

Première partie

- 1°) On utilise le théorème spectral : M , symétrique réelle, admet une base $\mathcal{B}$ orthonormée de vecteurs propres. En écrivant $(x)_i$ les composantes d'un vecteur quelconque $x \in \mathbb{R}^n$ dans cette base, on a que l'expression du produit scalaire est l'expression canonique, et d'autre part, que $M.x$ s'écrit simplement en fonction des valeurs propres (λ_i) correspondantes de M : $(M.x)_i = \lambda_i.(x)_i$. On en déduit : $(Mx | x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.(x)_i^2$. D'où, en appelant p (respectivement q) la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs propres de M , on a l'inégalité :

$$p.\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n p.(x)_i^2 \leq (Mx | x) \leq \sum_{i=1}^n q.(x)_i^2 = q.\|x\|^2.$$

Remarquons que ces inégalités sont les meilleures possibles, puisqu'elles deviennent des égalités lorsque x est un vecteur propre associé à la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs propres.

- 2°) La condition suffisante découle de l'inégalité ci-dessus : si $p > 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $(Mx | x) \geq p.\|x\|^2 \geq 0$; d'autre part, 0 n'est alors pas valeur propre, donc $M.x = 0 \Rightarrow x = 0$, et M est injective, donc inversible. Mais la condition est aussi nécessaire, car l'inégalité $(Mx | x) \geq 0$ doit être en particulier vraie pour les vecteurs propres (non nuls) de M , d'où, pour toute valeur propre λ_i de M , $\lambda_i.\|x\|^2 \geq 0$, soit $\lambda_i \geq 0$; de plus, l'inversibilité de M interdit la valeur propre 0, donc les valeurs propres λ_i de M sont bien > 0 .

- 3°) En se plaçant toujours dans une base orthonormée propre pour M , on a, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|M.x\|^2 = \sum_{i=1}^n (Mx)_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.(x)_i^2 \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2 \right) \cdot \sum_{i=1}^n (x)_i^2 = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2 \right) . \|x\|^2.$$

En prenant la racine carrée des deux membres de l'inégalité ci-dessus, et en utilisant $\sqrt{\left(\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2 \right)} = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|M.x\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| . \|x\|$, d'où déjà l'implication :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| = 1 \Rightarrow \|M.x\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| ;$$

Mais la première inégalité ci-dessus devient une égalité si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_{i_0} telle que $|\lambda_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$. Comme un vecteur propre, non nul, peut toujours être normalisé, on voit que dans l'implication (1) on peut obtenir l'égalité à droite. Donc le nombre $\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ est le plus petit des majorants possibles, soit par définition, $N(M) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$.

- 4°) On suppose ici, comme indiqué dans le préambule de cette partie de l'énoncé, que A est inversible, donc (cf 2.) que les valeurs propres de A sont *strictement* positives.

La formule de récurrence s'écrit $x^{k+1} = S.x^k + \alpha.b$ où on a posé $S = Id - \alpha.A$. S est encore une matrice symétrique, dont les valeurs propres sont les $1 - \alpha.\lambda_i$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ étant les valeurs propres (distinctes ou non) de A . Vu la condition imposée à α , les valeurs propres de S sont dans $] -1, 1[$, et en particulier $N(S) < 1$. L'unique point z vérifiant $A.z = b$ vérifie aussi $z = S.z + \alpha.b$, donc la suite de vecteurs $y^k = z - x^k$ vérifie la relation de récurrence $y^{k+1} = S.y^k$, soit $y^k = S^k.y^0$. Par propriété de la norme N , $\|S.y\| \leq N(S).\|y\|$, on a donc $\|y^k\| \leq (N(S))^k . \|y^0\|$. De $N(S) \in]0, 1[$ on conclut alors que $y^k \rightarrow 0$, soit $x^k \rightarrow z$.

- 5°) Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on trouve :

$$f(x+u) - f(x) = (Ax | u) - (b | u) + \frac{1}{2}(Au | u) = (Ax - b | u) + \frac{1}{2}(Au | u).$$

- 6°) Par définition, une dérivée partielle s'obtient en cherchant la limite de $\frac{1}{t}(f(x+te_k) - f(x))$ lorsque $t \rightarrow 0$. Par le calcul précédent, on a

$$\frac{1}{t}(f(x+te_k) - f(x)) = (Ax - b | e_k) + \frac{t}{2}(Ae_k | e_k),$$

et il en résulte clairement l'existence de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, égale à $(Ax - b | e_k)$.

- 7°) On sait qu'en base orthonormée les composantes d'un vecteurs s'expriment par les produits scalaires avec les vecteurs de base, donc, vu la définition de g et le calcul ci-dessus, on a $g(x) = Ax - b$.
- 8°) Cela a été vu en 1. : par 5., $I(x, u) = \frac{1}{2}(Au \mid u)$ où la matrice $\frac{1}{2}A$ est symétrique définie positive, donc l'encadrement $r\|u\|^2 \leq I(x, u) \leq s\|x\|^2$ a lieu pour r, s respectivement égaux à l'inf et au sup des valeurs propres de $\frac{1}{2}A$.
- 9°) Condition nécessaire : un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$ est a fortiori un minimum local et par théorème ($\mathbb{R}^n$ est un ouvert !), c'est nécessairement un point critique.
Condition suffisante : si $g(x) = 0$, on a pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, puisque $I(x, u) \geq 0$, $f(x+u) = f(x) + I(x, u) \geq f(x)$, donc $f(x)$ est un minimum absolu.
- 10°) En appliquant le calcul du 5. au vecteur $u = -\alpha.g(x) = -\alpha(Ax - b)$, on obtient (par 1. et définition de λ_n) :

$$f(x - \alpha g(x)) - f(x) = -\alpha(g(x) \mid g(x)) + \frac{\alpha^2}{2}(Ag(x) \mid g(x)) \leq \left(-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\lambda_n\right) \|g(x)\|^2.$$

L'hypothèse $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$ entraîne $-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\lambda_n < 0$, donc $f(x - \alpha g(x)) - f(x) \leq 0$ (l'inégalité est même stricte sauf si $g(x) = 0$).

- 11°) L'algorithme consiste à prendre un $y^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque (par exemple $y^0 = 0$) puis de définir (y^k) par la relation $y^{k+1} = y^k - \alpha.g(y^k)$, α choisi comme précédemment. On obtient ainsi une suite (y^k) telle que $f(y^k)$ soit strictement décroissante. On remarque que cette suite est en fait exactement celle définie au 4., puisque $g(x) = Ax - b$. Elle converge donc vers $z = A^{-1}b$, qui vérifie $g(z) = 0$. Par 9., f admet bien un minimum en $z = \lim y^k$ dans ce cas.

Deuxième partie

- 12°) Par 1. on a une inégalité de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad r.\|x\|^2 \leq \frac{1}{2}(Ax \mid x)$, $r = \frac{1}{2} \min_{\lambda \in sp(A)} \lambda$ étant strictement positif. De plus, par Cauchy-Schwarz, $(b \mid x) \leq \|b\|.\|x\|$. D'où finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) \geq \|x\|.(r.\|x\| - \|b\|).$$

Comme la fonction au membre de droite $z \mapsto h(z) = z(rz - \|b\|)$ tend vers $+\infty$ quand $z = \|x\| \rightarrow \infty$, la propriété demandée est clairement vérifiée.

- 13°) C'est la propriété précédente, appliquée à $c = f(y)$, et restreinte aux vecteurs x de F .
- 14°) Un sous-espace vectoriel étant non vide, soit $y \in F$ fixé. Par ci-dessus, r étant choisi tel que $\|x\| \geq r \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, le minimum de $f|_F$ est à chercher dans $K = F \cap \bar{B}(0, r)$. Or, en dimension finie, un sous-espace vectoriel est un fermé, ainsi qu'une boule fermée, et de même pour leur intersection. Donc K , fermé et borné d'un espace vectoriel de dimension finie, est compact. f est une application continue (car polynômiale en les composantes), donc elle admet un minimum $\bar{x}$ atteint sur K , cqfd.
- 15°) Admettons f convexe, et supposons l'existence de 2 minimums $\bar{x} \neq \bar{y}$ à $f|_F$. Déjà, par double inégalité, $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$. Puis, pour $\lambda = 1/2$, par exemple, on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y}\right) < \frac{1}{2}f(\bar{x}) + \frac{1}{2}f(\bar{y}) = f(\bar{x}),$$

ce qui, puisque $\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y}$ reste dans F , contredit que $\bar{x}$ est un minimum pur $f|_F$. Donc le minimum, qui existe par 14., est unique.

Remarque : f est la somme d'une fonction quadratique $x \mapsto \frac{1}{2}(Ax \mid x)$ et d'une fonction linéaire $x \mapsto -(b \mid x)$. Une fonction linéaire étant évidemment convexe (au sens large), la stricte convexité de f résulte de celle de $x \mapsto \frac{1}{2}(Ax \mid x)$. Or celle-ci découle simplement de la définie positivité de la matrice symétrique A . On a en effet, pour tout $\lambda \in]0, 1[$ et pour tout x, y de $\mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$:

$$\begin{aligned} & (A((1-\lambda)x + \lambda y) \mid (1-\lambda)x + \lambda y) \stackrel{?}{<} (1-\lambda)(Ax \mid x) + \lambda(Ay \mid y) \\ \iff & \lambda(1-\lambda)(Ax \mid x) - 2\lambda(1-\lambda)(Ax \mid y) + \lambda(1-\lambda)(Ay \mid y) \stackrel{?}{>} 0 \\ \iff & \lambda(1-\lambda)(A(x-y) \mid x-y) \stackrel{?}{>} 0, \end{aligned}$$

et cette dernière inégalité est acquise par hypothèse sur λ et définie-positivité de A .

16°) g , calculé à la question 7., est le gradient de f , et on sait que, pour tout vecteur u , $\frac{\partial f}{\partial u}(y) = df_y(u) = (g(y) | u)$.
Or, $\frac{\partial f}{\partial u}(y)$ représente la dérivée en $t = 0$ de la fonction $\varphi : t \mapsto f(y + t.u)$, donc si $y \in F$ est un minimum pour $f|_F$, et si $u \in F$, φ admet un minimum absolu en 0. Il en résulte bien $0 = \varphi'(0) = (g(y) | u) = (Ay - b | u)$.
Réciproquement, si $Ay - b$ est orthogonal à F , on a comme à la question 9. que $\forall u \in F$ $f(y+u) - f(y) = I(y, u) = \frac{1}{2}(Au | u) \geq 0$, et $f(y)$ est bien un minimum de $f|_F$.

17°) On a donc $(A\bar{x} - b | \bar{x}) = 0$, soit $(A\bar{x} | \bar{x}) = (b | \bar{x})$. De l'expression de f on déduit alors

$$f(\bar{x}) = -\frac{1}{2}(A\bar{x} | \bar{x}) = -\frac{1}{2}(b | \bar{x}) .$$

18°) Petite difficulté non signalée ici : les *inf* et *sup* sont à prendre dans $\bar{R}$: par exemple, si $Bx \neq 0$, comme la fonction $y \mapsto L(x, y)$ est linéaire, elle est non bornée car non identiquement nulle !
L'inégalité demandée est une propriété générale des fonctions de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\bar{R}$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, en utilisant que le sup (respectivement l'inf) est un majorant (respectivement un minorant), on a :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, y) \leq f(x, y) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} f(x, y) ,$$

inégalité qu'on peut noter $m(y) \leq M(x)$. A x fixé, $M(x)$ est un majorant des $m(y)$, donc, puisque le sup est le plus petit des majorants, $\sup_{y \in \mathbb{R}^n} m(y) \leq M(x)$; puis, par le même raisonnement, quand x varie dans $\mathbb{R}^n$, l'inf étant le plus grand des majorants, $\sup_{y \in \mathbb{R}^n} m(y) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} M(x)$, ce qui est l'inégalité demandée.

19°) En un point selle (x^*, y^*) on a les inégalités

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad L(x^*, y) \stackrel{(1)}{\leq} L(x^*, y^*) \stackrel{(2)}{\leq} L(x, y^*) .$$

L'inégalité (1) donne, puisque le sup est plus petit qu'un majorant, $\sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*)$. Puis, comme l'inf minore une instance particulière, $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x, y) \leq L(x^*, y^*)$. De même, l'inégalité (2) donne $L(x^*, y^*) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y^*)$, puis $L(x^*, y^*) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y)$. A cause de l'inégalité «inverse» démontrée en 18., les inégalités ci-dessus sont des égalités, cqfd.

20°) • On cherche une proposition équivalente à la proposition

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad L(x_1, y) - L(x_1, y_1) = (y - y_1 | Bx_1) \leq 0 .$$

Si $Bx_1 = 0$, l'inégalité est vraie car c'est une égalité, si $Bx_1 \neq 0$, l'inégalité est fausse pour $y = y_1 + Bx_1$, donc la CNS est bien $Bx_1 = 0$.

• Par propriété du produit scalaire canonique, on a

$$(y_1 | Bx) = {}^t y_1 . Bx = {}^t ({}^t y_1 . Bx) = {}^t x {}^t B y_1 = ({}^t B y_1 | x) ,$$

On voit donc qu' y_1 fix $L(x, y_1) = \frac{1}{2}(Ax | x) - (b | x) + ({}^t B y_1 | x)$ est une fonction f o on a remplacé b par $b - {}^t B y_1$. La question 9. dit alors que $x \mapsto L(x, y_1)$ admet un minimum en x_1 si et seulement si $Ax_1 = b - {}^t B y_1$, soit $Ax_1 + {}^t B y_1 = b$, ce qui est bien la proprit demande.

21°) La définition du point selle donne par les équivalences ci-dessus où on a remplacé (x_1, y_1) par (x^*, y^*) :

$$(x^*, y^*) \text{ point selle} \Rightarrow Bx^* = 0 \text{ et } Ax^* + {}^t B y^* = b .$$

Mais de plus, quand $Bx = 0$, i.e. quand $x \in F$, $L(x, y)$ se réduit à $f(x)$. Donc, l'inégalité de définition $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*)$ implique bien que $f(x^*)$ est un minimum de $f|_F$.

Réciproquement, si $x_1 \in F$ réalise un minimum pour $f|_F$, on a $Bx_1 = 0$, et si de plus $Ax_1 + {}^t B y_1 = b$ la question 20. assure que (x_1, y_1) est un point selle par définition du point selle.

- 22°)** • A $y = y^m$ fixé, l'application $x \mapsto L(x, y^m) = \frac{1}{2}(Ax \mid x) - (b - {}^tBy^m \mid x)$ est du même type que la fonction f dans les questions **14.** et **15.**, elle admet donc un minimum et un seul. Ainsi x^m est bien défini, ainsi que $y^{m+1} = y^m + \rho_m \cdot Bx^m$.
 • Par **20.** on a $Ax^m + {}^tBy^m = b$, par **21.**, $Ax^* + {}^tBy^* = b$, donc par différence, $A(x^m - x^*) + {}^tB(y^m - y^*) = 0$.
 • Toujours par **21.**, on sait que $x^* \in F$, donc $Bx^* = 0$. Ainsi la relation $y^{m+1} - y^* = y^m - y^* + \rho_m \cdot B(x^m - x^*)$ découle-t-elle de la relation de définition de y^{m+1} .

- 23°)** Par bilinéarité du produit scalaire, la dernière relation ci-dessus implique

$$\|y^{m+1} - y^*\|^2 = \|y^m - y^*\|^2 + \rho_m^2 \cdot \|B(x^m - x^*)\|^2 + 2\rho_m \cdot (y^m - y \mid B(x^m - x)) \quad .$$

Mais par **22.**

$$(y^m - y \mid B(x^m - x)) = ({}^tB(y^m - y) \mid x^m - x) = -(A(x^m - x^*) \mid x^m - x^*) \quad ,$$

et donc finalement

$$\|y^{m+1} - y^*\|^2 = \|y^m - y^*\|^2 + \rho_m^2 \cdot \|B(x^m - x^*)\|^2 - 2\rho_m \cdot (A(x^m - x^*) \mid x^m - x^*) \quad .$$

- 24°)** Classique ; les valeurs propres λ_i de A sont > 0 , donc admettent des racines carrées réelles. En écrivant une diagonalisation de A sous la forme $A = P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot {}^tP$, P matrice carrée orthogonale, on voit que la matrice $A^{1/2} = P \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot {}^tP$ convient : elle est bien symétrique réelle, à valeurs propres positives donc positive, et $(A^{1/2})^2 = A$.

Notons qu'en fait, puisque les λ_i sont strictement positives, A est définie positive, donc $A^{-1/2}$ existe bien.

- 25°)** L'inverse d'une matrice symétrique inversible est symétrique, donc $A^{-1/2}$ est symétrique. Il en résulte par la règle de transposition d'un produit, ${}^tC = {}^tA^{-1/2} \cdot {}^tB \cdot B \cdot {}^tA^{-1/2} = C$: C est symétrique.
 Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(Cx \mid x) = (A^{-1/2} \cdot {}^tB \cdot B \cdot A^{-1/2} \cdot x \mid x) = (B \cdot A^{-1/2} \cdot x \mid B \cdot A^{-1/2} \cdot x) = \|B \cdot A^{-1/2} \cdot x\|^2 \geq 0$, donc C est positive.
 Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, posons $x = A^{1/2} \cdot u \Leftrightarrow u = A^{-1/2}x$. Par le calcul ci-dessus et par **1.**,

$$\|Bu\|^2 = (Cx \mid x) \leq \left(\sup_{\mu \in sp(C)} \mu \right) \cdot (x \mid x) = \nu \cdot (A^{1/2}u \mid A^{1/2}u) = \nu \cdot (Au \mid u) \quad ,$$

où on a posé $\nu = \sup_{\mu \in sp(C)} \mu$.

- 26°)** L'égalité de **23.** donne alors, puisque $\rho_m \geq 0$:

$$\|y^{m+1} - y^*\|^2 - \|y^m - y^*\|^2 = \rho_m \left(\rho_m \|Bu^m\|^2 - 2(Au^m \mid u^m) \right) \leq \rho_m (\rho_m \nu - 2)(Au^m \mid u^m) \quad .$$

Par les hypothèses sur ρ_m , $\rho_m \nu - 2 < 0$, et comme A est positive, on a $\|y^{m+1} - y^*\|^2 - \|y^m - y^*\|^2 \leq 0$: la suite $\|y^m - y^*\|$ est décroissante.

- 27°)** La suite positive décroissante $\|y^m - y^*\|^2$ est donc convergente, ce qui implique que $\|y^{m+1} - y^*\|^2 - \|y^m - y^*\|^2 \rightarrow 0$. Compte tenu des hypothèses sur ρ_m , l'inégalité ci-dessus donne

$$\|y^{m+1} - y^*\|^2 - \|y^m - y^*\|^2 \leq \alpha(\beta\nu - 2)(Au^m \mid u^m) \leq 0 \quad , \quad \text{avec } \alpha(\beta\nu - 2) \neq 0 \quad ,$$

d'où par théorème d'encadrement des limites, $(Au^m \mid u^m) \rightarrow 0$. Mais alors, de l'encadrement, donné par **1.**, $0 \leq \|u^m\|^2 \leq \frac{1}{\rho}(Au^m \mid u^m)$, on déduit que $\|u^m\| \rightarrow 0$, soit que $x^m \rightarrow x^*$.

*
* *