

I. Préliminaires.

1. $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ d'où

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad 2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

2. a. Si $\langle x, y \rangle = 0$, l'inégalité à prouver est triviale.

Sinon, $x \neq 0_E$ et $\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ est un trinôme en λ qui ne prend que des valeurs ≥ 0 pour tout λ de $\mathbb{R}$, car c'est $\|\lambda x + y\|^2$. Donc son discriminant est ≤ 0 . Dans les deux cas,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

b. Dans le premier cas l'égalité a lieu si et seulement si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$.

Dans le second cas l'égalité a lieu si et seulement si le discriminant est nul, ce qui équivaut pour le trinôme à l'existence d'une racine double λ_0 , qui vérifie donc : $\lambda_0 x + y = 0_E$.

Dans les deux cas :

$$\text{L'égalité a lieu si et seulement si la famille } (x, y) \text{ est liée.}$$

c. Soit $C([0, a], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, a]$, à valeurs réelles. $(f, g) \mapsto \int_0^a fg$ est une application de $(C([0, a], \mathbb{R}))^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est :

- symétrique (commutativité du produit de fonctions);
 - linéaire à gauche (calcul dans l'e.v. et linéarité de l'intégrale);
 - définie positive : $\forall f \in C([0, a], \mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\int_0^a f^2 > 0$ par le théorème de stricte positivité des intégrales.
- Cette application est donc un produit scalaire sur $C([0, a], \mathbb{R})$ et grâce à l'inégalité de Schwarz, on a :

$$\forall (f, g) \in (C([0, a], \mathbb{R}))^2, \quad \left| \int_0^a f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\left(\int_0^a f^2(t) dt \right) \left(\int_0^a g^2(t) dt \right)}.$$

3. $\forall x \in E$, $\varphi(x, 0_E) = \frac{1}{2} (N^2(x + 0_E) - N^2(x) - N^2(0_E)) = -\frac{1}{2}N^2(0_E)$.

φ est linéaire à droite donc $\varphi(x, 0_E) = 0$. D'où $N(0_E) = 0$.

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, -x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (N^2(0_E) - N^2(x) - N^2(-x)) = -N^2(x) & \text{car } N(-x) = N(x) \\ -\varphi(x, x) & \text{(linéarité à droite)} \end{cases}$$

Donc, comme N est à valeurs positives : $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$.

$$N \text{ est la norme hilbertienne associée à } \varphi.$$

II. Équivalence de normes.

1. L'image du segment $[0, 1]$ par l'application continue p est un segment $[p_0, p_1]$; comme pour tout x de $[0, 1]$, $p(x) > 0$, $[p_0, p_1] \subset \mathbb{R}_+^*$ et en particulier $p_0 > 0$.

De même, l'image du segment $[0, 1]$ par l'application continue q est un segment $[q_0, q_1]$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ car pour tout x de $[0, 1]$, $q(x) \geq 0$.

$$\text{Il existe trois réels positifs } p_0, p_1 \text{ et } q_1 \text{ tels que : } \forall x \in [0, 1], \quad 0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1 \quad \text{et} \quad q(x) \leq q_1.$$

2. a. $L : v \mapsto \int_0^1 fv$ est une application de H dans $\mathbb{R}$; on a déjà rappelé au **1.2.c** qu'une application du type $(f, g) \mapsto \int_0^a fg$ est bilinéaire; la linéarité de L en résulte.

$$L \text{ est une forme linéaire sur } H.$$

b. On vérifie comme au **I.2.c** que $(u, v) \mapsto \int_0^1 uv + u'v'$ est une application de H^2 dans $\mathbb{R}$ symétrique et linéaire à gauche. Elle est positive, grâce à la positivité de l'intégrale. Montrons qu'elle est définie : soit $u \in H$ tel que $\int_0^1 u^2 + u'^2 = 0$. Alors comme la fonction $u^2 + u'^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$, par le théorème de stricte positivité des intégrales, $\forall x \in [0, 1], u^2(x) + u'^2(x) = 0$. Les deux termes de la somme étant ≥ 0 , on a nécessairement $\forall x \in [0, 1], u^2(x) = u'^2(x) = 0$ et en particulier, $u = 0_H$.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } H.$$

c. On vérifie comme ci-dessus que $(u, v) \mapsto \int_0^1 quv + pu'v'$ est une application de H^2 dans $\mathbb{R}$ symétrique, linéaire à gauche et positive. Montrons qu'elle est définie : soit $u \in H$ tel que $\int_0^1 qu^2 + pu'^2 = 0$. On en déduit : $\forall x \in [0, 1], q(x)u^2(x) + p(x)u'^2(x) = 0$. Les deux termes de la somme étant ≥ 0 , on a nécessairement $\forall x \in [0, 1], p(x)u'^2(x) = 0$ et comme $p(x) \neq 0$, c'est $u'(x)$ qui est nul. Donc u est une fonction constante. Comme $u(0) = 0$, c'est la fonction nulle.

$$b \text{ est un produit scalaire sur } H.$$

3. a. On peut appliquer l'inégalité du **I.2.c** avec $a = 1$ à la fonction f et à toute fonction v de H :

$$|L(v)| \leq \left(\int_0^1 f^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^1 v^2 \right)^{1/2}.$$

Comme $v'^2 \geq 0$, $\int_0^1 v^2 \leq \int_0^1 v^2 + v'^2$ d'où *a fortiori*, en notant $\gamma = \left(\int_0^1 f^2 \right)^{1/2}$:

$$\exists \gamma \geq 0, \forall v \in H, |L(v)| \leq \gamma \|v\|.$$

b. Par l'inégalité de Schwarz : $|b(u, v)| \leq \sqrt{b(u, u)b(v, v)} = \left(\int_0^1 qu^2 + pu'^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^1 qv^2 + pv'^2 \right)^{1/2}$.

$\int_0^1 qu^2 + pu'^2 \leq \int_0^1 q_1 u^2 + p_1 u'^2 \leq \delta \int_0^1 u^2 + u'^2 = \delta \|u\|^2$ avec $\delta = \max(p_1, q_1) > 0$. L'autre intégrale se majore de même, donc :

$$\exists \delta > 0, \forall (u, v) \in H^2, |b(u, v)| \leq \delta \|u\| \|v\|.$$

4. a. Pour toute fonction v de H , et pour tout x de $[0, 1]$: $v(x) = v(0) + \int_0^x v'(t) dt = \int_0^x v'(t) dt$ donc

$$|v(x)| = \left| \int_0^x v'(t) dt \right| \leq \left(\int_0^x 1 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x v'^2(t) dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{x} \left(\int_0^1 v'^2(t) dt \right)^{1/2} \text{ d'où}$$

$$\forall v \in H, \forall x \in [0, 1], v^2(x) \leq x \int_0^1 v'^2(t) dt.$$

b. Pour toute fonction v de H , $\|v\|^2 = \int_0^1 v^2(x) dx + \int_0^1 v'^2(x) dx \leq \int_0^1 \left(x \int_0^1 v'^2(t) dt \right) dx + \int_0^1 v'^2(t) dt = \left(\int_0^1 x dx + 1 \right) \int_0^1 v'^2(t) dt = \frac{3}{2} \int_0^1 v'^2(t) dt$.

Donc $p_0 \|v\|^2 \leq \frac{3p_0}{2} \int_0^1 v'^2(t) dt \leq \frac{3}{2} \int_0^1 p(t) v'^2(t) dt \leq \frac{3}{2} \int_0^1 (q(t) v^2(t) + p(t) v'^2(t)) dt = \frac{3}{2} b(v, v)$.

$$\forall v \in H, p_0 \|v\|^2 \leq \frac{3}{2} b(v, v).$$

5. Si u_1 et u_2 sont des fonctions de H vérifiant : $\forall v \in H, b(u_1, v) = b(u_2, v)$, alors $\forall v \in H, b(u_1 - u_2, v) = 0$ donc $u_1 - u_2 \in H^{\perp_b} = \{0_H\}$. Donc $u_1 = u_2$.

6. a. Une fonction u est dite de classe C^1 par morceaux sur $[0, 1]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[0, 1]$ telle que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la restriction de u à $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[x_{i-1}, x_i]$. σ est alors dite adaptée à u .

Si u et v sont dans G , u' et v' sont continues par morceaux sur $[0, 1]$ et on étend la définition de $\langle u, v \rangle$ par

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u(t)v(t) + u'(t)v'(t)) dt \quad \text{où } (x_i)_{0 \leq i \leq n} \text{ est une subdivision adaptée à } uv + u'v'. \text{ On peut}$$

montrer de plus que $\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u(t)v(t) + u'(t)v'(t)) dt$ est indépendante du choix de la subdivision adaptée

à $uv + u'v'$, et on peut encore noter $\langle u, v \rangle = \int_0^1 uv + u'v'$.

On définit de manière analogue $b(u, v)$ avec u et v dans G .

b. Si $v \in G$ vérifie $b(v, v) = 0$, alors $\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} qv^2 + pv'^2 = 0$ où $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision adaptée à $qv^2 + pv'^2$. Cette somme de termes ≥ 0 est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\int_{x_{i-1}}^{x_i} qv^2 + pv'^2 = 0$ où v' désigne par abus le prolongement continu sur $[x_{i-1}, x_i]$ de la restriction de v' à $]x_{i-1}, x_i[$. On en déduit, de même qu'au **II.2.c.** que v est constante sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Par continuité de v , cette constante est la même sur chaque intervalle de la subdivision, et comme $v(0) = 0$, v est la fonction nulle sur $[0, 1]$.

III. Équation de Sturm-Liouville.

1. Dans le cas particulier $p : x \mapsto e^{-\alpha x}$, $q = 0$ et $f : x \mapsto -2n_0\pi \cos(2n_0\pi x)$, l'équation $-\frac{d}{dx}(pu') + qu = f$ s'écrit $\frac{d}{dx}(e^{-\alpha x}u') = 2n_0\pi \cos(2n_0\pi x)$ d'où : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad e^{-\alpha x}u' = \sin(2n_0\pi x) + \lambda$ puis $u' = \sin(2n_0\pi x)e^{\alpha x} + \lambda e^{\alpha x}$.

$$\int e^{2n_0\pi i x} e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha + 2n_0\pi i} e^{(\alpha + 2n_0\pi i)x} \quad \text{d'où}$$

$$\int \sin(2n_0\pi x) e^{\alpha x} dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2} \sin(2n_0\pi x) e^{\alpha x} - \frac{2n_0\pi}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2} \cos(2n_0\pi x) e^{\alpha x} \quad \text{et}$$

$$u = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2} \sin(2n_0\pi x) e^{\alpha x} - \frac{2n_0\pi}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2} \cos(2n_0\pi x) e^{\alpha x} + \frac{\lambda}{\alpha} e^{\alpha x} + \mu, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$ conduisent à $\begin{cases} \frac{\lambda}{\alpha} + \mu = \frac{2n_0\pi}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2} \\ \frac{\lambda}{\alpha} e^\alpha + \mu = \frac{2n_0\pi}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2} e^\alpha \end{cases}$

qui a pour unique solution $\mu = 0$, $\lambda = \alpha \frac{2n_0\pi}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2}$. Donc :

$$u = e^{\alpha x} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2} \sin(2n_0\pi x) + \frac{2n_0\pi}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2} (1 - \cos(2n_0\pi x)) \right)$$

2. $-\frac{d}{dx}(pu') + qu = f$ donc pour tout v de H , $-\int_0^1 \frac{d}{dx}(pu')v + \int_0^1 quv = \int_0^1 fv$, et en intégrant par parties : $-[pu'v]_0^1 + \int_0^1 (pu') \frac{dv}{dx} + \int_0^1 quv = \int_0^1 fv$.

$v(0) = v(1) = 0$ donc le terme tout-intégré est nul; il reste $\int_0^1 pu'v' + quv = \int_0^1 fv$, soit $b(u, v) = L(v)$.

$$(1) \text{ et } (2) \text{ impliquent } (3).$$

Si u est solution de (3), alors $b(u, v)$ ne dépend que de v ; on a donc, si u_0 est aussi une solution de (3), $b(u, v) = b(u_0, v)$ pour tout v de H . D'après le **II.5.**, on a $u = u_0$, d'où l'unicité. Comme il est admis que le système constitué par (1) et (2) possède au moins une solution,

$$(3) \text{ admet une unique solution } u \text{ dans } H.$$

3. a. Avec u solution de (3), on a, pour tout w de H :

$$J(u + w) = \frac{1}{2}b(u + w, u + w) - L(u + w) = \frac{1}{2}(b(u, u) + 2b(u, w) + b(w, w)) - L(u) - L(w)$$

$$= \left(\frac{1}{2}b(u, u) - L(u)\right) + (b(u, w) - L(w)) + \frac{1}{2}b(w, w) = J(u) + \frac{1}{2}b(w, w) \geq J(u)$$

Il en résulte, en posant $w = v - u$:

$$\forall v \in H, \quad J(u) \leq J(v).$$

b. Avec $u_0 \in H$ tel que $\forall v \in H, J(u_0) \leq J(v)$, on a, pour tout réel λ et tout w de H :

$$J(u_0 + \lambda w) - J(u_0) = \frac{1}{2}b(u_0 + \lambda w, u_0 + \lambda w) - L(u_0 + \lambda w) - J(u_0)$$

$$= \frac{1}{2}(b(u_0, u_0) + 2\lambda b(u_0, w) + \lambda^2 b(w, w)) - L(u_0) - \lambda L(w) - J(u_0)$$

$$= \left(\frac{1}{2}b(u_0, u_0) - L(u_0)\right) - J(u_0) + \lambda b(u_0, w) - \lambda L(w) + \frac{\lambda^2}{2}b(w, w)$$

$$= \lambda(b(u_0, w) - L(w)) + \frac{\lambda^2}{2}b(w, w)$$

Donc, pour tout λ de $\mathbb{R}$, $\frac{\lambda^2}{2}b(w, w) + \lambda(b(u_0, w) - L(w)) \geq 0$. Pour $w \neq 0$, on a un trinôme en λ de signe constant donc son discriminant est ≤ 0 , ce qui équivaut à $(b(u_0, w) - L(w))^2 \leq 0$ soit encore à $b(u_0, w) = L(w)$. Si $w = 0$, cette égalité est encore vraie donc :

$$\boxed{\forall w \in H, \quad b(u_0, w) = L(w).}$$

4. a. Pour tout w de W : $w - u = (w - \pi_W(u)) + (\pi_W(u) - u)$ avec $w - \pi_W(u) \in W$ et $\pi_W(u) - u \in W^{\perp_b}$ donc par le théorème de Pythagore : $b(w - u, w - u) = b(w - \pi_W(u), w - \pi_W(u)) + b(\pi_W(u) - u, \pi_W(u) - u)$ d'où :

$$\boxed{\forall w \in W, \quad b(w - u, w - u) \geq b(\pi_W(u) - u, \pi_W(u) - u).}$$

b. u désigne toujours une solution du problème de Sturm-Liouville, et u_W est un élément quelconque de G . Condition nécessaire : si $u_W = \pi_W(u)$, alors $u_W \in \text{Im}(\pi_W) = W$.

De plus, en notant $z = u - u_W$, z est dans $W^{\perp_b}$ donc pour tout v de W :

$b(u, v) = b(u_W + z, v) = b(u_W, v) + b(z, v) = b(u_W, v)$. Comme u vérifie (3), on a $b(u_W, v) = L(v)$.

Condition suffisante : si $u_W \in W$ et $b(u_W, v) = L(v)$ pour tout v de W , alors, en posant $z = u - u_W$, $b(z, v) = b(u, v) - b(u_W, v) = L(v) - L(v) = 0$ pour tout v de W donc $z \in W^{\perp_b}$. On a $u = u_W + z$ avec $(u_W, z) \in W \times W^{\perp_b}$, donc u_W est le projeté orthogonal de u sur W pour le produit scalaire b : $u_W = \pi_W(u)$.

$$\boxed{\text{Étant donné } u_W \text{ dans } G, \text{ il y a équivalence entre : } u_W = \pi_W(u) \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_W \in W \\ \forall v \in W, \quad b(u_W, v) = L(v) \end{cases}}$$

c. u_W désigne ici $\pi_W(u)$, et on a : $u_W = \sum_{i=1}^d \alpha_i \varphi_i$.

En appliquant la propriété : $\forall v \in W, \quad b(u_W, v) = L(v)$ pour $v = \varphi_i$, ($i \in \llbracket 1, d \rrbracket$), on a :

$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad b\left(\sum_{j=1}^d \alpha_j \varphi_j, \varphi_i\right) = L(\varphi_i)$ donc, par linéarité à gauche et symétrie :

$$\boxed{(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \text{ sont solutions du système : } \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^d b(\varphi_i, \varphi_j) \alpha_j = L(\varphi_i) \quad (4).}$$

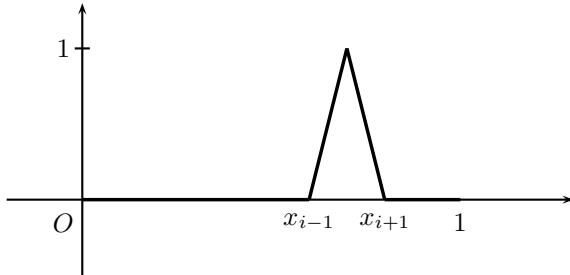
La matrice B de ce système est la matrice de la restriction de la forme bilinéaire symétrique b à W dans la base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$. En notant V le vecteur colonne des coordonnées dans cette base de $v \in W$, on a : $BV = 0 \Rightarrow {}^tVBV = 0 \Leftrightarrow b(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$ car b est définie. Donc $\text{rg}(B) = d$ et

$$\boxed{\text{Le système (4) est de Cramer.}}$$

IV. Approximations de la solution u .

1. a. Courbe de φ_i : $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{|x - x_i|}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



b. Commençons par constater que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, φ_i est dans G , donc $W_n = \text{vect}(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un sous-espace vectoriel de G . De plus, pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc, si $\varphi = \sum_{i=1}^n t_i \varphi_i$, on a : $\varphi(x_j) = t_j$.

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad t_i = \varphi(x_i).}$$

Supposons que l'on ait $\sum_{i=1}^n t_i \varphi_i = 0_G$. Alors, d'après ce qui précède, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $t_i = 0_G(x_i) = 0$.
Donc la famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

$$\boxed{(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ est une base de } W_n.}$$

c. Soit (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ vérifiant $|j - i| \geq 2$. $]x_{i-1}, x_{i+1}[\cap]x_{j-1}, x_{j+1}[= \emptyset$ donc $\varphi_i(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi_j(x) = 0$ d'où pour tout x de $[0, 1]$, $\varphi_i(x) \varphi_j(x) = 0$.

Sur $[0, 1] \setminus \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$, chaque fonction φ_i est dérivable et on constate de même que pour tout x de cet ensemble, $\varphi'_i(x) \varphi'_j(x) = 0$.

Donc $b(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} q \varphi_i \varphi_j + p \varphi'_i \varphi'_j = 0$.

$$\boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \text{ tel que } |j - i| \geq 2, \quad b(\varphi_i, \varphi_j) = 0.}$$

2. a. φ'_i est l'application de $[0, 1] \setminus \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } x \in]x_{i-1}, x_i[\\ -\frac{1}{h} & \text{si } x \in]x_i, x_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Avec $p(x) = e^{-\alpha x}$ ($\alpha \neq 0$) et $q = 0$, on a :

$$\begin{aligned} b(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{h^2} \left[-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right]_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = \frac{1}{\alpha h^2} (e^{-\alpha x_{i-1}} - e^{-\alpha x_{i+1}}) = \frac{1}{\alpha h^2} (e^{-\alpha(i-1)h} - e^{-\alpha(i+1)h}) \\ &= \frac{1}{\alpha h^2} e^{-\alpha i h} (e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}) = \frac{2 \operatorname{sh}(\alpha h)}{\alpha h^2} e^{-\alpha i h}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\varphi_{i-1}, \varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(-\frac{1}{h^2}\right) e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha h^2} (e^{-\alpha x_i} - e^{-\alpha x_{i-1}}) = \frac{1}{\alpha h^2} (e^{-\alpha i h} - e^{-\alpha(i-1)h}) \\ &= \frac{1}{\alpha h^2} e^{-\alpha(i-1/2)h} (e^{-\alpha h/2} - e^{\alpha h/2}) = -\frac{2 \operatorname{sh}(\alpha h/2)}{\alpha h^2} e^{-\alpha(i-1/2)h}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{b(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} \frac{2 \operatorname{sh}(\alpha h)}{\alpha h^2} e^{-\alpha i h} & \text{si } i = j \\ -\frac{2 \operatorname{sh}(\alpha h/2)}{\alpha h^2} e^{-\alpha(\frac{i+j}{2})h} & \text{si } i \neq j \text{ et } |j - i| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

b. Dans le cas $n = 2$, le déterminant du système (4) est :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b(\varphi_1, \varphi_1) & b(\varphi_1, \varphi_2) \\ b(\varphi_2, \varphi_1) & b(\varphi_2, \varphi_2) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{2 \operatorname{sh}(\alpha h)}{\alpha h^2} e^{-\alpha h} & -\frac{2 \operatorname{sh}(\alpha h/2)}{\alpha h^2} e^{-3\alpha h/2} \\ -\frac{2 \operatorname{sh}(\alpha h/2)}{\alpha h^2} e^{-3\alpha h/2} & \frac{2 \operatorname{sh}(\alpha h)}{\alpha h^2} e^{-2\alpha h} \end{vmatrix} \\ &= \frac{4e^{-2\alpha h}}{\alpha^2 h^4} \begin{vmatrix} \operatorname{sh}(\alpha h) & -\operatorname{sh}(\alpha h/2) e^{-\alpha h/2} \\ -\operatorname{sh}(\alpha h/2) e^{-\alpha h/2} & \operatorname{sh}(\alpha h) e^{-\alpha h} \end{vmatrix} = \frac{4e^{-3\alpha h}}{\alpha^2 h^4} (\operatorname{sh}^2(\alpha h) - \operatorname{sh}^2(\alpha h/2)) \\ &= \frac{4e^{-3\alpha h}}{\alpha^2 h^4} \operatorname{sh}^2(\alpha h/2) (4 \operatorname{ch}^2(\alpha h/2) - 1) = \frac{324e^{-\alpha}}{\alpha^2} \operatorname{sh}^2(\alpha/6) (4 \operatorname{ch}^2(\alpha/6) - 1) \neq 0 \end{aligned}$$

On retrouve bien que le système est de Cramer.

3. a. Remarquons au préalable que pour tout i de $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $w_n(x_i) = u(x_i)$, donc w_n est une fonction affine par morceaux qui interpole u aux points de la subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$.

Pour établir l'égalité, comparons les dérivées des deux membres sur $]x_{i-1}, x_i[$.

D'une part : $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[$, $u(x) - w_n(x) = u(x) - (u(x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) + u(x_i)\varphi_i(x))$ donc :

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad (u - w_n)'(x) = u'(x) - \frac{1}{h} (-u(x_{i-1}) + u(x_i)).$$

D'autre part : $(t, y) \mapsto \int_y^t u''(z) dz = u'(t) - u'(y)$ est une fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]^2$. Il en résulte, par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, que la fonction $\psi : t \mapsto \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_y^t u''(z) dz \right) dy$ est

continue sur $[x_{i-1}, x_i]$. Par le théorème fondamental du calcul intégral, il s'ensuit que la fonction $\Psi : x \mapsto \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^x \psi(t) dt$ est de classe C^1 sur $[x_{i-1}, x_i]$, et que pour tout x de $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\Psi'(x) = \frac{1}{h} \psi(x) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_y^x u''(z) dz \right) dy = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u'(x) - u'(y)) dy = u'(x) - \frac{1}{h} (u(x_i) - u(x_{i-1})).$$

On a donc, pour tout x de $]x_{i-1}, x_i[$, $(u - w_n)'(x) = \Psi'(x)$. Comme $u - w_n$ et Ψ sont continues sur $[x_{i-1}, x_i]$, et que $(u - w_n)(x_{i-1}) = \Psi(x_{i-1}) = 0$, on a bien $(u - w_n)(x) = \Psi(x)$ pour tout x de $[x_{i-1}, x_i]$.

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad u(x) - w_n(x) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^x \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_y^t u''(z) dz \right) dy \right) dt.$$

b. Supposons $y \leq t$. Alors, en adaptant le **I.2.c.** (borne 0...) :

$$\begin{aligned} \left| \int_y^t u''(z) dz \right| &\leq \left(\int_y^t 1 dz \right)^{1/2} \left(\int_y^t u''^2(z) dz \right)^{1/2} \leq \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1 dz \right)^{1/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right)^{1/2} \\ &\leq h^{1/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right)^{1/2} \quad \text{car } [y, t] \subset [x_{i-1}, x_i]. \end{aligned}$$

On arrive à la même majoration si $y \geq t$. Donc, pour tout x de $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\begin{aligned} |u(x) - w_n(x)| &\leq \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^x \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \int_y^t u''(z) dz \right| dy \right) dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^x \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(h^{1/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right)^{1/2} \right) dy \right) dt \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^x \left(h^{3/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right)^{1/2} \right) dt = h^{1/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right)^{1/2} (x - x_{i-1}) \\ &\leq h^{3/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad |u(x) - w_n(x)| \leq h^{3/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right)^{1/2}.$$

c. On a vu au **a.** que pour tout x de $]x_{i-1}, x_i[$, $u'(x) - w'_n(x) = \Psi'(x) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_y^x u''(z) dz \right) dy$ et comme, grâce au **b.**, $\left| \int_y^x u''(z) dz \right| \leq h^{1/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right)^{1/2}$, on a :

$$|u'(x) - w'_n(x)| \leq \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} h^{1/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right)^{1/2} dy = h^{1/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right)^{1/2}.$$

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad |u'(x) - w'_n(x)| \leq h^{1/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right)^{1/2}.$$

4. Notons pour abréger $M_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz$. En utilisant les majorations des deux questions précédentes :
 $\|u - w_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u - w_n)^2 + (u' - w'_n)^2 \leq \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} h^3 M_i + h M_i = \sum_{i=1}^{n+1} h(h^3 M_i + h M_i) = h^2(h^2 + 1) \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz = h^2(h^2 + 1) \int_0^1 u''^2(z) dz.$

Comme $h \leq \frac{1}{2}$, on a *a fortiori* :

$$\|u - w_n\| \leq \frac{h\sqrt{5}}{2} \left(\int_0^1 u''^2(z) dz \right)^{1/2}.$$

Interprétation : la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ converge vers u au sens de la norme $\|\cdot\|$, donc aussi au sens de la norme $v \mapsto \sqrt{b(v, v)}$ (puisque on a vu au **II.** que ces normes sont équivalentes).