2021 - E3A - MP - Mathématiques Unique
Un corrigé

Exercice 1.

1. • On a $\forall x \in I, f(x) = \begin{cases} x^{-x} = e^{-x\ln(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Par composition de fonctions usuelles continues, f est continue sur $]0,1]$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x\ln(x)} = e^0 = 1 = f(0)$.
Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } I = [0,1].}$
• La fonction f_0 est constante donc continue sur $[0,1]$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$.
Par composition de fonctions usuelles continues, f_n est continue sur $]0,1]$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln(x))^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$.
Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } I = [0,1].}$

2. Pour $x = 0$, $f_0(x) = 1$ et $\forall n \geq 1, f_n(x) = 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(0)$ converge simplement vers $1 = f(0)$.
Soit $x \in]0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n = \dfrac{(-x\ln(x))^n}{n!}$.
La série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-x\ln(x))^n}{n!}$ est une série exponentielle avec $z = -x\ln(x)$, or cette série converge absolument, donc converge simplement, vers $e^{-x\ln(x)} = x^{-x} = f(x)$.
Finalement, $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } I = [0,1] \text{ vers la fonction } f.}$

3. Soit la fonction φ continue sur I définie par $\forall t \in]0,1], \varphi(t) = t\ln(t)$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ or φ est continue sur I, donc $\varphi(0) = 0$.
φ est dérivable sur $]0,1]$ et l'on a :
$$\forall t \in]0,1], \quad \varphi'(t) = \ln(t) + 1.$$
Ainsi $\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln(t) = -1 \Leftrightarrow t = e^{-1}$ et $\varphi'(t) > 0 \Leftrightarrow t > e^{-1}$. On obtient le tableau de variations de φ sur I :

x	0		e^{-1}		1
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0

4. • Puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi'(t) = -\infty$ et $\varphi(0) = 0$, le graphe de φ admet une tangente verticale d'équation $x = 0$ au point d'abscisse 0.
• Puisque $\varphi'(1) = 1$ et $\varphi(1) = 0$, le graphe de φ admet une tangente d'équation $y = x - 1$ au point d'abscisse 1.
• Puisque $\varphi'(e^{-1}) = 0$ et $\varphi(e^{-1}) = -e^{-1}$, le graphe de φ admet une tangente horizontale d'équation $y = -e^{-1}$ au point d'abscisse e^{-1}.
• On représente ensuite le graphe de la fonction φ sur I en plaçant les tangentes et les trois points du graphe $(0,0)$, $(e^{-1}, -e^{-1})$ et $(1,0)$.

5. La question précédente montre que $|\varphi|$ est bornée sur I et atteint son maximum sur I en e^{-1}, avec $|\varphi(e^{-1})| = e^{-1}$.
Donc la norme infinie de cette fonction sur I vaut : $\|\varphi\|_{\infty,I} = e^{-1}$.
La fonction f_0 est bornée sur I et $\|f_0\|_{\infty,I} = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f_n(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1]$, $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n!}(\varphi(x))^n$. Donc la fonction f_n est bornée sur I et :
$$\|f_n\|_{\infty,I} = \frac{1}{n!}\left(\|\varphi\|_{\infty,I}\right)^n = \frac{(e^{-1})^n}{n!}.$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_{\infty,I} = \frac{(e^{-1})^n}{n!}.}$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(e^{-1})^n}{n!}$ est une série exponentielle (en $z = e^{-1}$), donc elle converge absolument donc simplement.

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,I} = \sum_{n\geq 0} \frac{(e^{-1})^n}{n!}$ converge, $\boxed{\text{la série de fonctions } \displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge normalement sur } I.}$

6. 6.1. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]0,+\infty[, \quad g_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$.
   - La fonction g_x est continue sur $]0,+\infty[$.
   - Lorsque $t \to +\infty$, $t^2 g_x(t) = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ donc $g_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

     L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ avec $\alpha = 2 > 1$ converge. Par règle des petits o pour les fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - Lorsque $t \to 0^+$, $g_x(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$.

     L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ converge si et seulement si $\alpha = 1-x < 1$ soit $x > 0$. Par règle des équivalents pour les fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_x(t)dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

   Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

   $\boxed{\text{Le domaine de définition de } \Gamma \text{ est } \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[.}$

   6.2. On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1.$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue une intégration par parties, valable puisque le crochet suivant admet une limite nulle :

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = \Big[t^n(-e^{-t})\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} nt^{n-1}(-e^{-t})dt = n\Gamma(n).$$

   La formule de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ avec $\Gamma(1) = 1$ conduit à $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n+1) = n!\ .}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $u = -\ln(t)$, qui conduit à $t = e^{-u},\ dt = -e^{-u}du$:

$$J_n = \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n dt = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} (e^{-u}(-u))^n e^{-u}du = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}du.$$

   On effectue le changement de variable $v = (n+1)u$, $dv = (n+1)du$:

$$J_n = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \left(\frac{v}{n+1}\right)^n e^{-v}\frac{1}{n+1}dv = (n+1)^{-(n+1)}\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} v^{(n+1)-1}e^{-v}dv.$$

   On reconnaît le terme $\Gamma(n+1)$:

$$J_n = (n+1)^{-(n+1)}\frac{1}{n!}\Gamma(n+1) = (n+1)^{-(n+1)}\frac{1}{n!}n! = (n+1)^{-(n+1)}.$$

   Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = (n+1)^{-(n+1)}.}$

   Remarquons que cette formule est encore valable pour $n = 0$, puisque $J_0 = \displaystyle\int_0^1 f_0(t)dt = \int_0^1 1dt = 1.$

8. - Par la question **1**, chaque fonction f_n est **continue sur** I**.**
   - Par les questions **2** et **5**, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc **converge uniformément vers** f **sur le segment** I**.**

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions continues convergeant normalement sur un segment :

$$J = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

Donc $\boxed{J = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.}$

9. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-k}$ la somme partielle d'ordre $n \geq 1$ et $R_n = J - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-k}$ le reste partiel d'ordre n.

Pour $k \geq n$, on a $k+1 \geq n+1$ donc $\frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{(n+1)^k}$.

On majore le reste partiel par la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{n+1} < 1$, donc convergente :

$$R_n = J - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^n}.$$

On a $2^{10} = 1024 \geq 10^3$ donc $2^{20} \geq 10^6$.
Pour $n = 7$: $n(n+1)^n = 7 \times 8^7 \geq 8^7 = (2^3)^7 = 2^{21} \geq 10^6$. Ainsi

$$\forall n \geq n_0 = 7, \quad |S_n - J| = R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{n(n+1)^n} \leq 10^{-6}.$$

$\boxed{\text{Pour le rang } n_0 = 7, \text{ la somme partielle } S_{n_0} \text{ d'ordre } n_0 \text{ est une valeur approchée de } J \text{ à } 10^{-6} \text{ près.}}$

Exercice 2.

1. 1.1. **Théorème spectral :** soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Alors f est diagonalisable en base orthonormale. Autrement dit, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f. De plus, E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f.

1.2. Dans cet exercice, f est un endomorphisme symétrique de E non inversible et non nul.

- Puisque f est non inversible, f est non injectif donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$. Par suite, $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f.}$
- Puisque f est symétrique, f est diagonalisable en base orthonormale par le théorème spectral. Supposons par l'absurde que 0 soit la seule valeur propre de f : $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale formée de vecteurs propres de f, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice diagonale dont la diagonale contient les valeurs propres de f, donc sa diagonale est nulle. Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 0$ d'où l'on déduit $f = 0$. Ceci est absurde car on suppose que f est non nul. Donc $\boxed{f \text{ admet au moins une valeur propre non nulle.}}$

1.3. • Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$. Puisque $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f(x) = 0$. Puisque $y \in \mathrm{Im}(f)$, $\exists z \in E, y = f(z)$. En utilisant que f est un endomorphisme symétrique :

$$(x|y) = (x|f(z)) = (f(x)|z) = (0|z) = 0.$$

On a montré que $\forall x \in \mathrm{Ker}(f), \forall y \in \mathrm{Im}(f), (x|y) = 0$, donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont orthogonaux.}}$

- En particulier, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe. Par le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E) = n,$$

or E est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension n.
Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E}$ et $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont supplémentaires.}}$

1.4. Puisque f est symétrique, E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)}} \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = \overset{\perp}{\bigoplus_{0 \leq j \leq k}} \mathrm{Ker}(f - \lambda_j \mathrm{Id}_E) = \overset{\perp}{\bigoplus_{0 \leq j \leq k}} E_j.$$

Soit $x \in E$. $\exists!(x_0, x_1, \ldots, x_k) \in E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_k$ tel que $x = \sum_{j=0}^{k} x_j$.
Soit $i \in [|0, k|]$. p_i est le projecteur orthogonal sur E_i. Puisque $x_i \in E_i$, on a $p_i(x_i) = x_i$.
Puisque les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, pour $j \neq i$, on a $x_j \in E_j \subset E_i^{\perp}$ donc $p_i(x_j) = 0$.

$$p_i(x) = p_i\left(\sum_{j=0}^{k} x_j\right) = \sum_{j=0}^{k} p_i(x_j) = p_i(x_i) = x_i.$$

D'où

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{j=0}^{k} x_j = \sum_{j=0}^{k} p_j(x) = \left(\sum_{j=0}^{k} p_j\right)(x). \quad \text{Donc} \quad \boxed{\mathrm{Id}_E = \sum_{j=0}^{k} p_j.}$$

1.5. Soit $(i, j) \in [|0, k|]^2$ tel que $i \neq j$.
Puisque f est symétrique, les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, donc $E_j \subset E_i^{\perp}$.
Soit $x \in E$. $p_j(x) \in E_j \subset E_i^{\perp}$ donc $p_i \circ p_j(x) = p_i(p_j(x)) = 0$. Donc $\boxed{\forall (i,j) \in [|0,k|]^2, \quad i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = \theta.}$

1.6. Soit $x \in E$. Alors $\forall j \in [|0, k|]$, $p_j(x) \in E_j$ donc $f(p_j(x)) = \lambda_j p_j(x)$. Il vient :

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Id}_E(x) = \sum_{j=0}^{k} p_j(x). \\ f(x) &= f\left(\sum_{j=0}^{k} p_j(x)\right) = \sum_{j=0}^{k} f(p_j(x)) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j(x) = \left(\sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j\right)(x). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j.}$

1.7. p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. D'après la question **1.3**, $\mathrm{Ker}(f)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im}(f)$ donc p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

Soit $x \in E$, que l'on écrit $x = \sum_{j=0}^{k} p_j(x)$.

- $p_0(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $p(p_0(x)) = 0$.
- Soit $j \in [|1, k|]$. $p_j(x) \in E_j$ donc $f(p_j(x)) = \lambda_j p_j(x)$. Montrons que $p_j(x) \in \mathrm{Im}(f)$:

$$p_j(x) = \frac{1}{\lambda_j}\lambda_j p_j(x) = \frac{1}{\lambda_j} f(p_j(x)) = f\left(\frac{1}{\lambda_j} p_j(x)\right) \in \mathrm{Im}(f).$$

On en déduit que $\forall j \in [|1, k|],\ p_j(x) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $p(p_j(x)) = p_j(x)$.

On obtient finalement :

$$p(x) = p\left(\sum_{j=0}^{k} p_j(x)\right) = \sum_{j=0}^{k} p(p_j(x)) = \underbrace{p(p_0(x))}_{=0} + \sum_{j=1}^{k} \underbrace{p(p_j(x))}_{=p_j(x)} = \sum_{j=1}^{k} p_j(x). \quad \text{Donc} \quad \boxed{p = \sum_{j=0}^{k} p_j.}$$

2. **Quelques propriétés de l'inverse généralisé.**

2.1. • Puisque $\lambda_0 = 0$, on a $f = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j$.

D'après la question 1.5, si $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$ (l'endomorphisme nul). Puisque p_i est un projecteur : $p_i^2 = p_i$. D'où :

$$f \circ f^I = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} p_i \circ p_j = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_i} p_i^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i = p.$$

Donc $\boxed{f \circ f^I = p.}$

• Soit $(x, y) \in E^2$. On a :

$$f\Big(x - f^I(y)\Big) = f(x) - f \circ f^I(y) = f(x) - p(y).$$

Ainsi

$$x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f\Big(x - f^I(y)\Big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = p(y).$$

D'où $\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \Big(f(x) = p(y) \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\Big).}$

2.2. Soit $y \in E$ fixé.

- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui est de dimension finie car E est de dimension finie. p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$.
  La distance de y à $\mathrm{Im}(f)$ est définie par :

$$d(y, \mathrm{Im}(f)) = \inf_{u \in \mathrm{Im}(f)} \|u - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\|.$$

  D'après le cours,

$$d(y, \mathrm{Im}(f)) = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| = \|y - p(y)\|.$$

- Soit $x \in E$. Alors $f(x) - p(y) \in \mathrm{Im}(f)$ et $p(y) - y \in (\mathrm{Im}(f))^\perp = \mathrm{Ker}(f)$. On a montré que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des supplémentaires orthogonaux, donc les vecteurs $f(x) - p(y)$ et $p(y) - y$ sont orthogonaux.
- On applique le théorème de Pythagore :

$$\|f(x)-y\|^2 = \left\|\Big(f(x) - p(y)\Big) + \Big(p(y) - y\Big)\right\|^2 = \|f(x)-p(y)\|^2 + \|p(y)-y\|^2 = \|f(x)-p(y)\|^2 + \left(\inf_{z \in E} \|f(z) - y\|\right)^2.$$

  D'après la question **2.1**, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \quad &\Leftrightarrow \quad \|f(x) - p(y)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = p(y) \\ &\Leftrightarrow \quad x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f). \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\forall x \in E,\ \left(\|f(x)-y\| = \inf_{z\in E} \|f(z)-y\| \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \operatorname{Ker}(f)\right).}$

3. **Application à un exemple.**

3.1. $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- A est la matrice de f dans une base orthonormale et A est symétrique, donc f est un $\boxed{\text{endomorphisme symétrique.}}$
- La matrice $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est non nulle donc $\boxed{f \text{ est non nul.}}$
- La matrice A possède deux colonnes liées (les colonnes 2 et 4), donc $\det(A) = 0$, A n'est pas inversible et $\boxed{f \text{ est non inversible.}}$

3.2. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

$$A - 2I_4 = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \operatorname{Ker}(A - 2I_4) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

On conclut que $\operatorname{rg}(A - 2I_4) = 2$ donc par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(A - 2I_4)) = 2$. Donc 2 est valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé vaut 2.
Puisque A est diagonalisable, pour chaque valeur propre λ de A, la dimension du sous-espace propre associé à λ est égale à la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique.
Donc la multiplicité de 2 dans le polynôme caractéristique vaut 2. Ainsi $\boxed{2 \text{ est valeur propre double de } A.}$

3.3. f est non inversible donc 0 est valeur propre de f. De plus $\operatorname{rg}(A) = 3$ donc par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 4 - 3 = 1$. 0 est valeur propre de f et la dimension du sous-espace propre associé est 1. Puisque f est diagonalisable, 0 est valeur propre simple de f.
f possède quatre valeurs propres comptées avec multiplicité. $\lambda_0 = 0$ est valeur propre simple de f et $\lambda_1 = 2$ est valeur propre double de f. Soit λ_2 la dernière valeur propre. La trace est égale à la somme des valeurs propres de f comptées avec multiplicité, d'où :

$$\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(A) = 8 = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \lambda = \lambda_0 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 4 + \lambda_2.$$

Donc $\lambda_2 = 4$. $\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ admet exactement 3 valeurs propres distinctes : } \lambda_0 = 0 < \lambda_1 = 2 < \lambda_2 = 4.}$

3.4. Puisque f est un endomorphisme symétrique, non nul et non inversible, on peut appliquer les résultats de la question **1**. D'après la question **1.6** :

$$f = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j p_j = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 2p_1 + 4p_2.$$

Pour $j \in [|0, 2|]$, M_j est la matrice de p_j dans la base $\mathcal{B}$. Donc

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(2p_1 + 4p_2) = 2\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p_1) + 4\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p_2) = 2M_1 + 4M_2.$$

Ainsi $\boxed{A = 2M_1 + 4M_2.}$

3.5. On a montré que $\chi_f(X) = X(X-2)^2(X-4)$ donc $\lambda_2 = 4$ est valeur propre simple de f.
Puisque f est diagonalisable, la dimension du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 4$ est égale à la multiplicité de λ_2 dans χ_f, donc $\boxed{\dim(E_2) = 1.}$

$$A - 4I_4 = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad \operatorname{Ker}(A - 4I_4) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

On retrouve $\dim(E_2) = \dim(\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_E)) = \dim(\mathrm{Ker}(A - 4I_4)) = 1$.
De plus on en déduit que $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3)$. Soit $v_2 \in E_2$ tel que $\|v_2\| = 1$, alors $\exists a \in \mathbb{R}, v_2 = a(e_1 - e_3)$. Par le théorème de Pythagore (les vecteurs e_1 et e_3 sont orthogonaux et de norme 1) :

$$\|v_2\|^2 = a^2(\|e_1\|^2 + \|e_3\|^2) = 2a^2 = 1 \text{ donc } a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Par exemple, le vecteur $\boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3) \in E_2}$ et vérifie $\boxed{\|v_2\| = 1.}$

3.6. Puisque E_2 est de dimension 1, $E_2 = \mathrm{Vect}(v_2)$ et (v_2) est une base orthonormale de E_2.
Soit $x \in E$. $p_2(x) \in E_2$ donc $\exists a \in \mathbb{R}, p_2(x) = av_2$.
On écrit $x = p_2(x) + (x - p_2(x))$ avec $p_2(x) \in E_2$ et $(x - p_2(x)) \in E_2^{\perp}$. Alors

$$(x|v_2) = \Big(p_2(x) + (x - p_2(x))|v_2\Big) = \Big(p_2(x)|v_2\Big) + \Big(x - p_2(x)|v_2\Big) = (av_2|v_2) + 0 = a\|v_2\|^2 = a.$$

D'où $a = (x|v_2)$. Donc $\boxed{\forall x \in E, p_2(x) = (x|v_2)v_2.}$

3.7. On rappelle que $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$. Calculons $p_2(e_i)$ pour $1 \leq i \leq 4$:

$$\begin{array}{rcccccccc}
p_2(e_1) & = & (e_1|v_2)v_2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1|e_1 - e_3)v_2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}v_2 & = & \frac{1}{2}(e_1 - e_3). \\
p_2(e_2) & = & (e_2|v_2)v_2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2|e_1 - e_3)v_2 & = & 0. & & \\
p_2(e_3) & = & (e_3|v_2)v_2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3|e_1 - e_3)v_2 & = & -\frac{1}{\sqrt{2}}v_2 & = & \frac{1}{2}(-e_1 + e_3). \\
p_2(e_4) & = & (e_4|v_2)v_2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(e_4|e_1 - e_3)v_2 & = & 0. & &
\end{array}$$

On en déduit la matrice M_2 de p_2 dans $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$:

$$\boxed{M_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

4. • Calculons la matrice M_1. D'après la question **3.4**, $A = 2M_1 + 4M_2$. On a donc $M_1 = \frac{1}{2}A - 2M_2$. Ainsi :

$$M_1 = \frac{1}{2}A - 2M_2 = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{M_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

• On a $f^I = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^I) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\lambda_j} p_j\right) = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\lambda_j} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_j) = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\lambda_j} M_j. \quad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^I) = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{4}M_2.}$$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^I) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^I) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 3.

1. D'après le cours, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, de rayon 1, et son développement en série entière vaut :
$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$
On en déduit que G_X est développable en série entière sur $]-2,2[$ et que son développement en série entière vaut :
$$\forall t \in]-2,2[, \quad G_X(t) = \frac{1}{2-t} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n. \quad \boxed{G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} t^n.}$$

2. D'après le cours, pour $\alpha \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})$, la fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, de rayon 1, et son développement en série entière vaut :
$$\forall t \in]-1,1[, \quad (1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n \text{ avec } \forall n \geq 1, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k).$$
On applique ce résultat avec $\alpha = 1/2 \notin \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, de rayon 1, et son développement en série entière vaut :
$$\forall t \in]-1,1[, \quad (1+t)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n \text{ avec } \forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right).$$
Déterminons a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(k-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k-1}{2} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1) = \frac{1}{2n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\prod_{k=1}^{n}(2k-1).$$
Calculons le produit des entiers impairs compris entre 1 et $2n$:
$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$
On en déduit que
$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)4^n}\binom{2n}{n}.$$
Finalement,
$$\forall t \in]-1,1[, \quad (1+t)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)4^n}\binom{2n}{n}}$$
où a_n est le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.

3. D'après la question précédente, on a :
$$\forall t \in]-2,2[, \quad \sqrt{1-\frac{t}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(-\frac{t}{2}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\,\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)4^n}\binom{2n}{n}t^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)8^n}\binom{2n}{n}t^n.$$
On peut donc développer en série entière la fonction G_Y sur $]-2,2[$:
$$\forall t \in]-2,2[, \quad G_Y(t) = 2-\sqrt{2-t} = 2-\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{t}{2}} = (2-\sqrt{2}) + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)8^n}\binom{2n}{n}t^n.$$

Le développement en série entière de la fonction G_Y est :

$$\forall t \in]-2,2[, \quad \boxed{G_Y(t) = (2-\sqrt{2}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)8^n}\binom{2n}{n} t^n.}$$

4. Par définition d'une série génératrice et d'après la question **1**,

$$\forall t \in]-1,1[, \quad G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} t^n.$$

Par unicité du développement en série entière de G_X sur $]-1,1[$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.}$$

Par définition d'une série génératrice et d'après la question **2**,

$$\forall t \in]-1,1[, \quad G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n)t^n = (2-\sqrt{2}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)8^n}\binom{2n}{n} t^n.$$

Par unicité du développement en série entière de G_Y sur $]-1,1[$:

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=0) = 2-\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y=n) = \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)8^n}\binom{2n}{n}.}$$

5. On utilise la fonction génératrice de S. Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a $\forall t \in]-1,1[, G_S(t) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$. Il vient :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad G_S(t) = G_X(t)G_Y(t) = \frac{1}{2-t}(2-\sqrt{2-t}) = \frac{2}{2-t} - \frac{1}{\sqrt{2-t}} = \frac{1}{1-t/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-1/2}.$$

D'après le cours, pour $\alpha = -1/2 \notin \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (1+t)^{-1/2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, de rayon 1, et son développement en série entière vaut :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad (1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n t^n \text{ avec } \forall n \geq 1, b_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right).$$

Déterminons b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Ainsi

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \left(1-\frac{t}{2}\right)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}t^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{8^n}\binom{2n}{n}t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{8^n}\binom{2n}{n}t^n.$$

Enfin

$$\begin{aligned}
\forall t \in]-1,1[, \quad G_S(t) = G_X(t)G_Y(t) &= \frac{1}{1-t/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-1/2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}t^n - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{8^n}\binom{2n}{n}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{8^n}\binom{2n}{n}\right)t^n.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de G_S sur $]-1,1[$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(S=n) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{8^n}\binom{2n}{n}.}$$

6. **Calculs d'espérances et de variances.**

6.1. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Donc $(X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X+1 = n) = \mathbb{P}(X = n-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = p(1-p)^{n-1} \text{ avec } p = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\boxed{\text{la variable aléatoire } X+1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p = \frac{1}{2}.}$

6.2. D'après le cours, puisque $X + 1 \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p = \frac{1}{2}$, et par linéarité de l'espérance :

$$E(X+1) = E(X) + 1 = \frac{1}{p} = 2. \quad \text{Donc } \boxed{E(X) = 1.}$$

D'après le cours, puisque $X + 1 \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p = \frac{1}{2}$, et par propriété de la variance :

$$V(X+1) = V(X) = \frac{1-p}{p^2} = 2. \quad \text{Donc } \boxed{V(X) = 2.}$$

6.3. Déterminons à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$:

$$\begin{cases} G_Y(t) &= 2 - \sqrt{2-t}. & & \\ G_Y'(t) &= \dfrac{1}{2\sqrt{2-t}}. & E(Y) = G_Y'(1) &= \dfrac{1}{2}. \\ G_Y''(t) &= \dfrac{1}{4(2-t)^{3/2}}. & E(Y(Y-1)) = G_Y''(1) &= \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{E(Y) = \frac{1}{2}}$ et $\boxed{E(Y(Y-1)) = \frac{1}{4}.}$

6.4. On en déduit la variance de la variable aléatoire Y :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \quad \boxed{V(Y) = \frac{1}{2}.}$$

6.5. Par linéarité de l'espérance :

$$E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1 + \frac{1}{2}. \quad \boxed{E(S) = \frac{3}{2}.}$$

Puisque les variables X et Y sont indépendantes :

$$V(S) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \quad \boxed{V(S) = \frac{5}{2}.}$$

Exercice 4.

1. On a $\deg(1) = 0,\ \deg(X-1) = 1, \dots, \deg(X^k(X-1)) = k+1, \deg(X^{n-1}(X-1)) = n$.
   La famille $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1))$ est constituée de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette famille de polynômes est échelonnée en degré donc est libre.
   $\mathcal{B}$ est une famille libre de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Donc $\boxed{\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1)) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. **Généralités sur φ.**

   2.1. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Par linéarité de l'intégrale :

   $$\varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \int_0^1 (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)dt = \lambda_1 \int_0^1 P_1(t)dt + \lambda_2 \int_0^1 P_2(t)dt = \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2).$$

   Donc φ est linéaire. Ainsi $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ et $\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$

   2.2. $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est de dimension 1, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension 0 ou 1. On a $\varphi(1) = \displaystyle\int_0^1 1dt = 1 \neq 0$ donc φ est non nulle, $\mathrm{rg}(\varphi) \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$. $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension 1 donc $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}.}$
   Par le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \mathrm{rg}(\varphi) = (n+1) - 1 = n$. $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n}$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. 3.1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Par linéarité de l'intégrale :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) = \int_0^x (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)dt = \lambda_1 \int_0^x P_1(t)dt + \lambda_2 \int_0^x P_2(t)dt = \lambda_1 \varphi(P_1)(x) + \lambda_2 \varphi(P_2)(x).$$

   Donc $\psi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2)$. Ainsi $\boxed{\psi \text{ est linéaire.}}$

   3.2. Soit $k \in [|0, n|]$. On a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(X^k)(x) = \int_0^x t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

   On en déduit que $\psi(X^k) = \dfrac{1}{k+1} X^{k+1}$. Puisque $(1, X, \dots, X^k, \dots X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

   $$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(\psi(1), \psi(X), \dots, \psi(X^k), \dots, \psi(X^n)) &= \mathrm{Vect}\left(X, \frac{1}{2}X^2, \dots, \frac{1}{k+1}X^{k+1}, \dots, \frac{1}{n+1}X^{n+1}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \dots, X^{k+1}, \dots, X^{n+1}\right). \end{aligned}$$

   D'où $\boxed{\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \dots, X^{k+1}, \dots, X^{n+1}\right).}$

   3.3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

   $$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 P(t)dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \Psi(P)(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \text{ est racine du polynôme } \psi(P) \\ &\Leftrightarrow (X-1) \text{ divise le polynôme } \psi(P). \end{aligned}$$

   Montrons l'équivalence demandée.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Si $\psi(P) \in \mathrm{Vect}\Big(X(X-1), \dots, X^n(X-1)\Big)$, alors $(X-1)$ divise $\psi(P)$ donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
   $\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $(X-1)$ divise $\psi(P)$. De plus, $\psi(P)(0) = 0$ donc X divise $\psi(P)$. On en déduit que $X(X-1)$ divise $\psi(P)$ avec $\psi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, donc $\psi(P) \in X(X-1)\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Ainsi $\psi(P) \in \mathrm{Vect}\Big(X(X-1), \dots, X^n(X-1)\Big)$.

   Finalement, on a montré que : $\boxed{P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(P) \in \mathrm{Vect}\Big(X(X-1), \dots, X^n(X-1)\Big).}$

3.4. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $R_k(X) = (k+1)X^k - kX^{k-1}$.
On remarque que $\deg(R_k) = k$ donc la famille $(R_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$, échelonnée en degré donc libre. De plus

$$\psi(R_k) = (k+1)\psi(X^k) - k\psi(X^{k-1}) = (k+1)\frac{X^{k+1}}{k+1} - k\frac{X^k}{k} = X^{k+1} - X^k = X^k(X-1).$$

Donc $\psi(R_k) \in \mathrm{Vect}\Big(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)\Big)$. D'après la question **3.3.**, $R_k \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
D'après la question **2.2.**, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est de dimension n.
$(R_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille libre de cardinal n dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$ qui est de dimension n, donc une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
$\boxed{(R_k)_{1\leq k\leq n} = \Big((k+1)X^k - kX^{k-1}\Big)_{1\leq k\leq n} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\varphi).}$

4. 4.1. On a $\dim\mathcal{H} = \dim\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \times \dim(\mathbb{R}) = (n+1)\times 1$. Donc $\boxed{\dim(\mathcal{H}) = n+1.}$

4.2. Pour $(k,\ell) \in [|0,n|]^2$, calculons $\psi_k(X^\ell)$. On pose $P(X) = X^\ell$.

$$\left\{\begin{array}{llllll} \text{Si } k \leq \ell - 1 : & P^{(k)}(X) & = & \ell(\ell-1)\ldots(\ell-k+1)X^{\ell-k}. & \psi_k(P) & = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0. \\ \text{Si } k = \ell : & P^{(\ell)}(X) & = & \ell!\ . & \psi_k(P) & = \dfrac{P^{(\ell)}(0)}{\ell!} = 1. \\ \text{Si } k \geq \ell + 1 : & P^{(k)}(X) & = & 0. & \psi_k(P) & = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0. \end{array}\right.$$

Ainsi $\boxed{\psi_k(X^\ell) = \delta_{k,\ell} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{array}\right. .}$

Montrons que la famille $(\psi_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre. Soit $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k = 0$. Soit $\ell \in [|0,n|]$.

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k\right)(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\delta_{k,\ell} = \lambda_\ell.$$

On a $\forall \ell \in [|0,n|]$, $\lambda_\ell = 0$ donc la famille est libre.
La famille $(\psi_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre de cardinal $n+1$ dans $\mathcal{H}$ qui est de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathcal{H}$. $\boxed{(\psi_0, \ldots, \psi_n) \text{ est une base de } \mathcal{H}.}$

4.3. φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\varphi \in \mathcal{H}$.
Soient $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ les coordonnées de φ dans la base $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ de $\mathcal{H}$: $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k$. Soit $\ell \in [|0,n|]$.

$$\varphi(X^\ell) = \int_0^1 t^\ell dt = \frac{1}{\ell+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k\right)(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\delta_{k,\ell} = \lambda_\ell.$$

Donc $\forall \ell \in [|0,n|]$, $\lambda_\ell = \dfrac{1}{\ell+1}$. Ainsi $\boxed{\varphi = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\psi_k.}$