1) On a : $\dfrac{[p(n+1)]^r}{[p(n+1)]!}\dfrac{[pn]!}{[pn)]^r} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^r \dfrac{1}{(pn+1)...(pn+(p-1))(pn+p)}$ quantité qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$, par D'Alembert le rayon de la série entière $\sum \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^n$ donnée est $+\infty$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, donc $z^p \in \mathbb{C}$, alors la série $\sum \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}(z^p)^n$ converge d'après ce qui précède, donc la série $\sum \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^{pn}$ converge, donc le rayon de la série entière $\sum \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^{pn}$ est aussi $+\infty$.

A. Équivalence entre $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ lorsque $r > 0$

2) φ_x est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall\, t \in]1,+\infty[$, $\varphi'_x(t) = t^{-r}(t-1)^{r-1}[t-1+r]$.
• On a $\varphi'_x \geq 0$ sur $]1,+\infty[$, donc φ_x qui est continue est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, négative en 1 et de limite $+\infty$ en $+\infty$, donc s'annule en un unique élément de $[1,+\infty[$.
• On a $\dfrac{u_n(x)}{u_{n+1}(x)} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^r \dfrac{n+1}{x} = (n+1)^{1-r}n^r\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}\varphi_x(n+1)+1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, si $1 \leq n \leq [t_x] \leq t_x$, alors $\varphi_x(n) \leq 0$, donc $\dfrac{u_{n-1}(x)}{u_n(x)} \leq 1$, la suite $(u_n(x))_{1\leq n\leq [t_x]}$ est donc croissante puisque les $u_n(x)$ sont strictement positives pour $n \neq 0$, et $0 = u_0(x) \leq u_1(x)$, donc la suite $(u_n(x))_{0\leq n\leq [t_x]}$ est croissante.
Si $n > [t_x]$, alors $n \geq t_x$, donc $\varphi_x(n) \geq 0$, donc $\dfrac{u_{n-1}(x)}{u_n(x)} \geq 1$, donc la suite $(u_n(x))_{n\geq [t_x]}$ est décroissante.

3) On a :

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x+\alpha) &= \left(\frac{x+\alpha-1}{x+\alpha}\right)^r.(x+\alpha)-(x+\alpha)+\alpha \\
&= (x+\alpha)\left[(1-\frac{1}{x+\alpha})^r-1\right]+\alpha \\
&= -r+\alpha+\underset{x\to+\infty}{o}(1)
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_x(x+\alpha) = \alpha - r$.
Pour $\varepsilon > 0$, $\exists A > 0$, $x \geq A \Longrightarrow |\varphi_x(x+\alpha)-(\alpha-r)| \leq \varepsilon$

Soit $x \geq A$ fixé on prend $\alpha = t_x - x$, alors $|\varphi_x(t_x) - (t_x - x - r)| \leq \varepsilon$, donc $|t_x - x - r| \leq \varepsilon$ ce qui s'écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} t_x - x - r = 0$.

4) On a :

$$\frac{u_{[x]+k}(x)}{u_{[x]}(x)} = \frac{([x]+k)^r}{([x]+k)!} x^{[x]+k} \frac{[x]!}{[x]^r x^{[x]}} = \begin{cases} \left(1+\dfrac{k}{[x]}\right)^r \dfrac{x^k}{([x]+k)\dots([x]+1)} & \text{si} k \in \mathbb{N} \\ \left(1+\dfrac{k}{[x]}\right)^r \dfrac{([x])\dots([x]+k+1)}{x^{-k}} & \text{si} k \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

Mais $\forall i \in \mathbb{Z},\ x \underset{x\to+\infty}{\sim} [x]+i$, donc les derniers rapports tend vers 1 en $+\infty$ et $u_{[x]+k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{[x]}(x)$.

Pour x assez grand $[x]-n \geq 0$ alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{i=[x]-n}^{[x]} \dfrac{u_i(x)}{u_{[x]}(x)} = (n+1)$ car chaque terme de la somme qui est finie tend vers 1 d'aprés l'équivalent précédent.

Pour x assez grand $\sum\limits_{i=[x]-n}^{[x]} \dfrac{u_i(x)}{u_{[x]}(x)} \geq (n+1) - \dfrac{1}{2} = n + \dfrac{1}{2}$ donc $\sum\limits_{i=[x]-n}^{[x]} u_i(x) \geq n u_{[x]}(x) + \dfrac{1}{2} u_{[x]}(x) \geq n u_{[x]}(x)$, car $u_{[x]}(x) \geq 0$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $0 \leq \dfrac{u_{[x]}(x)}{x^r e^x} \leq \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=[x]-n}^{[x]} \dfrac{u_i(x)}{x^r e^x}$

Soit $i \in [[[x]-n;[x]]]$, alors $\dfrac{u_i(x)}{x^r e^x} = \dfrac{i^r x^i}{i! x^r e^x} = (\dfrac{i}{x})^r \dfrac{x^i}{i! e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car la fonction $x \longmapsto (\dfrac{i}{x})^r$ est bornée et $\dfrac{x^i}{i!} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$.

Alors $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=[x]-n}^{[x]} \dfrac{u_i(x)}{x^r e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car somme fine de termes qui tend vers 0 en $+\infty$.

Donc $u_{[x]}(x) = \underset{x\to+\infty}{=} (x^r e^x)$, alors $\forall k \in \mathbb{Z}, u_{[x]+k}(x) = \underset{x\to+\infty}{=} (x^r e^x)$

Si on suppose que $\exists i \in \mathbb{Z}$ tel que $M_x = u_{[x]+i}(x)$, d'après ce qui précède, $M_x \underset{x\to+\infty}{=} (x^r e^x)$.

6) On a $\forall n \geq 1,\ ; D_{n+1} - D_n = z^n$, les D_n sont tous bornés par $\dfrac{2}{|1-z|}$, les séries $\sum\limits_n u_n(x)$ sont convergentes car le rayon des séries $\sum\limits_n \dfrac{n^r}{n!} x^n$ est $+\infty$. donc les séries $\sum\limits_n D_n u_n(x)$ convergent absolument donc convergentes, alors

$$
\begin{aligned}
S_{r,1}(zx) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n z^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) z^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)[D_{n+1} - D_n] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) D_{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) D_n \text{ car ces séries convergent} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-1}(x) D_n - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) D_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}(x) D_n - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) D_n \text{ car } \ u_0 D_1 = 0 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (u_{n-1}(x) - u_n(x)) D_n
\end{aligned}
$$

Alors $|S_{r,1}(zx)| \leq \dfrac{2}{|1-z|} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)|$, or

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| &= \sum_{n=1}^{[t_x]} u_n(x) - u_{n-1}(x) + \sum_{n=[t_x]+1}^{+\infty} u_{n-1}(x) - u_n(x) \\
&= u_{[t_x]} + u_{[t_x]} \ \text{ car } \lim_{n \to +\infty} u_n(x) = 0 \ \text{ et} u_0 = 0 \\
&= 2u_{[t_x]} \\
&\leq 2M_x
\end{aligned}
$$

Alors $|S_{r,1}(zx)| \leq \dfrac{4M_x}{|1-z|}$

Par la question 5, $M_x = o(x^r e^x)$, donc $S_{r,1}(zx) = o(x^r e^x)$.

7) On a $\sum_{k=0}^{p-1}(\zeta^n)^k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \in p\mathbb{N} \\ p & \text{sinon} \end{cases}$ alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) &= \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \zeta^{nk} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \sum_{k=0}^{p-1} (\zeta^n)^k \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(pm)^r}{(pm)!} x^{pm} p \\
&= pS_{r,p}(x)
\end{aligned}$$

On a $\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = S_{r,1}(x) + S_{r,1}(\zeta x) + \ldots + S_{r,1}(\zeta^{p-1}x)$ c'est à dire $pS_{r,p}(x) = S_{r,1}(x) + S_{r,1}(\zeta x) + \ldots + S_{r,1}(\zeta^{p-1}x)$, par la question 6). $S_{r,1}(\zeta x) + \ldots + S_{r,1}(\zeta^{p-1}x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^r e^x)$, donc $S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{x^r e^x}{p})$ est équivalent à $S_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^r e^x)$.
Donc les énoncés $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ sont équivalents.

B. Une démonstration probabiliste

8) $\mathbb{E}(Z_x) = \frac{1}{x}\mathbb{E}(X_x) = 1$ et $\mathbb{V}(Z_x) = \frac{1}{x^2}\mathbb{V}(X_x) = \frac{1}{x}$.
Et $(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}) = (|Z_x - 1| > \alpha x^{-1/3})$, par application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $\mathbb{P}(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}) = \mathbb{P}(|Z_x - 1| > \alpha x^{-1/3}) \leq \frac{1/x}{\alpha^2 x^{-2/3}} = \frac{1}{\alpha^2 x^{1/3}}$ cette dernière quantité tend vers 0 quand $x \to +\infty$, alors :
$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}) = 0.$

9) Soit $\omega \in \Omega$, alors si $\omega \in (Z_x < 1 - x^{-1/3})$, alors $Z_x(\omega) < 1 - x^{-1/3}$, alors $Z_x^r(\omega) < (1 - x^{-1/3})^r$, donc $A_x < (1 - x^{-1/3})^r 1_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})}$.
Si $\omega \in (|Z_x - 1| \leq x^{-1/3})$, alors $(1 - x^{-1/3}) \leq Z_x(\omega) \leq (1 + x^{-1/3})$, donc :
$(1 - x^{-1/3})^r 1_{(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3})} \leq B_x \leq (1 + x^{-1/3})^r 1_{(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3})}$, les variables aléatoires A_x et B_x sont positives car c'est le produit de variables positives.
Alors $0 \leq A_x < (1 - x^{-1/3})^r 1_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})}$ et
$(1 - x^{-1/3})^r 1_{(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3})} \leq B_x < (1 + x^{-1/3})^r 1_{(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3})}$.
les variables $(1 - x^{-1/3})^r 1_{(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3})}$ et $(1 - x^{-1/3})^r 1_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})}$ ont des espérances finie, donc les espérances de A_x et B_x sont finie, de plus :

$0 \leq \mathbb{E}(A_x) \leq (1-x^{-1/3})^r \mathbb{P}(Z_x < 1-x^{-1/3}) \leq \mathbb{P}(|Z_x - 1| > x^{-1/3}) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par la question 8), alors

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}(A_x) = 0$$

et $(1-x^{-1/3})^r \mathbb{P}(|Z_x-1| \leq x^{-1/3}) \leq \mathbb{E}(B_x) < (1+x^{-1/3})^r \mathbb{P}(|Z_x-1| \leq x^{-1/3})$.
Par la question 8) les limites des bornes de $\mathbb{E}(B_x)$ est 1 , donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}(B_x) = 1$$

10) On a $|Y_{N,x}| \leq \prod_{k=0}^{N-1}(X_x+k)$ et $\prod_{k=0}^{N-1}(X_x+k)$ est combinaisons linéaire des variables $1, X_x, ..., X_x^N$ et ces variables ont des espérances finie, car les séries $\sum_n n^j \frac{x^n}{n!}$ convergent pour tout $j \in \mathbb{N}$, donc $Y_{N,x}$ est d'espérance finie.

<u>Premier cas si</u> $x + x^{2/3} > N$, alors en posant $Q(X) = \prod_{k=0}^{N-1}(X-k)$ et puisque $Q(j) = 0$ pour tout $j \in \{0, 1, .., (N-1)\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{N,x}) &= \sum_{n=N}^{+\infty} Q(n)\mathbb{P}(X_x > x + x^{2/3}, X_x = n) \\
&= \sum_{n > x+x^{2/3}} Q(n)\mathbb{P}(X_x = n) \\
&= \sum_{n > x+x^{2/3}} Q(n)\frac{x^n}{n!}e^{-x} \\
&= x^N \sum_{n > x+x^{2/3}} \frac{x^{n-N}}{(n-N)!}e^{-x} \\
&= x^N \sum_{n > x+x^{2/3}} \mathbb{P}(X_x = n-N) \\
&= x^N \mathbb{P}(X_x > x + x^{2/3} - N)
\end{aligned}$$

Deuxième cas si $x+x^{2/3}<N$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{N,x}) &= \sum_{n=N}^{+\infty} Q(n)\mathbb{P}(X_x > x+x^{2/3}, X_x = n)\\
&= \sum_{n=N}^{+\infty} Q(n)\mathbb{P}(X_x = n)\\
&= \sum_{n=N}^{+\infty} Q(n)\frac{x^n}{n!}e^{-x}\\
&= x^N \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{x^{n-N}}{(n-N)!}e^{-x}\\
&= x^N\\
&= x^N\mathbb{P}(X_x > x+x^{2/3}-N);\ \text{car}(X_x > x+x^{2/3}-N)=\Omega.
\end{aligned}$$

Troisième cas si $x+x^{2/3}=N$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{N,x}) &= \sum_{n=N}^{+\infty} Q(n)\mathbb{P}(X_x > x+x^{2/3}, X_x = n)\\
&= \sum_{n=N+1}^{+\infty} Q(n)\mathbb{P}(X_x = n)\\
&= \sum_{n=N+1}^{+\infty} Q(n)\frac{x^n}{n!}e^{-x}\\
&= x^N \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^{n-N}}{(n-N)!}e^{-x}\\
&= x^N \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}e^{-x}\\
&= x^N\mathbb{P}(X_x>0)\\
&= x^N\mathbb{P}(X_x > x+x^{2/3}-N)
\end{aligned}$$

Dans tous les cas $\mathbb{E}(Y_{N,x}) = x^N\mathbb{P}(X_x > x+x^{2/3}-N)$.
Pour x assez grand fixé, on a $\frac{1}{2}x^{2/3} \geq N$, alors $(X_x > x+x^{2/3}-N) \subset (X_x > x+x^{2/3}-\frac{1}{2}x^{2/3}) = (X_x > x+\frac{1}{2}x^{2/3}) \subset (|X_x - x| > \frac{1}{2}x^{2/3})$ et par la question 8). $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbb{P}(X_x > x+x^{2/3}-N) = 0$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$, donc $\mathbb{E}(Y_{N,x}) = o(x^N)$.

11) Il suffit de chercher les réels $a_1,\dots a_N$ tels que : $X_x^N = \sum_{k=1}^{N} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(X_x - i)$.

Pour cela, considérons les polynômes $P_i = \prod_{k=0}^{i-1}(X-k)$ pour tout $i \geq 1$, et remarquons que ces polynômes ont tous 0 comme racine, et posons $P_0 = 1$.

La famille $(P_0, P_1, ..., P_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$, donc $\exists a_0, a_1, ... a_N$ tels que $X^N = a_0P_0 + a_1P_1 + ... + a_NP_N$, en évaluant en 0, on a $a_0 = 0$, donc :

$\forall n \in \mathbb{N},\ n^N - \sum_{i=0}^{N} a_iP_i(n) = 0$, soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, alors la variable aléatoire $X_x^N - \sum_{k=1}^{N} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(X_x - i)$ est nulle sur l'événement $(X_x = n)$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc nulle sur Ω, puisque $(X_x = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événement, donc

$$X_x^N = \sum_{k=1}^{N} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(X_x - i)$$

Alors $1_{(X_x > x + x^{2/3})} X_x^N = \sum_{k=1}^{N} a_k 1_{(X_x > x+x^{2/3})} \prod_{i=0}^{k-1}(X_x - i)$ ce qui se traduit par :

$$1_{(X_x > x+x^{2/3})} X_x^N = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{k,x}$$

La linéarité de l'espérance donne $\mathbb{E}(1_{(X_x>x+x^{2/3})}X_x^N) = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{E}(Y_{k,x})$, et on a $\forall k \in \mathbb{N}^*;\ \mathbb{E}(Y_{k,x}) = o(x^N)$, donc $\mathbb{E}(1_{(Z_x>1+x^{-1/3})}X_x^N) = o(x^N)$, alors $\mathbb{E}(1_{(Z_x>1+x^{-1/3})}Z_x^N) = o(1)$, c'est à dire $\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}(1_{(Z_x>1+x^{-1/3})}Z_x^N) = 0$.

12) Soit $r > 0$, et $N = [r]+1$; alors $N \geq r$, donc $1_{(Z_x>1+x^{-1/3})}Z_x^r \leq 1_{(Z_x>1+x^{-1/3})}Z_x^N$, car si $\omega \in (Z_x > 1 + x^{-1/3})$, alors $Z_x(\omega) > 1$, donc $Z_x(\omega)^r \leq Z_x(\omega)^N$, et si $\omega \notin (Z_x > 1 + x^{-1/3})$, alors il y'a égalité.

Donc $0 \leq \mathbb{E}(1_{(Z_x>1+x^{-1/3})}Z_x^r) \leq \mathbb{E}(1_{(Z_x>1+x^{-1/3})}Z_x^N)$, par la question 11)., $\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}(1_{(Z_x>1+x^{-1/3})}Z_x^r) = 0$. On a :

$\mathbb{E}(Z_x^r) = \mathbb{E}(1_{(Z_x>1+x^{-1/3})}Z_x^r) + \mathbb{E}(1_{(Z_x<1-x^{-1/3})}Z_x^r) + \mathbb{E}(1_{(|Z_x-1|\leq x^{-1/3})}Z_x^r)$ et par la question 11 $\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}(1_{(Z_x>1+x^{-1/3})}Z_x^r) = 0$, par la question 9 $\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}(1_{(Z_x<1-x^{-1/3})}Z_x^r) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}(1_{(|Z_x-1|\leq x^{-1/3})}Z_x^r) = 1$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}(Z_x^r) = 1$.

D'autre part par la propriété de Transfert on a :

$\mathbb{E}(Z_x^r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{x}\right)^r \mathbb{P}(X_x = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{x}\right)^r \frac{x^n}{n!} e^{-x} = \frac{1}{x^r e^x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n$, or $\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}(Z_x^r) =$

1, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$ ou

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$$

C'est à dire $(H_{r,1})$ est vrai.

13) On a :

$$\begin{aligned}
\frac{[p(n+1)]^r}{[p(n+1)]!} &= \frac{[p(n+1)]^r}{(pn+p)....(pn+1)(pn)!} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(pn)^r}{(pn)^p(pn)!} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!}
\end{aligned}$$

Or par la question préliminaire, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!} x^{np}$ est $+\infty$, donc $S_{r,p}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^p S_{r-p,p}(x)$,
Donc $p\frac{S_{r,p}(x)}{x^r e^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} p\frac{S_{r-p,p}(x)}{x^{r-p} e^x}$, alors $(H_{r,p}) \Longrightarrow (H_{r-p,p})$.
Montrons la validité de $(H_{r,p})$.
Si $r > 0$, par application de la partie B, $(H_{r,1})$ est vrai, et par application de la question 7), $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ sont équivalents, donc $(H_{r,p})$ est encore vrai.
Si $r \leq 0$, en fait l'implication précédente est une équivalence, et par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}$, $(H_{r,p})$ est équivalent à $(H_{r+kp,p})$.
On a $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $r + kp > 0$, c'est une question de limite, et on a $(H_{r,p})$ est équivalente à $(H_{r+kp,p})$, et puisque $r + kp > 0$, d'après le premier cas $(H_{r+kp,p})$ et par conséquent $(H_{r,p})$ sont donc vrais.

C. Application à l'équation d'Airy

14) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
v_n - v_{n-1} &= -\ln(1+\frac{x}{n}) - x\ln(1-\frac{1}{n}) \\
&= -(\frac{x}{n} - \frac{x}{2n^2}) - x(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}) + o(\frac{1}{n^2}) \\
&= \frac{x}{n^2} + + o(\frac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{n\geq 2} v_n - v_{n-1}$ converge.

Mais $v_n = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{k}{x+k}\right) + x\ln n = \ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)} n^x\right)$

La série télescopique $\sum_{n\geq 2} v_n - v_{n-1}$ converge, donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge, soit ℓ sa limite, on a $\ell \in \mathbb{R}$, et $\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)} n^x$ converge vers $e^{\ell} = \Gamma(x) > 0$, donc

$$\prod_{k=0}^{n}(x+k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!n^x}{\Gamma(x)}$$

15) L'application $t \longmapsto t$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors le problème de cauchy suivant : $\begin{cases} x''(t) - tx(t) &= 0 \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 0 \end{cases}$ possède une unique solution f sur $\mathbb{R}$.

16) Posons $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, on a alors :

$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}t^n = 0$, ou $2a_2 + \sum_{n=0}^{+\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]\, t^n = 0$, par unicité du développement en série entière et $f(0) = 1, f'(0) = 0$,

alors $\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ \forall n \geq 1,\ a_{n+2} &= \dfrac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases}$

Connaissant les 3 premiers termes de la suite elle est donc bien définie $((n-1)+3 = n+2)$.

17) Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$.

Et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{3n} = \frac{1}{(3n)(3n-1)}.\frac{1}{(3n-3)(3n-4)}\ldots\frac{1}{3.2}a_0 = \frac{1}{(3n)(3n-3)\ldots(3.1)}.\frac{1}{(3n-1)(3n-4)\ldots(2}$

$\frac{1}{3^n n!}\frac{1}{(3n-1)(3n-4)\ldots(2)}$

D'autre part par la question 14). avec $x = \frac{2}{3}$,

$\prod_{k=0}^{n}(\frac{2}{3}+k) = \prod_{k=0}^{n}(2+3k)\frac{1}{3^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{2/3}n!}{\Gamma(2/3)}$ alors $\prod_{k=0}^{n}(2+3k) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^{n+1}\frac{n^{2/3}n!}{\Gamma(2/3)}$

Or $\prod_{k=0}^{n}(2+3k) = 2.5\ldots(3n-1)(3n+2)$, alors $\frac{\prod_{k=0}^{n}(2+3k)}{3n+2} = 2.5\ldots(3n-1)$, donc

$$a_{3n} = \frac{1}{3^n n!} \frac{1}{\frac{\prod_{k=0}^{n}(2+3k)}{3n+2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^n n!} \frac{3n}{3^{n+1}\frac{n^{2/3} n!}{\Gamma(2/3)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2/3) n^{1/3}}{3^{2n}(n!)^2}$$

Par stirling $n!^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi n (\frac{n}{e})^{2n}$ et $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}$, donc $\frac{(2n)!}{n!^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n}$.

Alors

$$\begin{aligned} a_{3n} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2/3) n^{1/3}}{9^n} \frac{(2n)!}{n!^2} \frac{1}{(2n)!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2/3)}{(2n)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{n^{1/3}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n^{-1/6} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} \end{aligned}$$

18) Soit $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} t^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} (t^{3/2})^{2n}$, de rayon $+\infty$, d'après un résultat admis à la question 13). et par 17), alors $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2^{1/6} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)^{-1/6}}{(2n)!} \left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right)^{2n}$

Par application de ce qui précède à $(H_{-1/6,2})$, alors

$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2^{1/6}}{2} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right)^{-1/6} e^{\frac{2}{3} t^{3/2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{3^{1/6}}{2} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} t^{-1/4} e^{\frac{2}{3} t^{3/2}}$.

On prend $C = \frac{3^{1/6}}{2} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}$.

Pour les remarques sadikoulmeki@yahoo.fr
Omar SADIK CPGE My Driss Fès.