

Partie I

On notera pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction polynomiale $f_n : x \mapsto (x^2 - 1)^n$.

On notera également pour $k \in \mathbb{N}$, indifféremment, $D^k((x^2 - 1)^n) = (f_n)^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^n]$

I.1.

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

I.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est paire. Par conséquent sa dérivée n ième est une fonction paire si n est pair, impaire si n est impair.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

I.3. On déduit de ce qui précède que $P_n(0) = 0$ si n est impair et que si n est pair, P'_n est impaire d'où $P'_n(0) = 0$. Reste à déterminer pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P_{2p}(0)$ et $P'_{2p+1}(0)$.

$(x^2 - 1)^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k (-1)^{2p-k} x^{2k}$. Comme $D^{2p}(x^{2k}) = 0$ si $k < p$, on obtient en dérivant $2p$ fois :

$$P_{2p}(x) = \frac{1}{2^{2p} (2p)!} \sum_{k=p}^{2p} C_{2p}^k (-1)^{2p-k} D^{2p}(x^{2k}).$$

$D^{2p}(x^{2k})$ est nul en $x = 0$ sauf si $k = p$ auquel cas il vaut $(2p)!$. On en déduit après simplifications :

$$P_{2p}(0) = (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} P'_{2p+1}(x) &= \frac{1}{2^{2p+1} (2p+1)!} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^{2p+1-k} D^{2p+2}(x^{2k}) \\ &= \frac{1}{2^{2p+1} (2p+1)!} \sum_{k=p+1}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^{2p+1-k} \frac{(2k)!}{(2k-2p-2)!} x^{2k-2p-2}. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$P'_{2p+1}(0) = (-1)^p \frac{(2p+1)!}{2^{2p} (p!)^2}$$

Soit finalement pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P_{2p}(0) &= (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} & P'_{2p}(0) &= 0. \\ P_{2p+1}(0) &= 0 & P'_{2p+1}(0) &= (-1)^p \frac{(2p+1)!}{2^{2p} (p!)^2} \end{aligned}$$

I.4.

Soit $n \in \mathbb{N}$, en appliquant la formule de Leibnitz à $\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} [(x^2 - 1)(x^2 - 1)^n]$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} [(x^2 - 1)^{n+1}] &= \sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^k D^k(x^2 - 1) D^{n+2-k}((x^2 - 1)^n) \\ &= \sum_{k=0}^2 C_{n+2}^k D^k(x^2 - 1) D^{n+2-k}((x^2 - 1)^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 - 1)D^{n+2}((x^2 - 1)^n) + 2(n+2)x D^{n+1}((x^2 - 1)^n) + (n+2)(n+1)D^n((x^2 - 1)^n) \\
&= 2^n n! [(x^2 - 1)P_n''(x) + 2(n+2)x P_n'(x) + (n+2)(n+1)P_n(x)]
\end{aligned}$$

D'autre part, $f_{n+1}'(x) = 2(n+1)x(x^2 - 1)^n$. En appliquant de nouveau la formule de Leibnitz à la dérivée $(n+1)$ ième de ce produit, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} [(x^2 - 1)^{n+1}] &= 2(n+1) \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k D^k(x) D^{n+1-k}((x^2 - 1)^n) \\
&= 2(n+1) [x D^{n+1}((x^2 - 1)^n) + (n+1)D^n((x^2 - 1)^n)] \\
&= 2(n+1) 2^n n! (x P_n'(x) + (n+1)P_n(x))
\end{aligned}$$

En identifiant, on obtient l'égalité voulue

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

I.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. 1 et -1 sont racines d'ordre n de f_n donc racines d'ordre $n-k$ de $f_n^{(k)} = D^k(f_n)$.

Montrons par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ la propriété $\mathcal{P}_k$: " $f_n^{(k)}$ s'annule au moins k fois sur $] -1, 1[$."

• $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• f_n s'annule en -1 et en 1, est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$, donc f_n' s'annule au moins une fois sur $] -1, 1[$ d'après le théorème de Rolle : $\mathcal{P}_1$ est établie.

• Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les zéros de $f_n^{(k)}$ dans $] -1, 1[$ avec $-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < 1$. Comme $n-k \geq 1$, $f_n^{(k)}(-1) = f_n^{(k)}(1) = 0$. Notons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$.

Pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $f_n^{(k)}(\alpha_i) = f_n^{(k+1)}(\alpha_{i+1}) = 0$, $f_n^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, dérivable sur $] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$: d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$.

On a $-1 = \alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1} < \dots < \beta_k < \alpha_k < 1$, on obtient donc ainsi $k+1$ racines distinctes de $f_n^{(k+1)}$ dans $] -1, 1[$ ce qui prouve $\mathcal{P}_{k+1}$.

La récurrence est établie : $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

En particulier, $\mathcal{P}_n$ assure que $P_n = \frac{1}{2^n n!} f_n^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $] -1, 1[$. Comme de plus P_n est une fonction polynôme de degré n en tant que dérivée n ième d'une fonction polynôme de degré $2n$, P_n admet au plus n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Ce sont donc les seules racines de P_n et elles sont simples.

Partie II

II.1. $f(x, y)$ est défini pour $x^2 + 1 > 2xy$, ce qui équivaut à $x = 0$ ou $(x > 0 \text{ et } y < \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}))$ ou $(x < 0 \text{ et } y > \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}))$.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$.

$\mathcal{D}_f = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) \mid x > 0 \text{ et } y < \varphi(x)\} \cup \{(x, y) \mid x < 0 \text{ et } y > \varphi(x)\}$.

La fonction φ est impaire : les deux ensembles $\{(x, y) \mid x > 0 \text{ et } y < \varphi(x)\}$ et $\{(x, y) \mid x < 0 \text{ et } y > \varphi(x)\}$ sont symétriques par rapport au point O.

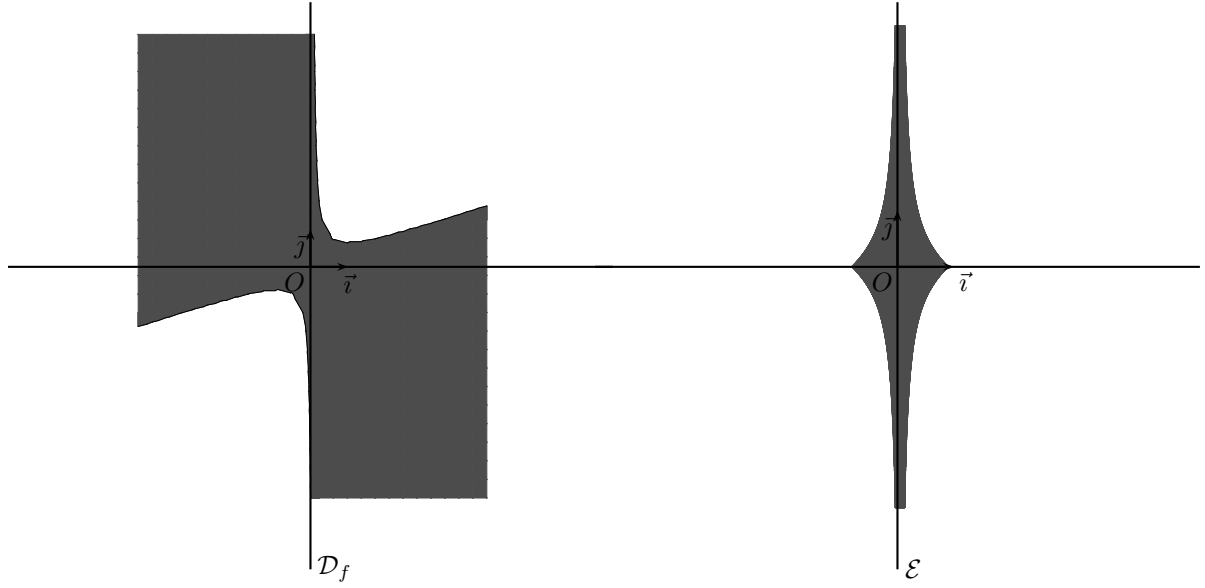
Etudions la fonction φ sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \varphi'(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2}. \varphi'(x) > 0 \iff x > 1 \text{ et } \varphi'(x) = 0 \iff x = 1.$$

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations de φ sur $\mathbb{R}_*^+$ puis, en gris la représentation graphique de $\mathcal{D}_f$, le domaine ouvert délimité par les deux branches de la courbe représentative de φ .

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	+
$\varphi(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$
		1	



II.2.

$$\mathcal{E} = \{ (0, y) \mid y \in \mathbb{R} \} \cup \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}^*, |y| < \frac{1-x^2}{2|x|} \} = \{ (0, y) \mid y \in \mathbb{R} \} \cup \{ (x, y) \mid x \in]-1, 1[, |y| < \frac{1-x^2}{2|x|} \}.$$

On peut ici utiliser la fonction Ψ définie sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$ par $\Psi(x) = \frac{1-x^2}{2|x|}$.

Ψ est paire, strictement décroissante sur $]0, 1]$, $\Psi(1) = 0$, $\Psi'(1) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0+} \Psi(x) = +\infty$.

$\mathcal{E}$ est le domaine ouvert délimité par les courbes représentatives de $x \mapsto \Psi(x)$ et $x \mapsto -\Psi(x)$ pour $x \in]-1, 1[$ représenté en gris ci dessus. On peut remarquer que $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_f$.

II.3.

On peut remarquer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$ donc aussi sur $\mathcal{E}$ et que pour tout réel y , il existe $h > 0$ tel que $] -h, h[\times \{y\} \subset \mathcal{E}$: on suppose que les fonctions A_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $(x, 0) \in \mathcal{E}$ et donc $f(x, 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(0) x^n$.

D'autre part, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ dont on connaît le développement en série entière sur $] -1, 1[$:

$$\forall x \in]-1, 1[\quad (1+x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}.$$

Par unicité du développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $] -1, 1[$, on en déduit que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad A_{2p+1}(0) = 0 \text{ et } A_{2p}(0) = \frac{(-1)^p (2p)!}{(2^p p!)^2}.$$

De plus par hypothèse, pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A'_n(y) x^n$.

En particulier pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} A'_n(0) x^n$.

Or pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(1-2xy+x^2)^{-3/2}$ et $\forall x \in]-1, 1[$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x(1+x^2)^{-3/2}$.

Or $\forall x \in]-1, 1[\quad x(1+x^2)^{-3/2} = x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^{2n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^{2n+1}$ avec $\beta_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $\beta_n = \frac{-3/2(-3/2-1) \cdots (-3/2+n-1)}{n!}$ soit après simplifications,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_n = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{(2^n n!)^2}.$$

On en déduit par unicité du développement en série entière de $x \mapsto x(x^2+1)^{-3/2}$ que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad A'_{2p}(0) = 0 \text{ et } A'_{2p+1}(0) = \frac{(-1)^p (2p+1)!}{(2^p p!)^2}.$$

II.4.

II.4.1. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -(x-y)(1-2xy+x^2)^{-3/2} & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x(1-2xy+x^2)^{-3/2}. \\ \forall (x, y) \in \mathcal{E} \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (x-y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Or pour $(x, y) \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(y) n x^{n-1} \quad \text{d'où} \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n A_n(y) x^n. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} A'_n(y) x^n \quad \text{d'où} \quad x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A'_n(y) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} A'_{n-1}(y) x^n \\ \text{et } y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} y A'_n(y) x^n. \end{aligned}$$

On obtient donc pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$,

$$y A'_0(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} (n A_n(y) + A'_{n-1}(y) - y A'_n(y)) x^n = 0.$$

On a déjà remarqué que pour tout réel y , il existe $h > 0$ tel que $] -h, h[\times \{y\} \subset \mathcal{E}$.

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, $(x \mapsto 0, x \in] -h, h[)$, on en déduit les égalités demandées :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad y A'_0(y) = 0 \quad \text{et pour tout } n \geq 1 \quad y A'_n(y) - A'_{n-1}(y) = n A_n(y)$$

II.4.2.

De la même façon, pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$, $(1-2xy+x^2) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (x-y)f(x, y) = 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) A_{n+1}(y) x^n, & 2xy \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n y A_n(y) x^n, \\ x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n A_n(y) x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) A_{n-1}(y) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) A_{n-1}(y) x^n, \\ x f(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_{n-1}(y) x^n & y f(x, y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} y A_n(y) x^n. \end{aligned}$$

On obtient donc pour $(x, y) \in \mathcal{E}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1) A_{n+1}(y) - (2n+1) y A_n(y) + n A_{n-1}(y)) x^n + A_1(y) - y A_0(y) = 0.$$

Par unicité, à y fixé du développement en série entière de la fonction $x \mapsto 0$ sur un intervalle ouvert $] -h, h[$, on en déduit les égalités (2) :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} A_1(y) - y A_0(y) = 0 \\ n A_n(y) - (2n-1) y A_{n-1}(y) + (n-1) A_{n-2}(y) = 0 \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

II.4.3. Pour $n = 1$, on obtient en dérivant la relation $A_1(y) - yA_0(y) = 0$ et en utilisant que $yA'_0(y) = 0$:

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad A'_1(y) = A_0(y).$$

La relation (3) est vraie pour $n = 1$.

Pour $n \geq 2$, en dérivant la relation (2), on a pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$nA'_n(y) - (2n-1)A_{n-1}(y) - (2n-1)yA'_{n-1}(y) + (n-1)A'_{n-2}(y) = 0. \quad (4)$$

D'autre part comme $n-1 \geq 1$, on a d'après la relation (1) :

$$A'_{n-2}(y) = yA'_{n-1}(y) - (n-1)A_{n-1}(y).$$

En injectant dans (4), on obtient après simplifications $nA'_n(y) - n^2A_{n-1}(y) - nyA'_{n-1}(y) = 0$.
Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad A'_n(y) - yA'_{n-1}(y) = nA_{n-1}(y). \quad (3)$$

II.4.4. Remarquons que d'après (1), A'_0 est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et donc sur $\mathbb{R}$ par continuité. On en déduit que $A''_0 = 0$ puis que la relation $(1-y^2)A''_n(y) - 2yA'_n(y) + n(n+1)A_n(y) = 0$ est vraie pour $n = 0$.

Pour $n \geq 1$, on obtient en dérivant (3) :

$$A''_n(y) - yA''_{n-1}(y) = (n+1)A'_{n-1}(y) \quad (5)$$

En dérivant (1) et en multipliant par y :

$$y^2A''_n(y) - yA''_{n-1}(y) = y(n+1)A'_n(y) - 2yA'_n(y). \quad (6)$$

(5) - (6) donne :

$$(1-y^2)A''_n(y) = (n+1)(A'_{n-1}(y) - yA'_n(y)) - 2yA'_n(y) = -n(n+1)A_n(y) - 2yA'_n(y) \text{ en utilisant (1).}$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (1-y^2)A''_n(y) - 2yA'_n(y) + n(n+1)A_n(y) = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\mathcal{B}_n)$ l'équation différentielle : $(1-x^2)z''(x) - 2xz'(x) + n(n+1)z(x) = 0$.

A_n et P_n sont solutions de $(\mathcal{B}_n)$ sur $\mathbb{R}$. De plus $P_n(0) = A_n(0)$ et $P'_n(0) = A'_n(0)$. (questions I.4 et II.3).

Comme $(\mathcal{B}_n)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre sans point singulier dans $] -1, 1 [$, on déduit du théorème de Cauchy-Lipschitz que P_n et A_n coïncident sur $] -1, 1 [$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in] -1, 1 [\quad A_n(y) = P_n(y).$$

Partie III

avertissement J'utiliserai sans le démontrer le résultat suivant qui ne figure pas au programme pc même s'il figure dans de nombreux cours et ouvrages :

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de complexes telles que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n|$ convergent, alors

la série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f 2π périodique dont les coefficients de Fourier trigonométriques sont les $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et les $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$ est donc alors le développement de f en série de Fourier.

III.1.

Pour tous réels x et θ , $1 - 2x \cos \theta + x^2 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$. Si x est fixé tel que $|x| < 1$, les fonctions $\theta \mapsto F(x, \theta)$, $\theta \mapsto C(x, \theta)$ et $\theta \mapsto S(x, \theta)$ sont donc définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel θ ,

$$C(x, \theta) + iS(x, \theta) = \frac{1 - xe^{-i\theta}}{(x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})} = \frac{1 - xe^{-i\theta}}{(xe^{-i\theta} - 1)(xe^{i\theta} - 1)} = \frac{1}{1 - e^{i\theta}x}.$$

Comme $|e^{i\theta}x| = |x| < 1$, on a $\frac{1}{1 - e^{i\theta}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{in\theta}$.

Soit finalement, si $|x| < 1$, pour tout réel θ ,

$$C(x, \theta) + iS(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta + i \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin n\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta + i \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin n\theta.$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire des deux membres de cette égalité, on en déduit que

$$\text{Pour } x \in]-1, 1[, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad C(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta \quad S(x, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin n\theta.$$

Comme $|x| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ est convergente : les séries trigonométriques $\sum_{n \geq 0} x^n \cos n\theta$ et $\sum_{n \geq 1} x^n \sin n\theta$ sont normalement convergentes et d'après le théorème mentionné plus haut, ces égalités sont les développements en série de Fourier des fonctions $\theta \mapsto C(x, \theta)$ et $\theta \mapsto S(x, \theta)$.

III.2. Soit toujours x réel fixé, $|x| < 1$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $2C(x, \theta) - 1 = (1 - x^2)F(x, \theta)$.

$$\text{On a donc } F(x, \theta) = \frac{1}{1 - x^2} (-1 + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta) = \frac{1}{1 - x^2} (1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos n\theta).$$

$$\text{Soit } F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \cos n\theta \text{ avec}$$

$$u_0(x) = \frac{1}{1 - x^2} \text{ et pour tout } n \geq 1, u_n(x) = \frac{2x^n}{1 - x^2}.$$

Comme $|x| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ converge et la série $\sum_{n \geq 0} |u_n(x)|$ converge également. On en déduit que la série

trigonométrique $\sum_{n \geq 0} u_n(x) \cos n\theta$ est normalement convergente et que l'égalité $F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \cos n\theta$ est le

développement en série de Fourier de $\theta \mapsto F(x, \theta)$.

$$\text{D'autre part, pour } x \in]-1, 1[\text{ et } \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin \theta C(x, \theta) + \cos \theta S(x, \theta) = \sin \theta F(x, \theta).$$

D'où

$$\sin \theta F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (\sin \theta \cos n\theta + \cos \theta \sin n\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin((n+1)\theta).$$

$$\text{Si } \sin \theta \neq 0, F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} x^n.$$

de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \mapsto \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ se prolonge par continuité en $k\pi$:

$$\text{En posant } \theta = k\pi + h, \sin \theta = (-1)^k \sin h \underset{h \rightarrow 0}{\sim} (-1)^k h.$$

$$\sin(n+1)\theta = (-1)^{k(n+1)} \sin(n+1)h \underset{h \rightarrow 0}{\sim} (-1)^{(n+1)k} (n+1)h.$$

$$\text{Finalement, } \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \underset{\theta \rightarrow k\pi}{\sim} (-1)^{nk} (n+1).$$

En prolongeant ainsi en $k\pi$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$, on peut écrire

$$\forall x \in]-1, 1[, \forall \theta \in \mathbb{R} \quad F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} x^n.$$

III.3.

Soit $q \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in]q\pi, (q+1)\pi[$, $|\cos \theta| < 1$ et d'après II.4.4, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P_p(\cos \theta) = A_p(\cos \theta)$.

On sait qu'il existe $h > 0$ tel que pour tout $x \in]-h, h[$, $(x, \cos \theta) \in \mathcal{E}$ et $f(x, \cos \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(\cos \theta) x^n$.

$\sum_{k=0}^n A_k(\cos \theta) A_{n-k} \cos \theta$ est alors le coefficient devant x^n dans le développement en série entière, pour $x \in]-h, h[$ de $x \mapsto f^2(x, \cos \theta) = F(x, \theta)$.

$$\text{Comme pour } |x| < 1, F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} x^n,$$

par unicité du développement en série entière de $x \mapsto F(x, \theta)$, pour $x \in]-h, h[$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^n P_k(\cos \theta) P_{n-k}(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}.$$

D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta \mapsto \sum_{k=0}^n P_k(\cos \theta) P_{n-k}(\cos \theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a déjà remarqué que

$\theta \mapsto \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ se prolonge par continuité en tout $q\pi$ où $q \in \mathbb{Z}$.

Par continuité, l'égalité précédente se prolonge donc en tout $q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n P_k(\cos \theta) P_{n-k}(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}.$$

Partie IV

IV.1.

Soit $z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ sur $] -R, R[$, $R \neq 0$. z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et :

$$z'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n x^{n-1} \text{ et } xz'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n \alpha_n x^n.$$

$$z''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \alpha_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) \alpha_{n+2} x^n$$

$$x^2 z''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \alpha_n x^n.$$

z est solution de (L_λ) sur $] -R, R[$ si et seulement si, sur $] -R, R[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1) \alpha_{n+2} - (n(n+1) - \lambda(\lambda+1)) \alpha_n) x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, ceci équivaut à

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2)(n+1) \alpha_{n+2} = (n(n+1) - \lambda(\lambda+1)) \alpha_n = (n-\lambda)(n+\lambda+1) \alpha_n.$$

$$z \text{ est solution de } (L_\lambda) \text{ si et seulement si pour tout } n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} = \frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(n+2)(n+1)} \alpha_n.$$

IV.2.

La formule de récurrence précédente équivaut à :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \alpha_{2p} = \frac{(2p-1+\lambda)(2p-2-\lambda)}{(2p(2p-1))} \alpha_{2(p-1)} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N} \quad \alpha_{2p+1} = \frac{(2p+\lambda)(2p-1-\lambda)}{(2p+1)(2p)} \alpha_{2p-1}.$$

Soit encore par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \alpha_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k-\lambda)(2k+1+\lambda)}{(2p)!} \alpha_0 \quad \alpha_{2p+1} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k-1-\lambda)(2k+\lambda)}{(2p+1)!} \alpha_1.$$

$$\text{IV.3. Soit } z_1 : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k-\lambda)(2k+1+\lambda)}{(2p)!} x^{2p} \text{ et } z_2 : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=1}^p (2k-1-\lambda)(2k+\lambda)}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

$$\text{Notons pour tout } p \in \mathbb{N}, \beta_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k-\lambda)(2k+1+\lambda)}{(2p)!} \text{ et } \beta_{2p+1} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k-1-\lambda)(2k+\lambda)}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

Comme $\lambda \notin \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \neq 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_{n+2}}{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(n+2)(n+1)} = 1. \text{ On a donc pour } x \neq 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{\beta_{2p+2} x^{2p+2}}{\beta_{2p} x^{2p}} \right| = |x^2| \text{ et } \lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{\beta_{2p+3} x^{2p+3}}{\beta_{2p+1} x^{2p+1}} \right| = |x^2|.$$

D'après la règle de D'alembert les séries $\sum_{p \geq 0} \beta_{2p} x^{2p}$ et $\sum_{p \geq 0} \beta_{2p+1} x^{2p+1}$ sont absolument convergentes si $|x| < 1$ et grossièrement divergentes si $|x| > 1$.

Ces deux séries entières ont toutes les deux pour rayon de convergence 1. Comme de plus elles sont "disjointes" (plus précisément les deux suites de leurs coefficients sont à supports disjoints), le rayon de convergence de toute combinaison linéaire non nulle de ces deux séries entières est encore 1.

Or les solutions développables en série entière de (L_λ) sont les fonctions $z = \alpha_0 z_1 + \alpha_1 z_2$. Ce sont (mis à part la fonction nulle) des sommes de série entière de rayon de convergence 1.

Comme (L_λ) est linéaire du second ordre sans point singulier dans $] -1, 1 [$, on obtient ainsi toutes les solutions de (L_λ) sur $] -1, 1 [$.