Signalons d'abord que ce problème est presque entièrement repompé sur l'épreuve à option M du concours de l'Ecole de l'Air 1992 en renumérotant les questions et en changeant quelques notations. On a également ajouté quelques questions intermédiaires, principalement au début quand "l'auteur" du sujet était encore en forme. On a même supprimé des indications précieuses comme d'utiliser une représentation graphique pour obtenir l'encadrement du I.H)... Supprimer la question I.2.c) n'est pas une très bonne idée dans le sens où elle est indépendante du reste et permet de"vérifier" les calculs (compliqués) de la fin. On peut affirmer que le jury Centrale TSI a une très haute estime de la filière TSI.
Remarquons aussi que le problème n°2 des ENSI-TA de 1985 fait faire des chose un peu plus simples, un peu ressemblantes mais souvent d'une autre façon. Le premier qui dit que le niveau des épreuves baisse a perdu.
Pour terminer rappelons que l'horaire hebdomadaire en sup et spé TA en 1985 était de 14H, de même que celui des sup et spé M en 1992 tandis que l'horaire hébdomadaire des sup et spé TSI est de 11 et 10H en incluant le soutien des sup...

I.A) On étudie les variations de f définie par $f(x) = x + \ln(1-x)$. On calcule facilement $f'(x) = \dfrac{-x}{1-x} \leqslant 0$ sur $[0,1[$. f est donc décroissante sur cet intervalle et comme $f(0) = 0$

$$\forall x \in [0,1[\quad f(x) \leqslant 0$$

De même, l'étude des variations de f définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$ de dérivée $\dfrac{x}{1+x} \geqslant 0$ sur $[0,1[$. f est donc croissante sur cet intervalle et comme $f(0) = 0$

$$\forall x \in [0,1[\quad f(x) \geqslant 0$$

I.B) On a $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
D'autre part $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$. Ce qui prouve que (u_n) décroit.
Enfin $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0$. Ce qui prouve maintenant que (v_n) croit.
Ces deux suites sont donc adjacentes de limite γ. On a donc

$$\forall n \geqslant 2 \quad v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$

I.C) Pour avoir une valeur approchée à 10^{-1} près, il suffit $|u_n - v_n| \leqslant \dfrac{1}{10}$, il suffit donc d'avoir $n \geqslant 10$. v_{10}, u_{10} constitue donc un encadrement de 2 valeurs approchées de γ à $\dfrac{1}{10}$ près.

$$\gamma \simeq 0,5$$

I.D)

$$\begin{aligned}
w_n &= \ln \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $w_n \backsim \dfrac{1}{2n^2}$, On travaille à partir d'un certain rang, $\sum w_n$ est une série positive convergente.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p+1}^{p+k} w_n &= \sum_{n=p+1}^{p+k} \ln p - \sum_{n=p+1}^{p+k} \ln(p-1) - \sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{1}{p} \\
&= \sum_{n=p+1}^{p+k} \ln p - \sum_{n=p}^{p+k-1} \ln p - \sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{1}{p} \\
&= \ln(p+k) - \ln p - (S_{p+k} - S_p) \\
&= u_p - u_{p+k}
\end{aligned}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} w_n = u_p - \gamma$$

I.E.1) $\int_{k-1}^{k} g(t)\,dt$ n'est que le calcul de l'aire d'un trapèze rectangle (!) de hauteur 1 et de bases $f(k-1)$ et $f(k)$.

$$\begin{aligned}
\int_{k-1}^{k} g(t)\,dt &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k}
\end{aligned}$$

I.E.2) Les fonctions étant affines sur chaque intervalle, la dérivée en un point fixe la pente de la courbe.

$$\begin{aligned}
&\forall t \in \left]-\infty, k-\frac{1}{2}\right[\quad h(t) = f'(k-1)(t-k+1) + f(k-1) \\
&= \frac{-1}{(k-1)^2}(t-k+1) + \frac{1}{k-1} \\
&= \frac{-t}{(k-1)^2} + \frac{2}{k-1} \\
&\forall t \in \left[k-\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad h(t) = f'(k)(t-k) + f(k) \\
&= \frac{-t}{k^2} + \frac{2}{k}
\end{aligned}$$

I.E.3) Le seul problème de continuité est en $k-\frac{1}{2}$. $h\left(k-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k}$ et la limite à gauche en ce point est $\frac{-1}{2(k-1)^2} + \frac{1}{k-1}$. En général, on n'a donc pas continuité de h. Sauf peut-être si la différence est nulle :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k} - \left(\frac{-1}{2(k-1)^2} + \frac{1}{k-1}\right) &= \frac{(1+2k)(k-1)^2 - (2k-3)k^2}{2k^2(k-1)^2} \\
&= \frac{1}{2k^2(k-1)^2}
\end{aligned}$$

Et donc, h n'est jamais continue en $k-\frac{1}{2}$.

I.E.4) $\int_{k-1}^{k} h(t)\,dt$ n'est que le calcul de l'aire de deux trapèzes rectangles (!) de hauteur $\frac{1}{2}$. Les bases du premier sont $\frac{1}{k-1}$ et $\frac{1}{k-1} + \frac{-1}{2(k-1)^2}$. Les bases du second sont $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k} - \frac{-1}{2k^2}$.

$$\begin{aligned}
\int_{k-1}^{k} h(t)\,dt &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \frac{-1}{2(k-1)^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{-1}{2k^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{k-1} - \frac{1}{2(k-1)^2} + \frac{2}{k} + \frac{1}{2k^2}\right) \\
&= \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2}
\end{aligned}$$

I.F) f est convexe car de dérivée seconde positive. g a pour courbe représentative la corde de *la* courbe représentative de f et h a pour courbe représentative deux tangentes à celle de f. La corde est au dessus d'une courbe convexe et les tangentes en dessous... Ceci fournit sans calculs les inégalités demandées.

I.G) De l'inégalité précédente, on déduit :

$$\int_{k-1}^{k} h(t)\,dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leqslant \int_{k-1}^{k} g(t)\,dt$$

$$\frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2} \leqslant \ln\frac{k}{k-1} \leqslant \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k}$$

I.H) On enlève $\frac{1}{k}$ à chacun des membres de l'inégalité précédente, ce qui donne :

$$\frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2} \leqslant w_k \leqslant \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k}$$

On somme de $k = n+1$ à $n+p$: on a d'abord

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2(k-1)} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2k} + \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{8k^2} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{8(k-1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} w_k$$

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+p)} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{8(n+p)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} w_k$$

On a également :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2(k-1)} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2k}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k \leqslant \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+p)}$$

On passe à la limite sur ces inégalités quand $p \to +\infty$ et on obtient :

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{2n}$$

I.I) Quand $\frac{1}{8n^2} \leqslant 10^{-3}$, c'est à dire dès que $n^2 \geqslant 125$ ou encore $n \geqslant 12$, on a $u_n - \frac{1}{2n}$ qui est une valeur approchée de γ à 10^{-3} près. On choisit $u_{12} - \frac{1}{24}$

$$\gamma \simeq 0,576$$

II.A) $\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt$ est généralisée en 1 mais on verra que la fonction a une limite finie en 1 et donc l'intégrale converge. En effet on remplace $\frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$, de limite n en 1, et on obtient :

$$\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^1 t^i dt = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i+1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

II.B) Dans l'égalité précédente, on fait le changement de variable, monotone de classe $\mathcal{C}^1$, $t = 1-\dfrac{x}{n}$, comme la première intégrale convergeait, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \int_n^0 \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)}d\left(1-\frac{x}{n}\right)$$
$$= \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx$$

De plus $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i} - \ln n$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx - \ln n\\
&= \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx + \int_1^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx - \ln n\\
&= \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx + \int_1^n \frac{1}{x}dx - \ln n\\
&= \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx
\end{aligned}$$

II.C.1) La courbe représentative de l'exponentielle, convexe, est au dessus de sa tangente en $(0,1)$ d'équation $y = 1+x$. On peut aussi faire un calcul de variation comme au I.A). Ceci montre que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1+x \leqslant e^x$$

II.C.2) Les deux quantités étant positives, leur inégalité équivaut à l'inégalité de leur puissance $\dfrac{1}{n}$ème. On retrouve le II.C.1) où on a changé x en $-\dfrac{x}{n}$.

II.C.3) On fait la même chose qu'en II.C.2) mais en changeant x en $\dfrac{x}{n}$.

II.C.4) Soit $f(u) = (1-u)^n - 1 + nu$, de dérivée $f'(u) = n\left(1 - (1-u)^{n-1}\right) \geqslant 0$ pour $u \in [0,1]$. Comme $f(0) = 0$:

$$\forall u \in [0,1] \quad (1-u)^n - 1 + nu \geqslant 0$$

On remplace u par $\dfrac{x^2}{n^2}$ pour avoir l'inégalité demandée.

II.C.5) L'inégalité de gauche n'est autre que le II.C.2). On réécrit le II.C.4) :

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 - \frac{x^2}{n}$$

On utilise II.C.3) :

$$\begin{aligned} e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n &\geqslant 1 - \frac{x^2}{n} \\ \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n &\geqslant e^{-x} - \frac{x^2}{n} e^{-x} \\ \frac{x^2}{n} e^{-x} &\geqslant e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Ce qui est la deuxième inégalité.

II.D) Le problème de convergence de l'intégrale est en $+\infty$. La fonction est positive et pour $x \geqslant 1$, on a $\dfrac{e^x}{x} \leqslant e^x$ dont l'intégrale converge par limite finie d'une primitive. $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^x}{x} dx$ converge.

On a

$$u_n = \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{x} dx - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{x} dx$$

et

$$e^{-x} - \frac{x^2}{n} e^{-x} \leqslant \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$$

D'où :

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx - \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1 - e^{-x} + \frac{x^2}{n} e^{-x}}{x} dx - \int_1^n \frac{e^{-x} - \frac{x^2}{n} e^{-x}}{x} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx - \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx - \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx + \frac{1}{n} \int_0^n x e^{-x} dx$$

Or $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ converge, par application par exemple du théorème des croissances comparées. donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \int_0^n x e^{-x} dx = 0$. On passe à la limite dans les inégalités précédentes. Ces limites existent bien et par application du théorème des gendarmes :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

III.A) On va faire un développement limité de φ à partir d'un développement limité à l'ordre 2 de e^{-x}.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{1-(1-x+x^2/2+o(x^2))} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x-x^2/2+o(x^2)} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x/2+o(x)} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que φ est prolongeable par continuité en 0 par $\frac{1}{2}$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$, ce qui prouve que φ est bornée au voisinage de 0 et de $+\infty$, et comme elle est continue sur $]0,+\infty[$, elle y est bornée par K.

III.B) On a $|e^{-x}\varphi(x)| \leqslant Ke^{-x}$ dont l'intégrale sur $]0,+\infty[$ converge. Ceci prouve que $\int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx$ converge absolument donc converge.

III.C) L'intégrale $I_n(a)$ converge puisque $0 \leqslant \dfrac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} \leqslant \dfrac{e^{-x}}{a}$. De plus, on peut casser cette intégrale en deux intégrales convergentes par le même type de majoration.

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x}dx$$

On fait le changement de variable monotone de classe $\mathcal{C}^1$ $nx = u$ dans la deuxième intégrale par ailleurs convergente. On y remplacera formellement ensuite u par x.

$$\begin{aligned}
I_n(a) &= \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx - \int_{na}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx - \int_{na}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx \\
&= \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x}dx = \int_a^{na} \frac{1-(1-e^{-x})}{x}dx = \int_a^{na} \frac{1}{x}dx - \int_a^{na} \frac{(1-e^{-x})}{x}dx \\
&= \ln n - \int_a^{na} \frac{(1-e^{-x})}{x}dx
\end{aligned}$$

III.D) Pour $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx$, le seul problème de convergence de l'intégrale qui reste est en 0. Mais un développement limité donne :

$$\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} = \frac{1-x-1+nx+o(x)}{x} = n-1+o(1)$$

Comme on a une limite finie en un point fini, l'intégrale converge.

De plus
$$\lim_{a\to 0} I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx$$
par définition d'une intégrale convergente.
Soit F une primitive de $\dfrac{(1-e^{-x})}{x}$, F a bien une limite finie en 0 puisque son intégrale converge.
$$I_n(a) = \ln n - F(na) + F(a)$$
On passe à la limite quand a tend vers 0 et :
$$\lim_{a\to 0} I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx = \ln n$$

III.E)
$$\begin{aligned}
v_n &= S_{n-1} - \ln n \\
&= S_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx \\
&= S_{n-1} - \int_0^{+\infty} \left(e^{-x}-e^{-nx}\right)\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \varphi(x)\right)dx \\
&= S_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-x}-e^{-nx})}{1-e^{-x}}dx + \int_0^{+\infty} \left(e^{-x}-e^{-nx}\right)\varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$
On pose $u = e^{-x}$, qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}^1$ dans la première intégrale qui est bien convergente.
$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-x}-e^{-nx})}{1-e^{-x}}dx = -\int_1^0 \frac{1-u^{n-1}}{1-u}du = S_{n-1}$$
en utilisant le II.A). Il ne reste qu'à conclure :
$$v_n = \int_0^{+\infty} \left(e^{-x}-e^{-nx}\right)\varphi(x)\,dx$$

III.F) On casse encore la dernière intégrale obtenue en deux intégrales convergentes.
$$v_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx - \int_0^{+\infty} e^{-nx}\varphi(x)\,dx$$
Mais $|e^{-nx}\varphi(x)| \leqslant Ke^{-nx}$, et $\int_0^{+\infty} Ke^{-nx}dx = \dfrac{K}{n}$.
Ceci prouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx}\varphi(x)\,dx = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \gamma$, on a aussi :
$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx$$

IV.A) $\ker(\varphi)$ et $\ker(\varphi_n)$ sont clairement constitués des polynômes constants $\mathbb{R}_0[X]$.
$\mathrm{Im}(\varphi_n)$ est donc de dimension n et comme $\deg(\varphi_n(P)) = \deg(P) - 1$ dès que P n'est pas constant, $\mathrm{Im}(\varphi_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour $n \geqslant 1$.
Et finalement $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}[X]$.

IV.B) Deux antécédants diffèrent d'un élément du noyau, c'est à dire d'un polynôme constant. Si on fixe la valeur en 0 l'antécédant est alors unique. Il est de degré $p+1$.

IV.C.1) Pour $p \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(Q_p) &= P_p'(X+1) - P_p'(0) - \big(P_p'(X) - P_p'(0)\big) \\
&= P_p'(X+1) - P_p'(X) \\
&= (P_p(X+1) - P_p(X))' \\
&= (\varphi(P_p)(X))' \\
&= pX^{p-1}
\end{aligned}$$

IV.C.2) On en déduit dans les mêmes conditions :

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{1}{p}Q_p\right) &= X^{p-1} \\
\frac{1}{p}Q_p(0) &= 0
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que :

$$\frac{1}{p}Q_p = P_{p-1}$$

IV.D) Le calcul devient assez facile par récurrence. On a

$$\begin{aligned}
P_p'(X) - P_p'(0) &= pP_{p-1}(X) \\
P_p(X) - XP_p'(0) &= \int_0^X pP_{p-1}(t)\,dt
\end{aligned}$$

Il nous reste donc une constante à calculer. On a déjà utilisé $P_p(0) = 0$, de plus, pour p non nul, $P_p(1) = 0$. On obtient :

$$-P_p'(0) = \int_0^1 pP_{p-1}(t)\,dt$$

et donc :

$$P_p(X) = \int_0^X pP_{p-1}(t)\,dt - X\int_0^1 pP_{p-1}(t)\,dt$$

ceci pour p non nul. On amorce avec $P_0(X) = 1$ qu'on peut faire de tête...

On peut programmer facilement ce calcul en Maple. Si on fait au plus simple, on peut par exemple avoir :

```
>P:=X;
>for p from 1 to 5 do
 P:=expand(p*(int(P,X)-X*int(P,X=0..1)));
 od;
```

Signalons que l'énoncé utilise p et P dans la même question, ce qui n'améliore pas la lisibilité. Au moins, on n'avait pas cet inconvénient dans l'énoncé d'origine... On trouve :

$$\begin{aligned}
P_0(X) &= X \\
P_1(X) &= \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\
P_2(X) &= \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X \\
P_3(X) &= \frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{4}X^2 \\
P_4(X) &= \frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{30}X \\
P_5(X) &= \frac{1}{6}X^6 - \frac{1}{2}X^5 + \frac{5}{12}X^4 - \frac{1}{12}X^2
\end{aligned}$$

IV.E) On a : $P_5'(0) = 0$, $P_5'(X)$ est donc du signe de $P_4(X)$ qu'on factorise :

$$\begin{aligned}
P_4(X) &= \frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{30}X \\
&= \frac{X(X-1)(2X-1)\left(3X^2-3X-1\right)}{30}
\end{aligned}$$

$\left(3X^2-3X-1\right)$ n'a pas de racine entre 0 et 1. $P_5(X)$ est donc décroissant sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, croissant sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$. On a donc :

$$P_5\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant P_5(X) \leqslant 0$$

Et $P_5\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{128}$ achève la question.

IV.F.1) On cherche une relation de récurrence :

$$\begin{aligned}
I_p(k) &= \int_0^1 \frac{pP_{p-1}(t)}{(t+k)^{p+1}}dt \\
&= \int_0^1 \frac{Q_p(t)}{(t+k)^{p+1}}dt \\
&= \int_0^1 \frac{P_p'(t) - P_p'(0)}{(t+k)^{p+1}}dt \\
&= \int_0^1 \frac{P_p'(t)}{(t+k)^{p+1}}dt - P_p'(0)\left[-\frac{1}{p}\frac{1}{(t+k)^p}\right]_0^1 \\
&= \underbrace{\left[\frac{P_p(t)}{(t+k)^{p+1}}\right]_0^1}_{=0} + (p+1)\int_0^1 \frac{P_p(t)}{(t+k)^{p+2}}dt - P_p'(0)\left[-\frac{1}{p}\frac{1}{(t+k)^p}\right]_0^1 \\
&= I_{p+1}(k) + \frac{P_p'(0)}{p}\left(\frac{1}{(1+k)^p} - \frac{1}{k^p}\right)
\end{aligned}$$

Ou encore :

$$I_{p+1}(k) = I_p(k) - \frac{P_p'(0)}{p}\left(\frac{1}{(1+k)^p} - \frac{1}{k^p}\right)$$

IV.F.2)

$$\begin{aligned}
I_1(k) &= \int_0^1 \frac{P_0(t)}{(t+k)^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{t}{(t+k)^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t+k} - \frac{k}{(t+k)^2}dt \\
&= \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

IV.F.3)

$$\begin{aligned}
I_6(k) = I_1(k) &- \frac{P_5'(0)}{5}\left(\frac{1}{(1+k)^5} - \frac{1}{k^5}\right) - \frac{P_4'(0)}{4}\left(\frac{1}{(1+k)^4} - \frac{1}{k^4}\right) \\
&- \frac{P_3'(0)}{3}\left(\frac{1}{(1+k)^3} - \frac{1}{k^3}\right) - \frac{P_2'(0)}{2}\left(\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{1}{k^2}\right) - \frac{P_1'(0)}{1}\left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k}\right) \\
&= I_1(k) - \frac{1}{120}\left(\frac{1}{(1+k)^4} - \frac{1}{k^4}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

IV.F.4) On utilise le IV.E) et on obtient :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{128} &\leqslant P_5(X) \leqslant 0\\ -\frac{1}{128}\int_0^1 \frac{6}{(t+k)^7}dt &\leqslant I_6(k) \leqslant 0\\ -\frac{1}{128}\left(-\frac{1}{(1+k)^6}+\frac{1}{k^6}\right) &\leqslant I_6(k) \leqslant 0\end{aligned}$$

IV.F.5) On a :

$$\begin{aligned}u_n-\gamma &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} I_1(k-1) = \sum_{k=n}^{+\infty} I_1(k)\\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} I_6(k) + \frac{1}{120}\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+k)^4}-\frac{1}{k^4}\right)\\ &+ \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+k)^2}-\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+k}-\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

En effet, toutes ces séries convergent et pour les séries de différences, on a facilement leur somme en prenant la limite des sommes partielles comme on l'a fait au I.H). On reprend donc :

$$u_n-\gamma = \sum_{k=n}^{+\infty} I_6(k) + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{2n}$$

L'encadrement obtenu au IV.F.4) nous donne :

$$-\frac{1}{128n^6}+\frac{1}{120n^4}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{2n} \leqslant u_n-\gamma \leqslant \frac{1}{120n^4}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{2n}$$

IV.F.6) Il suffit d'avoir $\frac{1}{128n^6} \leqslant 10^{-10}$, c'est à dire $n \geqslant \left(\frac{10^{10}}{128}\right)^{1/6}$, $n = 21$ convient. La valeur approchée cherchée est donc :

$$\begin{aligned}\gamma &\backsimeq u_{21} - \frac{1}{120\times 21^4} + \frac{1}{12\times 21^2} - \frac{1}{2\times 21}\\ &\backsimeq 0,5772156648\end{aligned}$$