

## concours externe de recrutement de professeurs certifiés

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

### NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

On désigne par  $E$  l'espace vectoriel constitué des fonctions  $\phi$  réelles, continues et bornées sur  $]0, +\infty[$ , et telles que, pour tout réel strictement positif  $x$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t\phi(t)}{x^2+t^2} dt$  soit convergente.

On convient de désigner, en abrégé, par  $C^\infty$  l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur  $]0, +\infty[$ .

L'objet du problème est l'étude de l'application linéaire  $S$  qui, à tout élément  $\phi$  de  $E$ , fait correspondre la fonction  $S\phi$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $S\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\phi(t)}{x^2+t^2} dt$ .

Les deux premières parties sont consacrées à la détermination de quelques transformées  $S\phi$  et à la preuve de l'appartenance de  $S\phi$  à  $C^\infty$ , pour tout élément  $\phi$  de  $E$ . Les deux autres parties étudient une suite d'endomorphismes  $L_n$  de  $C^\infty$  telle que, pour tout élément  $\phi$  de  $E$ , et pour tout  $x$  strictement positif, on ait :

$$\lim (L_n S\phi(x)) = \phi(x).$$

### PREMIÈRE PARTIE

#### I.1. Appartenance à $E$ .

- a. La fonction constante, égale à 1 sur  $]0, +\infty[$ , est-elle élément de  $E$  ?
- b. Montrer que la fonction  $\phi_1$ , définie sur  $]0, +\infty[$  par  $\phi_1(t) = \frac{t}{1+t^2}$ , appartient à  $E$ .
- c. Soit  $\psi$  une fonction continue sur  $]0, +\infty[$ , qui admet une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ . Montrer que  $\psi$  est bornée sur  $]0, +\infty[$ .  
Montrer que, si  $\ell$  n'est pas nulle,  $\psi$  n'appartient pas à  $E$ .  $\psi$  appartient-elle à  $E$  si  $\ell = 0$  ?

#### I.2. Étude de $S\phi_1$ .

- a. Déterminer deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout couple de réels  $(x, t) \neq (0, 0)$ , on ait :

$$\frac{t^2(1-x^2)}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{bx^2}{x^2+t^2}.$$

En déduire, pour  $x \neq 1$ , la valeur de  $S\phi_1(x)$ .

- b. Calculer  $S\phi_1(1)$  (on pourra faire une intégration par parties ou utiliser le changement de variable défini par  $t = \tan \theta$ ,  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ).
- c. Vérifier que  $S\phi_1$  appartient à  $C^\infty$ .

A.2.3. Soit, dans  $\mathcal{E}$ , un triangle équilatéral ABC de centre O. Montrer que les trois droites (OA), (OB), (OC) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

A.2.4. L'énoncé suivant : « Si G et G' sont deux gerbes de même ordre et de même rapport, alors G' est isométrique à G » est-il exact ?

A.2.5. On considère le point I de coordonnées (1, 0, 0), et ses images J et K par les rotations d'axe (O ;  $\vec{e}_3$ ), orienté dans le sens de  $\vec{e}_3$ , d'angles  $\frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{4\pi}{3}$  respectivement.

a. Déterminer les coordonnées de J et de K.

b. Soit un nombre réel  $h$  et  $\Omega$  le point de coordonnées (0, 0,  $h$ ).

Montrer que les vecteurs  $\vec{u} = \frac{\overline{\Omega I}}{\|\overline{\Omega I}\|}$ ,  $\vec{v} = \frac{\overline{\Omega J}}{\|\overline{\Omega J}\|}$ ,  $\vec{w} = \frac{\overline{\Omega K}}{\|\overline{\Omega K}\|}$  vérifient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = \varphi(h),$$

où  $\varphi(h)$  est un nombre réel qu'on exprimera en fonction de  $h$ .

c. Construire le tableau des variations de la fonction  $\varphi$  en précisant les limites aux bornes. En déduire l'image de  $\varphi$ .

d. Montrer que, pour chaque choix du réel  $h$ , les trois droites ( $\Omega I$ ), ( $\Omega J$ ), ( $\Omega K$ ) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

e. On considère trois vecteurs  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{v}_1$  et  $\vec{w}_1$  qui sont des vecteurs directeurs unitaires de ( $\Omega I$ ), ( $\Omega J$ ) et ( $\Omega K$ ) respectivement. Montrer que, si  $\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1 = \vec{w}_1 \cdot \vec{u}_1 = c$ , alors  $c = \varphi(h)$ .

f. Soit ( $h, h'$ ) un couple de deux nombres réels et soient  $\Omega$  et  $\Omega'$  les points de coordonnées respectives (0, 0,  $h$ ) et (0, 0,  $h'$ ). Montrer que la gerbe  $G' = \{(\Omega' I), (\Omega' J), (\Omega' K)\}$  est isométrique à la gerbe  $G = \{(\Omega I), (\Omega J), (\Omega K)\}$  si, et seulement si,  $\varphi(h') = \varphi(h)$ .

### A.3. Exemples de gerbes d'ordre 4, 5 et 6.

A.3.1. On considère les points A, B, C, D de coordonnées respectives (1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1). Montrer que les quatre droites (OA), (OB), (OC), (OD) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

A.3.2. On pose  $z = e^{2i\pi/5}$  et on note  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  les points du plan (O ;  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ), d'affixes respectives 1,  $z, z^2, z^3, z^4$  par rapport au repère (O ;  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ) de ce plan.

a. Calculer la somme  $z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2$  et en déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ .

Montrer qu'on a  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$  et  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ .

b. En prenant l'unité de longueur égale à 4 centimètres, construire à la règle et au compas la figure formée par les points  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ . Justifier cette construction au moyen des résultats de la question a.

c. Soit  $\Omega$  le point de coordonnées (0, 0, 1/2). Vérifier que les six droites ( $\Omega O$ ), ( $\Omega A_1$ ), ( $\Omega A_2$ ), ( $\Omega A_3$ ), ( $\Omega A_4$ ), ( $\Omega A_5$ ) forment une gerbe dont on précisera le rapport (on pourra remarquer que, pour  $1 \leq i \leq j \leq 5$ , on a la relation  $\overline{\Omega A_i} \cdot \overline{\Omega A_j} = \overline{O A_i} \cdot \overline{O A_j} + \overline{O \Omega}^2$ ).

En déduire l'existence d'au moins une gerbe d'ordre 5, puis l'existence d'au moins une gerbe d'ordre 4 non isométrique à celle qui a été construite en A.3.1.

## B. GERBES D'ORDRE 3

## B.1. Matrice de Gram d'une famille de trois vecteurs.

On appelle matrice de Gram d'une famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  de trois vecteurs de E, la matrice  $M = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$ , des produits scalaires  $a_{ij} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$ .

B.1.1. Soit  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  et soit  $\vec{v}$  le vecteur  $x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3$ .

Démontrer les égalités matricielles suivantes où  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  :

$$MX = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{v} \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{v} \\ \vec{u}_3 \cdot \vec{v} \end{bmatrix} \text{ et } {}^t XMX = \|\vec{v}\|^2.$$

En déduire que  $MX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  si, et seulement si,  $\vec{v} = \vec{0}$ , puis que M est inversible si, et seulement si,

la famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est libre.

B.1.2. Quelles propriétés de la matrice M permettent d'affirmer que toutes ses valeurs propres sont réelles ? Déduire de B.1.1. que ces valeurs propres sont positives ou nulles.

## B.2. Automorphismes orthogonaux transformant une famille libre donnée en une famille donnée.

B.2.1. Soient  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  et  $(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3)$  deux familles de trois vecteurs de E, dont la première est libre. On suppose que, pour  $1 \leq i \leq j \leq 3$ , on a  $\vec{u}'_i \cdot \vec{u}'_j = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$ . Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal  $\sigma$  de E tel que, pour  $1 \leq i \leq 3$ , on ait  $\sigma(\vec{u}_i) = \vec{u}'_i$ .  $\sigma$  est-il unique ?

B.2.2. Soient  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  et  $(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2)$  deux familles de deux vecteurs de E, dont la première est libre. On suppose que, pour  $1 \leq i \leq j \leq 2$ , on a  $\vec{u}'_i \cdot \vec{u}'_j = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$ . Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal  $\sigma$  de E tel que, pour  $1 \leq i \leq 2$ , on ait  $\sigma(\vec{u}_i) = \vec{u}'_i$ .  $\sigma$  est-il unique ?

## B.3. Classification des gerbes d'ordre 3.

B.3.1. Soit  $G = \{d_1, d_2, d_3\}$  une gerbe d'ordre 3 et de rapport  $\gamma$ . Soit  $\vec{u}_1$  un vecteur directeur unitaire de  $d_1$ .

a. Montrer qu'il existe des vecteurs directeurs unitaires  $\vec{u}_2$  et  $\vec{u}_3$  des droites  $d_2$  et  $d_3$  tels que  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1$ .

Dans la suite de la question B.3.1., on suppose  $\vec{u}_2$  et  $\vec{u}_3$  choisis de cette manière, on pose :

$$c = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 \text{ et } M = \begin{bmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Déterminer les valeurs propres de M, et en déduire qu'on a :  $c \geq -\frac{1}{2}$ .

c. Si  $c > -\frac{1}{2}$ , montrer que G est isométrique à l'une des gerbes construites à la question A.2.5.

d. On suppose  $c = -\frac{1}{2}$ . Montrer que  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$  (on pourra utiliser B.1.1. avec  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ). En déduire que G est encore isométrique à l'une des gerbes construites à la question A.2.5.

B.3.2. Quel est l'ensemble de tous les réels  $\gamma \in ]0, 1[$  pour lesquels il existe au moins une gerbe d'ordre 3 et de rapport  $\gamma$  ?

Pour chaque  $\gamma$  appartenant à cet ensemble, déterminer une famille de gerbes d'ordre 3 et de rapport  $\gamma$ , deux à deux non isométriques, et telles que toute gerbe d'ordre 3 et de rapport  $\gamma$  soit isométrique à l'une d'entre elles (on pourra distinguer les cas  $\gamma \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$  et  $\gamma \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ ).

### C. GERBES D'ORDRE SUPÉRIEUR OU ÉGAL À 4

#### C.1. Groupes finis de rotations de même axe.

Dans toute cette partie C.1.,  $m$  désigne un entier supérieur ou égal à 1.

C.1.1. On note  $T$  le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. On considère une droite  $d$  de l'espace.

a. Montrer que  $T$  contient un unique sous-groupe d'ordre  $m$  dont on précisera les éléments.

b. Définir, sans démonstration, un isomorphisme du groupe  $T$  sur le groupe  $R_d$  de toutes les rotations d'axe  $d$ . En déduire que  $R_d$  contient un unique sous-groupe d'ordre  $m$  dont on précisera les éléments.

On note ce sous-groupe  $R_{d,m}$ .

c. Soit  $f$  une isométrie de  $\mathcal{E}$ , montrer que :

$$\{f \circ \sigma \circ f^{-1} \mid \sigma \in R_{d,m}\} = R_{d',m}$$

où  $d'$  est une droite qu'on précisera.

C.1.2. Soient  $F = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ ,  $F' = \{d'_0, d'_1, \dots, d'_m\}$  deux ensembles de  $m + 1$  droites de  $\mathcal{E}$ . On suppose que  $\{d_1, \dots, d_m\} = \{\sigma(d_1) \mid \sigma \in R_{d_0,m}\}$ , et que  $\{d'_1, \dots, d'_m\} = \{\tau(d'_1) \mid \tau \in R_{d'_0,m}\}$ . Soit  $f$  une isométrie de  $\mathcal{E}$  qui transforme  $d_0$  en  $d'_0$  et  $d_1$  en  $d'_1$ .

Déduire de C.1.1.c. que  $F'$  est l'ensemble des images par  $f$  de toutes les droites de  $F$ .

C.1.3. Soit  $\rho$  la transformation de  $\mathcal{E}$  définie analytiquement par les formules :  $x' = z$ ,  $y' = x$ ,  $z' = y$ . Montrer que  $\{\text{Id}_d, \rho, \rho^2\} = R_{d,3}$  où  $d$  est une droite qu'on précisera.

#### C.2. Étude des gerbes d'ordre $n$ , $n \geq 4$ .

Dans toute cette partie, on considère un entier  $n$ ,  $n \geq 4$ , et une gerbe  $G = \{d_0, d_1, \dots, d_n\}$  d'ordre  $n$ , de centre  $\Omega$ , de rapport  $\gamma$ , avec  $m = n - 1$ .

Soit  $\vec{u}_0$  un vecteur directeur unitaire de  $d_0$ .

C.2.1. Montrer que  $\gamma$  est différent de 0, et qu'il existe, pour chaque entier  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , un unique vecteur directeur unitaire  $\vec{u}_k$  de  $d_k$  tel que  $\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_k = \gamma$ .

Dans tout ce qui suit, on note  $A_0, A_1, \dots, A_m$  les points de  $\mathcal{E}$  définis, pour  $0 \leq k \leq m$ , par  $\overline{\Omega A_k} = u_k$ .

On note  $I$  le point de  $d_0$  défini par  $\overline{\Omega I} = \gamma \vec{u}_0$  et  $\Pi$  le plan perpendiculaire en  $I$  à  $d_0$ .

C.2.2. Montrer que  $A_1, \dots, A_m$  appartiennent au plan  $\Pi$ . Vérifier qu'on a, pour  $1 \leq k \leq l \leq m$ ,  $\overline{IA_k} \cdot \overline{IA_l} = \vec{u}_k \cdot \vec{u}_l - \gamma^2$ . En déduire que  $A_1, \dots, A_m$  appartiennent à un même cercle  $\mathcal{C}$  du plan  $\Pi$ , dont on précisera le centre et le rayon.

Pour chaque entier  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , on note  $S_k$  l'ensemble constitué de  $A_k$  et de tous les points  $M$  du cercle  $\mathcal{C}$  tels que  $\overline{IA_k} \cdot \overline{IM}$  soit égal à  $\gamma - \gamma^2$  ou à  $-\gamma - \gamma^2$ .

C.2.3. En observant que l'ensemble  $S = \{A_1, \dots, A_m\}$  est contenu dans chaque  $S_k$ , montrer qu'on a  $n \leq 6$ .

C.2.4. Vérifier que, quitte à modifier l'indexation des droites  $d_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , on peut supposer  $\overline{u_1} \cdot \overline{u_2} = \overline{u_1} \cdot \overline{u_3}$ .

On suppose, dans toute la suite de la question C.2., que cette condition est satisfaite. On oriente le plan  $\Pi$  et on note  $\alpha$  une mesure de l'angle  $(\overline{IA_1}, \overline{IA_2})$ .

C.2.5. Déterminer, en fonction de  $\alpha$ , une mesure de l'angle  $(\overline{IA_1}, \overline{IA_3})$ , puis une mesure de l'angle  $(\overline{IA_2}, \overline{IA_3})$ . En déduire que les nombres  $\cos \alpha$  et  $\cos(2\alpha)$  appartiennent à l'ensemble  $\left\{ \frac{\gamma}{1+\gamma}, -\frac{\gamma}{1-\gamma} \right\}$ .

C.2.6. On suppose  $\cos(2\alpha) = \cos \alpha$ .

a. Montrer que le triangle  $A_1A_2A_3$  est équilatéral et que  $\gamma = \frac{1}{3}$ .

b. On suppose que  $S$  contient un point  $M$  différent de  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ . Montrer que  $\overline{IA_1} \cdot \overline{IM} = \overline{IA_2} \cdot \overline{IM} = \overline{IA_3} \cdot \overline{IM} = \frac{2}{9}$ . En déduire une contradiction en considérant la somme  $\overline{IA_1} \cdot \overline{IM} + \overline{IA_2} \cdot \overline{IM} + \overline{IA_3} \cdot \overline{IM}$ .

c. Montrer que  $G$  est isométrique à la gerbe construite en A.3.1. (on pourra utiliser C.1.2. et C.1.3.)

C.2.7. On suppose  $\cos(2\alpha) \neq \cos \alpha$ .

a. On pose  $a = \frac{\gamma}{1+\gamma}$  et  $b = -\frac{\gamma}{1-\gamma}$ . Comparer  $a+b$  et  $ab$ . En déduire que  $\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha)$ .

b. Montrer que  $S_1$  est l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier. Calculer  $\gamma$  (on pourra utiliser A.3.2.a.).

### 2.3. Classification des gerbes d'ordre $n$ , $n \geq 4$ .

C.3.1. Déterminer tous les couples  $(n, \gamma)$ , avec  $n \geq 4$ , pour lesquels il existe au moins une gerbe d'ordre  $n$  et de rapport  $\gamma$ .

C.3.2. Soit  $G$  une gerbe d'ordre 6.

a. Soient  $(d_0, d_1)$  et  $(d'_0, d'_1)$  deux couples constitués chacun de deux droites distinctes de  $G$ . Montrer qu'il existe une isométrie  $f$  de  $\mathcal{S}$  qui transforme  $d_0$  en  $d'_0$  et  $d_1$  en  $d'_1$ . Quelle est la gerbe image de  $G$  par  $f$ ?

b. Étant donné un entier  $k$ ,  $4 \leq k \leq 5$ , montrer que toutes les gerbes d'ordre  $k$  contenues dans  $G$  sont isométriques à l'une d'entre elles. En est-il de même lorsque  $k = 3$ ?

C.3.3. Pour chaque couple  $(n, \gamma)$  trouvé en C.3.1., montrer que toutes les gerbes d'ordre  $n$  et de rapport  $\gamma$  sont isométriques à l'une d'entre elles.