i} - p_i)$; c'est encore équivalent à l'existence d'une fonction r, indépendante de i, telle que $(\forall i \in [1, n],\ \dot{q_i} = p_i + r = p_i + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \dot{q_i}$ puisque $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$. Enfin le quatrième cas (celui des coefficients diagonaux de $\dot{L}$) équivaut aux n dernières équations du système (*) du III. On obtiendra donc bien la solution sur $\mathbb{R}$, de (*) vérifiant $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$ à partir de la matrice L solution sur $\mathbb{R}$ de (3) en imposant les deux conditions :

$$\boxed{Tr(X) = \sum_{i=1}^{n} \overline{p_i} = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} q_i = Cte = \sum_{i=1}^{n} \overline{q_i}}$$

A partir d'une telle solution L on obtient alors la solution (q,p) de (*) sur $\mathbb{R}$:
$\forall i \in [1, n]$, $\boxed{p_i = l_{i,i}}$ et pour $i \neq n$, $q_i - q_{i+1} = \ln(l_{i,i+1})$, d'où $q_i = q_n + \sum_{k=i}^{n-1} \ln(l_{k,k+1})$ et donc $\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{1 \le i \le k \le (n-1)} \ln(l_{k,k+1}) + nq_n = \sum_{1 \le k \le (n-1)} k \ln(l_{k,k+1}) + nq_n$ et en retranchant l'égalité $\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{q_i} = \sum_{1 \le k \le (n-1)} k \ln(l_{k,k+1}(0)) + n\overline{q_n}$ on obtient :
$q_n = \overline{q_n} - \frac{1}{n}\left(\sum_{1 \le k \le (n-1)} k \ln(\frac{l_{k,k+1}}{l_{k,k+1}(0)})\right)$ et finalement :

$$\boxed{q_i = \begin{cases} \sum_{k=i}^{n-1} \ln(l_{k,k+1}) - \frac{1}{n}\left(\sum_{1 \le k \le (n-1)} k \ln(\frac{l_{k,k+1}}{l_{k,k+1}(0)})\right) + \overline{q_n} & \text{Si } 1 \le i \le n-1 \\ \overline{q_n} - \frac{1}{n}\left(\sum_{1 \le k \le (n-1)} k \ln(\frac{l_{k,k+1}}{l_{k,k+1}(0)})\right) & \text{Si } i = n \end{cases}}$$

Interprétation des intégrales premières (questions III.2 et 3) : on a déja vu que $\boxed{P(q,p) = Tr(L) = Tr(X)}$ puisque L et X sont semblables et $2H(q,p) =< L, L >= Tr({}^tL\,L) = Tr({}^t(\Pi_1(exp(tX)))\,{}^tX\,X\,\Pi_1(exp(tX)))$ puisque $\Pi_1(exp(tX))$ est orthogonale d'où $\boxed{2H(q,p) =< X, X >= Tr({}^tX\,X)}$.

Question N° 6

Dans ce cas, $X = \begin{pmatrix} 0 & e^{2x} \\ e^{2x} & 0 \end{pmatrix} = e^{2x}J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $J^2 = I_n$. Ainsi pour tout entier k, $J^{2k} = I_n$ et $J^{2k+1} = J$, ce qui permet de calculer aisément pour tout réel t :

$$exp(tX) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(te^{2x})^{2k}}{(2k)!}\right) I_n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(te^{2x})^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) J = ch(te^{2x})I_n + sh(te^{2x})J$$

soit $\boxed{exp(tX) = \begin{pmatrix} ch(te^{2x}) & sh(te^{2x}) \\ sh(te^{2x}) & ch(te^{2x}) \end{pmatrix}}$. Notons, pour simplifier les calculs qui vont suivre, $\alpha = te^{2x}$.
On sait d'après ce qui précède que la solution L de (3) est donnée par $t \mapsto L(t) = {}^t(\Pi_1(exp(tX)))X\,\Pi_1(exp(tX))$ et que $A(t) = \Pi_1(exp(tX)))$ s'obtient par la méthode développée au II.2.(a), en orthonormalisant par la méthode de Gram-Schmidt la base $(b_2 = (sh(\alpha), ch(\alpha)); b_1 = (ch(\alpha), sh(\alpha)))$. Compte-tenu des identités :
$ch(2\alpha) = ch^2(\alpha) + sh^2(\alpha) = 1 + 2sh^2(\alpha) = 2ch^2(\alpha) - 1$ et $sh(2\alpha) = 2sh(\alpha)ch(\alpha)$, on obtient :
$\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{ch(2\alpha)}}(sh(\alpha), ch(\alpha)$ et $\varepsilon_1 = \frac{b_1 - <\varepsilon_2, b_1>\varepsilon_2}{\|\quad\|} = \frac{1}{\sqrt{ch(2\alpha)}}(ch(\alpha), -sh(\alpha))$. La matrice A(t) est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et la matrice triangulaire inférieure $T(t)^{-1}$ est la matrice de passage de (b_1, b_2) à $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$; d'où :

$$\boxed{A(t) = \Pi_1(exp(tX)) = \frac{1}{\sqrt{ch(2\alpha)}} \begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ -sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix}}$$

On a aussi $T(t) = \frac{1}{\sqrt{ch(2\alpha)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ sh(2\alpha) & ch(2\alpha) \end{pmatrix}$; ce qui permet de vérifier que l'on a bien la décomposition caractérisant $A(t) = \Pi_1(exp(tX))$ et $T(t) = \Pi_2(exp(tX))$: $\exp(tX) = A(t)T(t)$, avec $A(t) \in O_n$ et $T(t) \in \mathcal{T}_n$.

Finalement $L(t) = {}^tA(t)\,X\,A(t) = \frac{e^{2x}}{ch(2\alpha)} \begin{pmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ -sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix}$, soit

$$\boxed{L(t) = \frac{e^{2x}}{ch(2te^{2x})} \begin{pmatrix} -sh(2te^{2x}) & 1 \\ 1 & sh(2te^{2x}) \end{pmatrix}}$$

et la solution sur $\mathbb{R}$ de (*) vérifiant la condition initiale $(q_1(0) = -q_2(0) = x, p_1(0) = p_2(0) = 0)$ n'est autre que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ q_1(t) = -q_2(t) = x - \frac{1}{2}\ln(ch(2te^{2x})),\ p_1(t) = -p_2(t) = -e^{2x}\tanh(2te^{2x})}$$

On vérifie d'ailleurs aisément que les fonctions ci-dessus sont solutions de (*) et la méthode développée dans cet énoncé permet de résoudre, dans ce cas, le système (*) et l'équation différentielle autonome du second ordre : $\ddot{q}_1 = -2e^{4q_1}$ *qui s'y ramène immédiatement.*

****