

# Centrale PSI 1

## un corrigé

### 1 La fonction $\Gamma$ .

**I.A.**  $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ; les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages de 0 et de  $+\infty$ .

- Au voisinage de 0,  $f_x(t) \sim t^{x-1}$  est intégrable si et seulement si  $1 - x < 1$  (fonctions de Riemann).

- Au voisinage de  $+\infty$ ,  $f_x(t) = o(1/t^2)$  (croissances comparées) et  $f_x$  est donc intégrable.

Finalement  $f_x$  est bien intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  si et seulement si  $x > 0$ .

**I.B.** Soit  $h : (x, t) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ ;  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$  et admet sur cet ensemble une dérivée partielle par rapport à  $x$  qui est aussi continue. Enfin,

$$\forall 0 < a < b, \forall x \in [a, b], \forall t > 0, |h(x, t)| \leq \phi_0(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in [0, 1] \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

$$\forall 0 < a < b, \forall x \in [a, b], \forall t > 0, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi_1(t) = \begin{cases} |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in [0, 1] \\ \ln(t)e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

$\phi_0$  et  $\phi_1$  étant intégrables sur  $\mathbb{R}^+$  (négligeables devant  $1/t^2$  au voisinage de  $+\infty$  et devant  $t^{\frac{a}{2}-1}$  au voisinage de 0 par croissances comparées et continues par morceaux ailleurs), le théorème sur les intégrales à paramètres indique que  $\Gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$  avec

$$\forall x > 0, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1} dt$$

Par ailleurs, la fonction intégrée étant positive, continue et non nulle sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , on a aussi

$$\forall x > 0, \Gamma(x) > 0$$

**I.C.** Soit  $x > 0$ . Pour  $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ , une intégration par parties donne

$$\int_a^b e^{-t}t^x dt = [-e^{-t}t^x]_a^b + x \int_a^b e^{-t}t^{x-1} dt$$

En faisant tendre  $a$  vers 0 et  $b$  vers l'infini (les différentes limites existent bien) on a donc

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

**I.D.** Un calcul direct donne :

$$\Gamma(1) = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

La formule de la question précédente donne alors directement par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$$

### 2 Formule de Stirling.

**II.A.** On dérive  $(t-k+1)(k-t)$  en  $2k-1-2t$  et on primitive  $1/t^2$  en  $-1/t$  pour obtenir, par intégration par parties,

$$\int_{k-1}^k \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} dt = \int_{k-1}^k \frac{2k-1-2t}{t} dt$$

Une nouvelle intégration par parties donne (on dérive  $2k - 1 - 2t$  en  $-2$  et on primitive  $1/t$  en  $\ln(t)$ )

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^k \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} dt &= [\ln(t)(2k-1-2t)]_{k-1}^k + 2 \int_{k-1}^k \ln(t) dt \\ &= -\ln(k) - \ln(k-1) + 2 \int_{k-1}^k \ln(t) dt \end{aligned}$$

En réordonnant cette égalité, il vient

$$u_k = \ln(k) - \int_{k-1}^k \ln(t) dt = \frac{1}{2}(\ln(k) - \ln(k-1)) - \int_{k-1}^k \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} dt$$

**II.B.** On remarque que

$$\forall t \in [k-1, k], \quad 0 \leq \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{(k-1)^2}$$

On en déduit par positivité de l'intégrale que

$$\forall k \geq 2, \quad 0 \leq w_k \leq \frac{1}{2(k-1)^2}$$

Par comparaison des séries positives,  $\sum (w_k)_{k \geq 2}$  est une série positive convergente. Notons  $S$  sa somme.

Avec l'identité de la question précédente, on a

$$\sum_{k=2}^n w_k = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1)) - \sum_{k=2}^n \ln(k) + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(t) dt$$

Par télescopage, relation de Chasles et propriété de morphisme du logarithme, ceci devient

$$\sum_{k=2}^n w_k = \frac{1}{2}(\ln(n+1) - \ln(1)) - \ln(n!) + \int_1^n \ln(t) dt = \frac{\ln(n)}{2} - \ln(n!) + n \ln(n) - n + 1$$

ce qui s'écrit aussi

$$S - v_n = n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} - \ln(n!) + 1$$

ou encore

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + a + v_n \quad \text{avec} \quad a = 1 - S = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} w_k$$

**II.C.** En posant  $u = t - k + 1$  (on pourrait travailler avec les expressions initiales mais le calcul me paraît plus clair avec des intégrale sentre 0 et 1), on a

$$w_k = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u(1-u)}{(u+k-1)^2} du$$

Une intégration par parties donne alors (on primitive le numérateur)

$$w_k = \frac{1}{12k^2} + \int_0^1 \frac{\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}}{(u+k-1)^2} du$$

et ainsi (on calcule l'intégrale et on soustrait)

$$w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{12k^2(k-1)} + \int_0^1 \frac{\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}}{(u+k-1)^2} du$$

Une étude élémentaire de fonction montre que  $u \mapsto \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}$  croît sur  $[0, 1]$  et prend des valeurs entre 0 et  $\frac{1}{12}$ . On a donc

$$-\frac{1}{12k^2(k-1)} \leq w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \leq -\frac{1}{12k^2(k-1)} + \frac{1}{12} \int_0^1 \frac{du}{(u+k-1)^2}$$

Le majorant est plus petit que  $\frac{1}{12} \int_0^1 \frac{du}{(u+k-1)^2}$  et donc que  $\frac{1}{6} \int_0^1 \frac{du}{(u+k-1)^2} = \frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$ . On vérifie par ailleurs que

$$\frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3} - \frac{1}{12k^2(k-1)} = \frac{1}{12k(k-1)^2} \geq 0$$

et le minorant plus haut est plus grand que  $-\frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$ .

On a finalement montré que

$$\frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3} \leq w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$$

ce qui correspond au résultat demandé.

**II.D.** On remarque que pour  $p \geq n+1 \geq 1$  on a

$$\sum_{k=n+1}^p \left( w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \right) = \sum_{k=n+1}^p w_k - \frac{1}{12} \int_n^p \frac{dt}{t^2} = \sum_{k=n+1}^p w_k + \frac{1}{12p} - \frac{1}{12n}$$

On passe au module et on utilise l'inégalité triangulaire et la question précédente pour en déduire que

$$\left| \sum_{k=n+1}^p w_k - \frac{1}{12} \int_n^p \frac{dt}{t^2} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^p \left( w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \right) \right| \leq \frac{1}{6} \int_n^p \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12p^2}$$

En passant à la limite quand  $p \rightarrow +\infty$ , on en déduit alors

$$\left| v_n - \frac{1}{12n} \right| \leq \frac{1}{12n^2}$$

On a ainsi  $v_n = \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  ce qui, injecté dans le résultat de **II.B** donne

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

### 3 L'identité d'Euler.

**III.A.**  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  (le seul problème est en  $n$  où le raccord se fait bien, limite à droite et gauche valant 0), nulle au voisinage de  $+\infty$  (où elle est donc intégrable) et équivalente à  $t^{x-1}$  en 0 (où elle est intégrable puisque  $x > 0$ ). C'est donc une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**III.B.** La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^{+*}$  vers  $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$  (puisque l'on a  $(1 - u/n)^n = \exp(n \ln(1 - u/n)) \rightarrow \exp(-u)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ).

Les  $f_n$  ainsi que la limite simple sont continues sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Par concavité de  $\ln$ , on a  $\forall u > -1$ ,  $\ln(1 + u) \leq u$ ; on a donc (croissance de l'exponentielle)

$$\forall t \in ]0, n[, \quad 0 \leq f_n(t) \leq t^{x-1} e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} \leq t^{x-1} e^{-t}$$

et l'inégalité reste vraie trivialement pour  $t \geq n$ . Le majorant est intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  (déjà vu) et le théorème de convergence dominée s'applique pour donner

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x)$$

**III.C.** Soit  $a \in ]0, 1]$ ; une intégration par parties donne

$$\int_a^1 (1-u)^{n+1} u^{x-1} dx = \left[ \frac{u^x}{x} (1-u)^{n+1} \right]_a^1 + \frac{n+1}{x} \int_a^1 u^x (1-u)^n du$$

En passant à la limite  $a \rightarrow 0$  (les différentes quantités existent; en particulier,  $x > 0$  donne  $x-1 > -1$  et on a l'intégrabilité au voisinage de 0)

$$J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

**III.D.** On montre par récurrence que la propriété

$$\forall x > 0, \quad J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} J_0(x+n)$$

est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

- Initialisation : le résultat est vrai au rang 1 d'après la question précédente.

- Hérédité : supposons le résultat vrai au rang  $n \geq 1$ . En utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence au rang  $n$  avec  $x+1$ , on obtient le résultat au rang  $n+1$ .

Le calcul de  $J_0$  étant immédiat, on trouve alors

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

**III.E.** Le changement de variable  $u = t/n$  donne

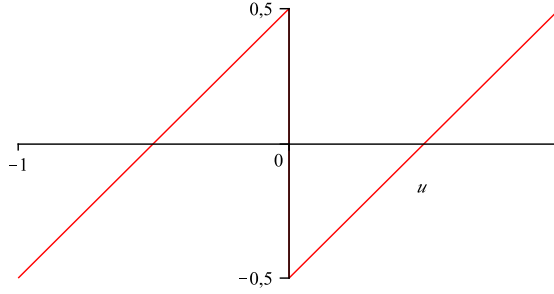
$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

et la question **III.B** indique alors que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

## 4 Une intégrale à paramètres.

**IV.A.** Si  $u \in [-1, 0]$  alors  $h(u) = u + 1/2$ , si  $u \in [0, 1]$  alors  $h(u) = u - 1/2$  et  $h(1) = -1/2$ . On a donc le graphe suivant



**IV.B.**  $h$  est, comme la fonction partie entière, 1-périodique. Son intégrale sur  $[t, t + 1]$  est donc indépendante de  $t$  et vaut 1 (calcul pour  $t = 0$  par exemple). On en déduit alors que

$$\forall x, H(x + 1) - H(x) = \int_x^{x+1} h(t) dt = 0$$

ce qui montre que  $H$  est aussi 1-périodique. De plus, pour tout entier  $n$ ,  $\int_0^n h = 0$  et

$$\forall x, H(x) = \int_0^{[x]} h(t) dt + \int_{[x]}^x h(t) dt = \int_{[x]}^x h(t) dt$$

Le changement de variable  $u = t - [x]$  donne (avec la périodicité de  $h$ )

$$\forall x, H(x) = \int_0^{x-[x]} h(u) du = \int_0^{x-[x]} (u - 1/2) du = \frac{(x - [x])(x - [x] - 1)}{2}$$

$H$  est, comme la fonction partie entière, continue et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

**IV.C.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $h$  est continue sur  $[n, n + 1[$  et, d'après le théorème fondamental, l'application  $x \mapsto \int_n^x h$  est une primitive de  $h$  sur  $[n, n + 1[$ . En ajoutant une constante, on garde une primitive. On a donc aussi  $H$  qui est une primitive de  $h$  sur  $[n, n + 1[$ . Une intégration par partie donne alors

$$(*) : \forall a \in [n, n + 1[, \int_n^a \frac{h(u)}{x + u} du = \left[ \frac{H(u)}{x + u} \right]_n^a + \int_n^a \frac{H(u)}{(x + u)^2} du$$

En faisant tendre  $a$  vers  $n + 1$  dans cette relation, on a alors (puisque  $H(n) = H(n + 1) = 0$ )

$$(**) : \int_n^{n+1} \frac{h(u)}{x + u} du = \int_n^{n+1} \frac{H(u)}{(x + u)^2} du$$

La fonction  $u \mapsto \frac{h(u)}{x+u}$  étant continue sur  $\mathbb{R}^+$ , elle présente un unique problème, pour l'existence d'intégrale, au voisinage de  $+\infty$ . Soit alors  $b > 0$ . On a

$$\int_0^b \frac{h(u)}{x + u} du = \sum_{k=0}^{[b]-1} \int_k^{k+1} \frac{h(u)}{x + u} du + \int_{[b]}^b \frac{h(u)}{x + u} du$$

Avec  $(*)$  et  $(**)$  on a donc (en tenant compte de  $H([b]) = 0$ )

$$\int_0^b \frac{h(u)}{x + u} du = \int_0^b \frac{H(u)}{(x + u)^2} du + \frac{H(b)}{(x + b)^2}$$

$H$  étant continue et périodique est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Le second terme du membre de droite est donc de limite nulle quand  $b \rightarrow +\infty$ . De plus,  $u \mapsto \frac{H(u)}{x+u}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et dominée par  $1/u^2$  au voisinage de  $+\infty$ . C'est donc une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . On a ainsi l'existence d'une limite quand  $b \rightarrow +\infty$  pour l'intégrale du membre de droite ci-dessus. Finalement, l'intégrale proposée existe et

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u} du = \int_0^{+\infty} \frac{H(u)}{(x+u)^2} du$$

**IV.D.** Le changement de variable  $t = u - n$  donne (avec la périodicité de  $h$ )

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{n+1/2}^{n+1} \frac{|h(u)|}{x+u} du = \int_{1/2}^1 \frac{|h(t)|}{x+n+t} dt \geq \frac{1}{x+n+1} \int_{1/2}^1 |h(t)| dt = \frac{1}{8(x+n+1)}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{n+1} \frac{|h(u)|}{x+u} du \geq \frac{1}{8} \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k+1}$$

Le minorant est de limite infinie quand  $n \rightarrow +\infty$  (somme partielle d'une série positive divergente). A fortiori,  $b \mapsto \int_0^b \frac{|h(u)|}{x+u} du$  n'admet pas de limite finie quand  $b \rightarrow +\infty$ . Ainsi,  $u \mapsto \frac{h(u)}{x+u}$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

**IV.E.** On va utiliser la théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall u \geq 0, x \mapsto \frac{H(u)}{(x+u)^2}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  de dérivée  $x \mapsto -2 \frac{H(u)}{(x+u)^3}$
- $\forall x > 0, u \mapsto x \mapsto \frac{H(u)}{(x+u)^2}$  et  $u \mapsto x \mapsto -2 \frac{H(u)}{(x+u)^3}$  sont continues sur  $\mathbb{R}^+$ .
- Soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ . On a

$$\forall x \in [a, b], \forall u \geq 0, \left| x \mapsto \frac{H(u)}{(x+u)^2} \right| \leq x \mapsto \frac{\|H\|_\infty}{(a+u)^2}$$

$$\forall x \in [a, b], \forall u \geq 0, \left| x \mapsto -2 \frac{H(u)}{(x+u)^3} \right| \leq x \mapsto \frac{2\|H\|_\infty}{(a+u)^3}$$

Les majorants sont intégrables sur  $\mathbb{R}^+$  (continus et dominés par  $1/u^2$  au voisinage de  $+\infty$ ). Le théorème s'applique et le calcul de la question **IV.C** donne  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  avec

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2H(u)}{(x+u)^3} du$$

Par ailleurs, le même calcul qu'en **IV.C** donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(x+u)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{2H(u)}{(x+u)^3} du$$

On a donc finalement

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(x+u)^2} du$$

## 5 Une autre identité due à Euler.

**V.A.** Une intégration par partie donne (on primitive 1 en  $t - x - i - 1$ )

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t) dt = [(t - x - i - 1) \ln(t)]_{t=x+i}^{t=x+i+1} - \int_{x+i}^{x+i+1} \frac{t - x - i - 1}{t} dt$$

Avec le changement de variable  $u = t - x$  dans l'intégrale du membre de droite, on a alors

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t) dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u - i - 1}{u + x} du$$

**V.B.** On a tout d'abord

$$\forall i \in \mathbb{N}, \int_i^{i+1} \frac{h(u)}{x+u} du = \int_i^{i+1} \frac{u-i-1/2}{u+x} du = \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x} du + \frac{1}{2} \int_i^{i+1} \frac{du}{u+x}$$

En sommant ces relation de  $i = 0$  à  $i = n$  et en utilisant la relation de Chasles et la question précédente, il vient

$$\int_0^{n+1} \frac{h(u)}{x+u} du = \ln(x(x+1)\dots(x+n)) - \int_x^{x+n+1} \ln(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{n+1} \frac{du}{u+x}$$

Le calcul des intégrales est immédiat ( $x \mapsto x \ln(x) - x$  est une primitive de  $x \mapsto \ln(x)$ ) et on obtient la quantité

$$\ln((x+1)\dots(x+n)(x+n+1)) - (x+n+\frac{3}{2})\ln(x+n+1) + (x+n+1) + x \ln(x) - x + \frac{\ln(x)}{2}$$

On a alors

$$G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{x+u} du = \ln\left(\frac{n!n^{x+1}}{(x+1)\dots(x+n+1)}\right) = F_n(x)$$

**V.C.1** On écrit que

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$$

$$\begin{aligned} (x+n+\frac{3}{2})\ln(x+n+1) &= (n+x+\frac{3}{2})\left(\ln(n) + \ln(1+\frac{1+x}{n})\right) \\ &= (n+x+\frac{3}{2})\left(\ln(n) + \frac{1+x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= n \ln(n) + (x+\frac{3}{2})\ln(n) + (1+x) + o(1) \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$G_n(x) = 1 + (x+\frac{1}{2})\ln(x) - 1 - x + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$$

c'est à dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = (x+\frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi})$$

**V.C.2** Avec l'identité d'Euler et la continuité de  $\ln$ , on a  $F_n(x) \rightarrow \ln(\Gamma(x+1))$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

On a ainsi, en passant à la limite dans **V.B**,

$$\ln(\Gamma(x+1)) = (x+\frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi}) - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u} du$$

**V.D.** Si on dérive cette relation, on obtient alors

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln(x) + \frac{x+1/2}{x} - 1 + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du$$

ou encore

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln(x) + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du$$

## 6 Distribution de Boltzmann.

**VI.A.1**  $\Omega$  est une partie fermée comme image réciproque du fermé  $\{(N, E)\}$  par l'application continue  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (\sum x_i, \sum \varepsilon_i x_i)$ . C'est aussi une partie bornée ( $\Omega$  est inclus dans la boule de centre 0 de rayon  $N$  pour la norme 1 sur  $\mathbb{R}^4$ , somme des modules des coordonnées). C'est donc un compact de  $\mathbb{R}^4$ . Une fonction continue sur  $\Omega$  (à valeurs réelles) est donc bornée et atteint ses bornes. Elle présente donc un maximum sur  $\Omega$ .

**VI.A.2** Il s'agit de résoudre un système de Cramer d'inconnues  $x_3, x_4$  ( $x_1$  et  $x_2$  sont des paramètres, le déterminant du système est  $\varepsilon_4 - \varepsilon_3 \neq 0$ ). On obtient

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} N - x_1 - x_2 & 1 \\ E - \varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_2 & \varepsilon_4 \end{vmatrix}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3} x_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_4}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3} x_2 + \frac{N\varepsilon_4 - E}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3}$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & N - x_1 - x_2 \\ \varepsilon_3 & E - \varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_2 \end{vmatrix}}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3} x_1 + \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3} x_2 + \frac{E - N\varepsilon_3}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3}$$

**VI.A.3** Soit  $h : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, ux_1 + vx_2 + w, u'x_1 + v'x_2 + w')$ . Sous réserve que ses coordonnées soient positives, l'image d'un élément de  $(\mathbb{R}^+)^2$  par  $h$  est un élément de  $\Omega$  (on peut passer des formules donnant  $x_3$  et  $x_4$  au système de deux équations définissant  $\Omega$ ).

Par ailleurs,  $h$  étant continue, si  $h(x_1, x_2)$  a ses coordonnées  $> 0$ , c'est aussi le cas pour tous les  $(y_1, y_2)$  dans une petite boule ouverte autour de  $(x_1, x_2)$ .

Si on suppose les  $a_i$  strictement positifs, il existe donc une boule ouverte  $B$  centrée sur  $(a_1, a_2)$  telle que pour tout  $(x, y) \in B$ ,  $h(x, y) \in \Omega$ .  $f$  présentant un maximum global sur  $\Omega$ , il en est de même pour  $f \circ h$  sur  $B$  et ce maximum est atteint en  $(a_1, a_2)$ . Comme  $B$  est un ouvert,  $(a_1, a_2)$  est alors un point critique de  $f \circ h$ . Les formules de dérivation composées donnent ainsi

$$0 = \frac{\partial f \circ h}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + u' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a)$$

$$0 = \frac{\partial f \circ h}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + v \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + v' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a)$$

**VI.A.4**  $F = \text{Vect}((1, 0, u, u'), (0, 1, v, v'))$  est un espace vectoriel de dimension 2 (indépendance linéaire des vecteurs immédiate) qui admet donc un supplémentaire orthogonal  $F^\perp$  de dimension  $4 - 2 = 2$ . Les formules obtenues plus haut donnent

$$1 + u + u' = 1 + v + v' = \varepsilon_1 + u\varepsilon_3 + \varepsilon_4 u' = \varepsilon_2 + v\varepsilon_3 + \varepsilon_4 v' = 0$$

et  $(1, 1, 1, 1), (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$  sont des vecteurs orthogonaux à  $F$  (puisque ils sont orthogonaux aux éléments d'une base de  $F$ ) et engendrent donc un sous-espace inclus dans  $F^\perp$ . Ils sont aussi indépendants (car les  $\varepsilon_i$  sont distincts, il suffit même que deux d'entre eux le soient). Par inclusion et dimension, on a donc

$$F^\perp = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4))$$

**VI.A.5** D'après la question **A.3.**, le vecteur de coordonnées  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  est dans  $F^\perp$ . Il est donc combinaison linéaire des deux vecteurs trouvés ci-dessus. Il existe donc  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, 4\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha + \beta \varepsilon_i$$

**VI.B.** On a ici  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(N) = -\frac{\Gamma'(N_i+1)}{\Gamma(N_i+1)}$ . En utilisant la seconde identité due à Euler et la question précédente, on dispose de  $\alpha$  et  $\beta$  tels que pour tout  $i$ ,

$$-\ln(N_i) - \frac{1}{2N_i} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(N_i + u)^2} du = \alpha + \beta \varepsilon_i$$

Il suffit de poser  $\lambda = -\alpha$  et  $\mu = -\beta$  pour obtenir les relations de l'énoncé.



**VI.C.1** Pour tout  $u$ , on a  $-\frac{1}{2} \leq h(u) \leq \frac{1}{2}$ . En multipliant par  $\frac{1}{(u+N_i)^2}$  (ce qui ne change pas le sens de l'inégalité) et en intégrant entre 0 et  $+\infty$  (positivité de l'intégrale et on prend soin de vérifier l'existence des intégrales) on obtient

$$-\frac{1}{2N_i} \leq \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+N_i)^2} du \leq \frac{1}{2N_i}$$

Si l'inégalité de droite (pr exemple) était stricte, on aurait  $\int_0^{+\infty} \frac{1/2-h(u)}{(u+N_i)^2} du = 0$ . La fonction intégrée étant positive, on aurait a fortiori  $\int_0^{1/2} \frac{1/2-h(u)}{(u+N_i)^2} du = 0$  (on enlève un morceau positif et on a donc un résultat plus petit, qui est par ailleurs positif). Comme la fonction intégrée est positive sur  $[0, 1/2]$  et continue sur cet intervalle, elle devrait être nulle, ce qui n'est pas le cas. Les inégalités sont donc strictes et alors

$$0 < \theta(N_i) < \frac{1}{N_i}$$

**VI.C.2** On a  $\ln(N_i) + \theta(N_i) = \lambda + \mu\varepsilon_i$  et donc (on compose par l'exponentielle)

$$N_i e^{\theta(N_i)} = e^{\lambda} e^{\mu\varepsilon_i}$$

C'est la formule voulue avec  $K = e^{\lambda} > 0$ .

*Soit cette question est stupide, soit c'est moi qui oublie quelquechose. Je ne vois pas pourquoi on nous fait prouver l'encadrement pour  $\theta(N_i)$ .*