

On désigne par \mathbb{R} l'ensemble des réels, \mathbb{R}^+ l'ensemble des réels positifs ou nul, \mathbb{C} l'ensemble des complexes. Pour toute fonction f définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{C} et bornée, on pose $\|f\| = \text{Sup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$; pour toute fonction F définie sur \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{C} et bornée, on pose $\|f\|_+ = \text{Sup}_{t \in \mathbb{R}^+} |F(t)|$.

On désigne par E l'espace vectoriel complexe des fonctions définies sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{C} , ayant une dérivée seconde continue sur \mathbb{R} . On désigne par E_+ l'espace vectoriel complexe des fonctions définies sur \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{C} , ayant une dérivée seconde continue sur \mathbb{R}^+ .

La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I

- Soit $F \in E$, à valeurs réelles, F et F'' étant bornées, $\|F\| \leq 1$, $\|F''\| \leq 8$.
Démontrer que $|F'(0)| \leq 4$ (on pourra traiter d'abord le cas $F(0) \geq 0$, $F'(0) \geq 0$ et établir alors que : $tF'(0) \leq 1 + 4t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).
Démontrer que F' est bornée et que $\|F'\| \leq 4$.
- Démontrer que si $F \in E$ est à valeurs réelles, F et F'' étant bornées, on a alors :
 F' bornée et $\|F'\|^2 \leq 2\|F\|\|F''\|$.
- Démontrer que la propriété I - 2. est encore vérifiée si F est à valeurs complexes (on pourra utiliser, pour $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $g = \frac{F}{F'(t_0)}$).
Démontrer que la propriété I - 1. est encore vérifiée si F est à valeurs complexes.
- Pour tout entier $n > 0$, soit g_n la fonction impaire, admettant 2 comme période, et telle que :

$$g_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{pour } \frac{1}{2n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2n} \\ 2n - 2nx & \text{pour } 1 - \frac{1}{2n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On pose $h_n(t) = \int_{1/2}^t g_n(u) du$ et $F_n(x) = \int_0^x h_n(t) dt$.

- Démontrer que F_n admet 2 comme période.
- Démontrer que $F_n \in E$ pour tout n et que F_n, F'_n, F''_n sont bornées. Calculer $\|F_n\|, \|F'_n\|$ et $\|F''_n\|$.
- En déduire que dans I - 2., le coefficient 2 est le plus petit α vérifiant :
 $\|F'\|^2 \leq \alpha\|F\|\|F''\|$ pour toute fonction $F \in E$ telle que F et F'' soient bornées.

Partie II

On rappelle que, dans \mathbb{C} , un compact est une partie fermée bornée. Soit K un compact non vide de \mathbb{C} ; on dira qu'il est admissible s'il existe $F \in E$, non constante, à dérivée seconde bornée et telle que $F(\mathbb{R}) \subset K$. Pour tout compact admissible K , on note $\mathcal{A}(K)$ l'ensemble des $F \in E$ vérifiant les propriétés précédentes.

- Démontrer que tout compact de \mathbb{C} , d'intérieur non vide, est admissible.
- Démontrer que $C_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ est admissible.
- Donner un exemple de compact de \mathbb{C} , non vide, non réduit à un point, et non admissible.
- K étant un compact admissible, démontrer que si F appartient à $\mathcal{A}(K)$, alors F' est bornée.
- Démontrer que, si K est un compact admissible et si F appartient à $\mathcal{A}(K)$, alors $\mathcal{L}(F) = \frac{\|F'\|}{\sqrt{\|F''\|}}$ existe. On pose :

$$\mathcal{L}(K) = \sup_{F \in \mathcal{A}(K)} \mathcal{L}(F) \quad (\text{finie ou } +\infty).$$

- K' et K'' étant admissibles tels que $K' \subset K''$, quelle relation existe-t-il entre $\mathcal{L}(K')$ et $\mathcal{L}(K'')$?
- Montrer que si K est un segment de longueur $\lambda > 0$, alors $\mathcal{L}(K) = \sqrt{\lambda}$ (on pourra utiliser, pour une suite de fonctions $F_n \in E$ bien choisie, la suite $g_n = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \frac{F_n}{\|F_n\|}$, a et b étant les extrémités du segment).
- On pose, pour tout réel R strictement positif, $D_R = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq R\}$. Calculer $\mathcal{L}(D_R)$.
- Démontrer que, pour tout compact admissible K , $\mathcal{L}(K)$ est fini.
- Soit $g \in E$ telle que $|g(t)| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, g'' bornée, $\|g''\| \leq 1$. Démontrer que $\|g'\| \leq 1$. Calculer $\mathcal{L}(C_R)$ où $C_R = \{z \in \mathbb{C} / |z| = R\}$.

Partie III

- Soit $F \in E_+$, à valeurs réelles, F et F'' étant bornées, $\|F\|_+ \leq 1$, $\|F''\|_+ \leq 8$. Démontrer que $|F'(0)| \leq 4\sqrt{2}$ (on pourra traiter d'abord le cas où $F'(0) \geq 0$). Démontrer que F' est bornée et que $\|F'\|_+ \leq 4\sqrt{2}$.
- Soit $F \in E_+$, bornée à dérivée seconde bornée, à valeurs réelles. Démontrer que F' est bornée et que $\|F'\|_+^2 \leq 4\|F\|_+\|F''\|_+$.
- Soit $F \in E_+$, à valeurs réelles vérifiant $\|F\|_+ \leq 1$, $\|F''\|_+ \leq 8$ et $\|F'\|_+ \leq 4\sqrt{2}$.
 - Démontrer que $\|F\|_+ = 1$ et $\|F''\|_+ = 8$.
 - On pose :

$$K_1(t) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ t-1 & \text{pour } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Pour $x \geq \frac{1}{2}$, calculer $\int_0^1 K_1(t)F''\left(t+x-\frac{1}{2}\right)dt$.

En déduire que, pour $x \geq \frac{1}{2}$, on a $|F'(x)| \leq 4$.

- Démontrer qu'il existe $\xi \geq 0$ tel que $|F'(\xi)| = 4\sqrt{2}$.
- Démontrer que si $F'(\xi) = 4\sqrt{2}$, on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \quad F(x) = -1 + 4\sqrt{2}x - 4x^2$$

(on pourra utiliser g telle que $g(x) = F(x-\xi)$).

- Démontrer qu'une telle fonction existe.