

Les parties I et II sont indépendantes.

Dans la partie I, les questions sont indépendantes dans une très large mesure.

Définitions

On rappelle que l'on désigne : par \mathbf{N} l'ensemble des entiers naturels,
 par \mathbf{N}^* l'ensemble des entiers naturels strictement positifs,
 par \mathbf{Q} l'ensemble des rationnels,
 par \mathbf{R}^+ l'ensemble des réels positifs.

Étant donné un réel positif x , on note $E(x)$ la partie entière de x :

$$E(x) \in \mathbf{N}, \quad \text{et} \quad E(x) \leq x < 1 + E(x).$$

n étant un entier naturel, on appelle u_n l'excès de x^n sur sa partie entière et v_n la distance de x^n à l'entier le plus voisin :

$$u_n = x^n - E(x^n); \quad 0 \leq u_n < 1; \quad \begin{cases} v_n = u_n & \text{pour } 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \\ v_n = 1 - u_n & \text{pour } \frac{1}{2} \leq u_n < 1. \end{cases}$$

On désigne par \mathcal{P} l'ensemble des x de \mathbf{R}^+ pour lesquels la série de terme général u_n est convergente, et la somme de cette série est alors notée $S(x)$.

On désigne par \mathcal{T} l'ensemble des x de \mathbf{R}^+ pour lesquels la série de terme général v_n est convergente, et la somme de cette série est alors notée $\Sigma(x)$.

Première partie

- 1) Démontrer que \mathbf{N} est inclus dans \mathcal{P} .
- 2) Démontrer que \mathcal{P} est inclus dans \mathcal{T} .

On se propose de démontrer que l'inclusion $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ est stricte, en mettant en évidence des réels $x \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{P}$.

- 3) On choisit $x = a + \sqrt{b}$ avec les quatre hypothèses :

$$a \in \mathbf{N}^*; \quad b \in \mathbf{N}^*; \quad \sqrt{b} \notin \mathbf{Q}; \quad |a - \sqrt{b}| < 1.$$

- a) Démontrer que $(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n$ est un entier ; dire si $x \in \mathcal{P}$ et si $x \in \mathcal{T}$.
- b) Exemples : $x = 1 + \sqrt{2}$ et $x = 2 + \sqrt{2}$; calculer celles des sommes S et Σ qui sont définies.
- 4) On choisit $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ et l'on associe à x les nombres complexes $y = 1 + j\sqrt[3]{2} + j^2\sqrt[3]{4}$ et $z = 1 + j^2\sqrt[3]{2} + j\sqrt[3]{4}$ où j est l'une des racines cubiques non réelles de l'unité.
 - a) Démontrer que y et z ont un module inférieur à 1.
 - b) Démontrer que x^n peut être écrit sous la forme : $x^n = a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4}$ où a_n, b_n, c_n sont des entiers positifs.
 - c) En notant M_n la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, démontrer les relations $M_{n+1} = AM_n$ et $M_n = A^n M_0$ où A est une matrice carrée constante que l'on déterminera.
 - d) Démontrer que x, y, z sont les valeurs propres de A .
 - e) Démontrer que a_n, b_n, c_n sont des formes linéaires en x^n, y^n, z^n . Expliciter a_n en fonction de x^n, y^n, z^n .
 - f) Dire si x appartient à \mathcal{P} et si x appartient à \mathcal{T} . On pourra écrire u_n et v_n en fonction du module r et de l'argument θ de y sans chercher à expliciter ces nombres. On ne demande pas le calcul des sommes des séries $S(x)$ et $\Sigma(x)$.

- 5) Montrer que le réel $\sqrt{2}$ n'appartient pas à \mathcal{T} . On pourra considérer le développement en base 2 de $\sqrt{2}$ et montrer qu'il est impossible que v_n tende vers zéro quand n croît indéfiniment.

Deuxième partie

On impose désormais à x d'être choisi dans l'intervalle $I = [0, 1[$.

- 1) Démontrer que x appartient à \mathcal{P} (et donc à \mathcal{T}) ; calculer $S(x)$.
- 2) Calculer $\Sigma(\frac{1}{2})$, $\Sigma(\frac{2}{3})$, $\Sigma(\frac{4}{5})$.
- 3) Démontrer que, pour tout x de I , il existe un entier naturel p , et un seul, tel que x appartienne à l'intervalle $I_p = \left[\frac{1}{2^{1/p}}, \frac{1}{2^{1/(p+1)}} \right[$ (on posera par convention : $\frac{1}{2^{1/0}} = 0$). Quelle est l'union des intervalles I_p quand p décrit \mathbf{N} ?
- 4) L'entier $p(x)$ étant alors connu, exprimer $\Sigma(x)$ en fonction de p et de x .
- 5) Étudier les variations de $\Sigma(x)$ quand x décrit I . Démontrer que cette fonction réalise une bijection entre I et \mathbf{R}^+ . Est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?
- 6) Démontrer que, lorsque p croît indéfiniment, l'intégrale de $\Sigma(x)$ sur I_p est un infiniment petit dont on donnera un équivalent. Donner de même un équivalent pour l'intégrale de $S(x)$ sur I_p . Les intégrales $\int_{x=0}^1 \Sigma(x) dx$ et $\int_{x=0}^1 (S(x) - \Sigma(x)) dx$ sont-elles convergentes ?

Corrigé

I

- 1) Pour $x \in \mathbf{N}$ on a $u_n = 0$ pour tout n .
 2) Si $x \in \mathcal{P}$ alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc on a $v_n = u_n$ à partir d'un certain rang.

3) a) $(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n = 2 \sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k} a^{n-2k} b^k \in \mathbf{N}$.

Si $0 < a - \sqrt{b} < 1$ alors $E((a + \sqrt{b})^n) = (a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n - 1$ donc $u_n = 1 - (a - \sqrt{b})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, d'où $x \notin \mathcal{P}$ et $v_n = (a - \sqrt{b})^n$ pour n assez grand, donc $x \in \mathcal{T}$.

Si $-1 < a - \sqrt{b} < 0$ alors $E((a + \sqrt{b})^{2n}) = (a + \sqrt{b})^{2n} + (a - \sqrt{b})^{2n} - 1$ donc $u_{2n} = 1 - (a - \sqrt{b})^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, d'où $x \notin \mathcal{P}$ et $v_n = |a - \sqrt{b}|^n$ dès que $|a - \sqrt{b}|^n \leq \frac{1}{2}$, donc $x \in \mathcal{T}$.

Le cas $a - \sqrt{b} = 0$ est impossible puisque $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$.

b) Pour $x = 1 + \sqrt{2}$ on a $v_n = (\sqrt{2} - 1)^n$ pour tout $n \geq 1$, donc $\Sigma(1 + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour $x = 2 + \sqrt{2}$ on a $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2} - 1$, et $v_n = (2 - \sqrt{2})^n$ pour $n \geq 2$, d'où :

$$\Sigma(2 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 + \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{\sqrt{2} - 1} = 3(\sqrt{2} - 1).$$

4) a) $4|y|^2 = 4|z|^2 = (2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})^2 + 3(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})^2 = 4(\sqrt[3]{2} - 1)^2 < 4$.

b) Développer complètement $(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^n$ et simplifier.

On trouve par la même méthode : $y^n = a_n + b_n j \sqrt[3]{2} + c_n j^2 \sqrt[3]{4}$ et $z^n = a_n + b_n j^2 \sqrt[3]{2} + c_n j \sqrt[3]{4}$.

c) $x^{n+1} = (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(a_n + b_n \sqrt[3]{2} + c_n \sqrt[3]{4}) = (a_n + 2b_n + 2c_n) + (a_n + b_n + 2c_n) \sqrt[3]{2} + (a_n + b_n + c_n) \sqrt[3]{4}$.

Par liberté de $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ sur \mathbf{Q} on en déduit :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n + c_n \end{cases} \quad \text{soit : } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Méthode calculatoire : $\chi_A(X) = -X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ et $\chi_A(x) = \dots \text{calculs} \dots = 0 = \chi_A(y) = \chi_A(z)$. On a trois racines distinctes pour un polynôme de degré 3, donc ce sont les racines de χ_A .

Méthode algébrique : si E est la \mathbf{Q} -algèbre engendrée par $\mathcal{B} = (1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$, alors A est la matrice dans \mathcal{B} de l'endomorphisme $\varphi : t \mapsto xt$ donc pour $P \in \mathbf{Q}[X]$ quelconque, $P(A)$ est la matrice de $P(\varphi) : t \mapsto P(x)t$. En prenant $P = \chi_A$ qui est annulateur de A et donc de φ , on obtient $\chi_A(x) = 0$ car E est intègre. Le même raisonnement appliqué aux \mathbf{Q} -algèbres engendrées par $\mathcal{B}' = (1, j \sqrt[3]{2}, j^2 \sqrt[3]{4})$ et $\mathcal{B}'' = (1, j^2 \sqrt[3]{2}, j \sqrt[3]{4})$ montre que y et z sont aussi racines de χ_A .

e) Soit $A = P \text{diag}(x, y, z) P^{-1}$ une diagonalisation sur \mathbf{C} de A (qui a trois valeurs propres distinctes). Alors :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = P \text{diag}(x^n, y^n, z^n) P^{-1} M_0$$

donc a_n, b_n, c_n sont des combinaisons linéaires de x^n, y^n, z^n à coefficients complexes indépendants de n .

D'après les relations : $x^n = a_n + b_n \sqrt[3]{2} + c_n \sqrt[3]{4}$, $y^n = a_n + b_n j \sqrt[3]{2} + c_n j^2 \sqrt[3]{4}$ et $z^n = a_n + b_n j^2 \sqrt[3]{2} + c_n j \sqrt[3]{4}$ on obtient : $a_n = \frac{1}{3}(x^n + y^n + z^n)$.

f) $x^n = 3a_n - y^n - z^n = 3a_n - 2r^n \cos(n\theta)$ et $0 < r < 1$. Donc pour n assez grand, $v_n = 2r^n |\cos(n\theta)|$ et la série de terme général v_n converge, soit $x \in \mathcal{T}$. Supposons $x \in \mathcal{P}$: alors $u_n = v_n$ pour tout n suffisamment grand, donc $\cos(n\theta) \leq 0$ pour $n \geq n_0$. Notons α un argument de $e^{in_0\theta}$ tel que $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$. Comme $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$,

il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leq \alpha + k\theta < \frac{\pi}{2}$ d'où $\cos((n_0 + k)\theta) > 0$ en contradiction avec l'hypothèse faite. Ceci prouve que $x \notin \mathcal{P}$.

5) Soit $\sqrt{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}$ avec $\alpha_0 \in \mathbf{Z}$ et $\alpha_k \in \{0, 1\}$ pour $k \geq 1$. On a :

$$v_{2n+1} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k}}{2^k} & \text{si } \alpha_{n+1} = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha_{n+k}}{2^k} & \text{si } \alpha_{n+1} = 1. \end{cases}$$

En particulier $v_{2n+1} \geq \frac{1}{4}$ si $\alpha_{n+1} \neq \alpha_{n+2}$ et cette condition est réalisée une infinité de fois car $\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$. Donc v_n ne tend pas vers zéro quand n tend vers l'infini, et $\sum v_n$ est grossièrement divergente.

II

1) $u_0 = 0$ et $u_n = x^n$ pour $n \geq 1$ donc $S(x) = \frac{x}{1-x}$.

2) Pour $x = \frac{1}{2}$ on a $v_0 = 0$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$ si $n \geq 1$ d'où $\Sigma(\frac{1}{2}) = 1$.

Pour $x = \frac{2}{3}$ on a $v_0 = 0$, $v_1 = \frac{1}{3}$ et $v_n = (\frac{2}{3})^n$ si $n \geq 2$ d'où $\Sigma(\frac{2}{3}) = \frac{5}{3}$.

Pour $x = \frac{4}{5}$ on a $v_0 = 0$, $v_1 = \frac{1}{5}$, $v_2 = \frac{9}{25}$, $v_3 = \frac{61}{125}$ et $v_n = (\frac{4}{5})^n$ si $n \geq 4$ d'où $\Sigma(\frac{4}{5}) = \frac{387}{125}$.

3) La suite $(1/2^{1/p})_{p \geq 0}$ est strictement croissante et tend vers 1 quand $p \rightarrow \infty$. Donc $\bigcup_{p \in \mathbf{N}} I_p = [0, 1[= I$ et cette réunion est disjointe, d'où l'existence et l'unicité de l'intervalle I_p contenant x .

4) Puisque $x \in I_p$, on a $x^n \geq \frac{1}{2} \iff n \leq p$, d'où :

$$\Sigma(x) = \sum_{n=1}^p (1 - x^n) + \sum_{n=p+1}^{\infty} x^n = p - \frac{x - x^{p+1}}{1-x} + \frac{x^{p+1}}{1-x} = p - \frac{x - 2x^{p+1}}{1-x}.$$

5) D'après l'expression précédente, Σ est continue strictement croissante sur chaque intervalle I_p .

De plus, $\Sigma(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1/2^{1/(p+1)}} p + 1 = \Sigma(1/2^{1/(p+1)})$ donc Σ est continue strictement croissante sur la réunion des intervalles I_p et n'est pas majorée, d'où $\Sigma(I) = \mathbf{R}^+$.

Σ est de classe \mathcal{C}^1 sur chaque intervalle I_p avec $\Sigma'(x) = \frac{-1 + 2(p+1)x^p - 2px^{p+1}}{(1-x)^2}$. On en déduit, par passage à la limite dans la dérivée, pour $x^p = \frac{1}{2}$: $\Sigma'_d(x) = \frac{p}{1-x}$ et $\Sigma'_g(x) = \frac{p}{x(1-x)}$ donc Σ n'est pas dérivable en $1/2^{1/p}$ pour $p \geq 1$, mais est dérivable à droite en 0.

6) Pour $x \in I_p$ on a $p \leq \Sigma(x) \leq p + 1$ d'où :

$$p \left(\frac{1}{2^{1/(p+1)}} - \frac{1}{2^{1/p}} \right) \leq \int_{x \in I_p} \Sigma(x) dx \leq (p+1) \left(\frac{1}{2^{1/(p+1)}} - \frac{1}{2^{1/p}} \right).$$

Or, $\frac{1}{2^t} = \exp(-t \ln 2) = -t \ln(2) + \frac{t^2 \ln^2(2)}{2} + O(t^3)$ donc :

$$\frac{1}{2^{1/(p+1)}} - \frac{1}{2^{1/p}} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \ln(2) - \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \right) \frac{\ln^2(2)}{2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) = \frac{\ln 2}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right).$$

On en déduit : $\int_{x \in I_p} \Sigma(x) dx \sim \frac{\ln 2}{p}$ donc la série de terme général $\int_{I_p} \Sigma$ est divergente et l'intégrale $\int_{t=0}^1 \Sigma(x) dx$ aussi (découpage de l'intervalle pour une fonction positive).

$$\int_{x \in I_p} S(x) dx = \int_{x \in I_p} \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) dx = \left[-\ln(1-x) - x \right]_{x=1/2^{1/p}}^{x=1/2^{1/(p+1)}}.$$

On a : $\ln(1 - 2^{-t}) = \ln\left(t \ln(2) - \frac{t^2 \ln^2(2)}{2} + O(t^3)\right) = \ln(t \ln 2) - \frac{t \ln(2)}{2} + O(t^2)$ d'où :

$$\int_{x \in I_p} S(x) dx = \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \sim \frac{1}{p}.$$

Enfin, pour $x \in [0, 1[$, si (u_n) et (v_n) sont les suites associées à x^n on a $v_n = \min(u_n, 1 - u_n) \leq u_n$ donc $S - \Sigma$ est positive et $\int_{x \in I_p} (S(x) - \Sigma(x)) dx \sim \frac{1 - \ln 2}{p}$ (par différence de DL) donc $\int_{x=0}^1 (S(x) - \Sigma(x)) dx$ diverge.