

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2021

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 MP

m.laamoum@gmail.com

Inégalités de Bernstein

I Inégalité polynomiale de Bernstein et applications

I.A Polynômes de Tchebychev

On a $T_0 = 1, T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Q 1.

• Par récurrence sur n . On a $\deg T_0 = 0$ et $\deg T_1 = 1$, supposons que $\deg T_k = k$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, comme $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, $\deg XT_n = n + 1$ et $\deg T_{n-1} = n - 1$ alors $\deg T_{n+1} = n + 1$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \deg T_n = n$.

• Soit $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$ dans \mathbb{C}^{n+1} telle que $\alpha_0 T_0 + \dots + \alpha_n T_n = 0$ donc $\alpha_n T_n = -\alpha_0 T_0 - \dots - \alpha_{n-1} T_{n-1}$.

La suite $(\deg T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante donc $\deg(\alpha_n T_n) = \deg(-\alpha_0 T_0 - \dots - \alpha_{n-1} T_{n-1}) \leq n - 1$, si $\alpha_n \neq 0$ alors $\deg(\alpha_n T_n) = n$ ce qui est absurde. Ainsi par récurrence (descendante) on a $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$ et $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

La famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre à $n + 1$ éléments dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui est de dimension $n + 1$, donc $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q 2. Montrons par récurrence que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

C'est vrai pour $n = 0, n = 1$, supposons pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\theta \in \mathbb{R}, T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$.

On a $T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_n(\cos \theta) - T_{n-1}(\cos \theta)$, l'hypothèse de récurrence donne

$$T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$

On sait que $\cos(\theta) \cos(n\theta) = \frac{1}{2}(\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta))$, d'où

$$T_{n+1}(\cos \theta) = \cos((n+1)\theta)$$

Q 3. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ donc $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, par suite

$$P(\cos \theta) = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k(\cos \theta) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos(k\theta)$$

Ainsi $\theta \mapsto P(\cos \theta)$ est dans S_n .

Q 4. Soit $x \in [-1, 1]$ alors il existe $\theta \in [0, \pi]$ unique, tel que $\cos \theta = x$, donc $|T_n(x)| = |\cos(n\theta)|$, ce qui donne

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = \sup_{\theta \in [0, \pi]} |\cos(n\theta)| = 1$$

Q 5. Montrons par récurrence que $|\sin(n\theta)| \leq n |\sin \theta|$.

C'est vrai pour $n = 0$, supposons le pour n , on a

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)\theta)| &\leq |\cos n\theta| |\sin \theta| + |\cos \theta| |\sin n\theta| \\ &\leq |\sin \theta| + |\sin n\theta| \end{aligned}$$

l'hypothèse de récurrence donne $|\sin((n+1)\theta)| \leq (n+1) |\sin \theta|$.

On a

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |T'_n(x)| = \sup_{\theta \in [0, \pi]} |T'_n(\cos \theta)|$$

de la relation $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ on a $\sin(\theta) T'_n(\cos \theta) = n \sin(n\theta)$ donc $|\sin(\theta) T'_n(\cos \theta)| \leq n^2 |\sin \theta|$ et

$$|T'_n(\cos \theta)| \leq n^2$$

Pour $\theta \neq k\pi$, $T'_n(\cos \theta) = n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}$ donc $|T'_n(\cos \theta)| \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} n^2$ et $|T'_n(\cos \theta)| \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} |T'_n(1)|$, donc $|T'_n(1)| = n^2$.

Ainsi $\sup_{\theta \in [0, \pi]} |T'_n(\cos \theta)| = n^2$.

I.B Inégalité de Bernstein

Q 6. Soit $A \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, scindé à racines simples, (a_1, \dots, a_{2n}) ses racines et $B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$. La décomposition de la fraction $\frac{B}{A}$ en éléments simples s'écrit

$$\frac{B(X)}{A(X)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_k}{X - a_k}$$

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on a $(X - a_i) \frac{B(X)}{A(X)} = \alpha_i + (X - a_i) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{2n} \frac{\alpha_k}{X - a_k}$ donc $\alpha_i = \lim_{t \rightarrow a_i} (t - a_i) \frac{B(t)}{A(t)}$, comme a_i est racine

simple de A alors $\lim_{t \rightarrow a_i} \frac{A(t)}{t - a_i} = A'(a_i) \neq 0$ ce qui donne $\alpha_i = \frac{B(a_i)}{A'(a_i)}$ et $\frac{B(X)}{A(X)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{B(a_k)}{(X - a_k) A'(a_k)}$.

Q 7. Soit P dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, $P_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$.

On a $P_\lambda(1) = 0$ donc $X - 1$ divise P_λ .

Q 8. La formule de Taylor en λ s'écrit

$$P(X) = P(\lambda) + (X - \lambda) \sum_{k=1}^{2n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^{k-1}$$

donc

$$P(\lambda X) = P(\lambda) + \lambda(X - 1) \sum_{k=1}^{2n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} \lambda^{k-1} (X - 1)^{k-1}$$

et

$$Q_\lambda(X) = \lambda P'(\lambda) + \sum_{k=2}^{2n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} \lambda^k (X - 1)^{k-1}$$

ce qui donne $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$.

On considère le polynôme $R(X) = X^{2n} + 1$. Pour k dans $\llbracket 1, 2n \rrbracket$, on note $\varphi_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ et $\omega_k = e^{i\varphi_k}$.

Q 9. Les racines de $R(X) = X^{2n} + 1$ sont les racines d'ordre $2n$ de -1 qui sont $e^{i \frac{(2k+1)\pi}{2n}} = \omega_k$ avec k dans $\llbracket 1, 2n \rrbracket$, R est unitaire donc

$$R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k).$$

Q 10. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La formule (I.1), donne

$$Q_\lambda(X) = \sum_{k=1}^{2n} Q_\lambda(\omega_k) \frac{R(X)}{(X - \omega_k) R'(\omega_k)}$$

on a $Q_\lambda(\omega_k) = \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}$ et $R'(\omega_k) = 2n\omega_k^{2n-1} = \frac{-2n}{\omega_k}$ d'où

$$Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n} + 1}{X - \omega_k} \omega_k$$

On a $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$ donc

$$\begin{aligned} \lambda P'(\lambda) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{(\omega_k - 1)^2} 2\omega_k \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}. \end{aligned}$$

Q 11. L'égalité (I.2) appliquée au polynôme $P(X) = X^{2n}$ donne

$$2n\lambda^{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{-2\lambda^{2n}}{(\omega_k - 1)^2} 2\omega_k.$$

après simplification

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\omega_k}{(\omega_k - 1)^2} = -n^2.$$

La formule (I.2) s'écrit alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda \omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} + nP(\lambda).$$

Q 12. Soit $f \in \mathcal{S}_n$ donc $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$ avec $a_k, b_k \in \mathbb{C} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On utilise la formule d'Euler pour écrire

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k e^{ik\theta} + \beta_k e^{-ik\theta}) \\ &= e^{-in\theta} \left(e^{in\theta} a_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k e^{i(k+n)\theta} + \beta_k e^{i(n-k)\theta}) \right) \\ &= e^{-in\theta} \left(e^{in\theta} a_0 + \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_{k-n} e^{ik\theta} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n-k} e^{ik\theta} \right) \end{aligned}$$

Donc $f(\theta) = e^{-in\theta} U(e^{i\theta})$ avec $U(X) = a_0 X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_{k-n} X^k + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n-k} X^k \in \mathbb{C}_{2n}[X]$

Q 13. Soit $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} &= \frac{2(e^{i\varphi_k/2})^2}{(1 - e^{i\varphi_k})^2} \\ &= \frac{2}{(e^{-i\varphi_k/2} - e^{i\varphi_k/2})^2} \\ &= \frac{-1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} \end{aligned}$$

On sait que $f(\theta) = e^{-in\theta} U(e^{i\theta})$ (Q12) avec $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. On applique la question Q11 à U avec $\lambda = e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} U'(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U(e^{i(\theta+\varphi_k)}) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} + nU(e^{i\theta}) \\ &= \frac{-1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U(e^{i(\theta+\varphi_k)}) \frac{1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} + nU(e^{i\theta}) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -ine^{-in\theta} U(e^{i\theta}) + ie^{i(1-n)\theta} U'(e^{i\theta}) \\ &= ie^{-in\theta} (-nU(e^{i\theta}) + e^\theta U'(e^{i\theta})) \end{aligned}$$

et $e^{-in\varphi_k} = -i(-1)^k$ donc

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= ie^{-in\theta} \frac{-1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U(e^{i(\theta+\varphi_k)}) \frac{1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} e^{-i(\theta+\varphi_k)} U(e^{i(\theta+\varphi_k)}) \frac{(-1)^k}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(\theta + \varphi_k) \frac{(-1)^k}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} \end{aligned}$$

Q 14. f est bornée sur \mathbb{R} donc $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ existe. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$|f'(\theta)| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} |f(\theta + \varphi_k)| \frac{1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2}.$$

Les questions Q11 et Q12 donnent

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\omega_k}{(\omega_k - 1)^2} = -n^2 \text{ et } \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} = \frac{-1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} = 2n^2$$

ainsi

$$|f'(\theta)| \leq n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

I.C Quelques conséquences de l'inégalité (I.4)

Q 15. Soit $x \in [-1, 1]$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos t$. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ posons $f(t) = P(\cos(t))$. D'après la question Q3 on a $f \in \mathcal{S}_n$, la question Q14 donne $|f'(t)| \leq n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. De plus

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

et

$$|f'(t)| = |\sin(t) P'(\cos(t))| = \left| P'(x) \sqrt{1-x^2} \right|$$

ainsi

$$\left| P'(x) \sqrt{1-x^2} \right| \leq n \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

Q 16. Soit $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ avec $Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $f : \theta \mapsto Q(\cos \theta) \sin \theta$, on a $f(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sin \theta \cos^k(\theta)$. Remarquons que

$$\sin \theta \cos^k(\theta) = -\frac{1}{k+1} (\cos^{k+1}(\theta))'$$

Comme $(T_h)_{0 \leq h \leq k+1}$ est une base de $\mathbb{C}_{k+1}[X]$ alors il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_h \in \mathbb{C}$, $X^{k+1} = \sum_{h=0}^{k+1} \alpha_h T_h(X)$ donc

$$\cos^{k+1}(\theta) = \sum_{h=0}^{k+1} \alpha_h T_h(\cos(\theta)) = \sum_{h=0}^{k+1} \alpha_h \cos(h\theta)$$

et

$$\sin \theta \cos^k(\theta) = \sum_{h=0}^{k+1} \frac{h \alpha_h}{k+1} \sin(h\theta)$$

ce qui permet d'écrire $f(\theta)$ sous la forme $\sum_{k=0}^{n-1} b_k \sin(k\theta)$ ainsi $f \in \mathcal{S}_n$.

Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos \theta$. On a

$$f'(\theta) = \cos(\theta) Q(\cos \theta) - \sin^2(\theta) Q'(\cos \theta)$$

et $f'(0) = Q(1)$ de plus

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \left| Q(x) \sqrt{1-x^2} \right|$$

L'inégalité $|f'(0)| \leq n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ s'écrit alors

$$|Q(1)| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} \left| Q(x) \sqrt{1-x^2} \right|$$

Q 17. Soit $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $t \in [-1, 1]$. $S_t(X) = R(tX)$, on a $|S_t(1)| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |R(tx)\sqrt{1-x^2}|$.

On a $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-(tx)^2}$ donc $|R(tx)|\sqrt{1-x^2} \leq |R(tx)|\sqrt{1-(tx)^2} \leq \sup_{-1 \leq x \leq 1} |R(x)\sqrt{1-x^2}|$
 et

$$\sup_{-1 \leq x \leq 1} |R(tx)\sqrt{1-x^2}| \leq \sup_{-1 \leq x \leq 1} |R(x)\sqrt{1-x^2}|$$

Finalement $|R(t)| = |S_t(1)| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |R(x)\sqrt{1-x^2}|$

Q 18. Soit P dans $\mathbb{C}_n[X]$, la question Q17 appliquée à P donne

$$|P'(t)| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P'(x)\sqrt{1-x^2}|$$

De la question Q15 on a

$$|P'(x)\sqrt{1-x^2}| \leq n \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

donc

$$\sup_{-1 \leq x \leq 1} |P'(x)\sqrt{1-x^2}| \leq n \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

et

$$|P'(t)| \leq n^2 \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

ceci est vrai pour tout t dans $[-1, 1]$ d'où

$$\|P'\|_{L^\infty([-1,1])} \leq n^2 \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

Q 19. Il y'a égalité pour les polynômes de Tchebychev. En effet des questions Q4 et Q5 on a $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1$ et $\|T'_n\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2$ donc $\|T'_n\|_{L^\infty([-1,1])} = \|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} n^2$.

II Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

II.A Transformée de Fourier d'une fonction

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx$, $\xi \in \mathbb{R}$

Q 20. La fonction $g : (x, \xi) \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur \mathbb{R}^2 , $|g(x, \xi)| \leq |f(x)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, donc $\xi \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est intégrable et \hat{f} est bien définie, le théorème de continuité assure que \hat{f} est continue sur \mathbb{R} .

Q 21. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a $\alpha f + \beta g \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\widehat{\alpha f + \beta g}$ est bien définie, par linéarité de l'intégrale on a $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$.

Comme $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ alors $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, ce qui assure que l'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ est continue de $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ dans $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Q 22. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout réel x . On sait que $g \in L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^-)$. Soit $A \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_0^A |g(x)| dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda A} |f(x)| dx$$

$f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A |g(x)| dx$ existe et $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$, de même on a $\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 |g(x)| dx$ existe et $g \in L^1(\mathbb{R}^-)$, par suite $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Par le changement $t = \lambda x$ on obtient

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi/\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

II.B Produit de convolution

Q 23. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $|f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)|$, donc $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur \mathbb{R} et $f * g$ est définie sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$, le changement $s = x - t$ donne $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)ds = (g * f)(x)$.

Q 24. Soit $x \in \mathbb{R}$, $|(f * g)(x)| \leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$, donc $f * g$ est bornée et $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Q 25. Soit $k \in \mathbb{N}$ et g est de classe \mathcal{C}^k telle que les fonctions $g^{(j)}$ sont bornées pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Soit $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ la fonction $h : (t, x) \mapsto f(t)g(x-t)$ est de classe \mathcal{C}^k et

$$\frac{\partial^j h}{\partial x^j}(t, x) = f(t)g^{(j)}(x-t)$$

donc

$$\left| \frac{\partial^j h}{\partial x^j}(t, x) \right| \leq |f(t)| \|g^{(j)}\|_\infty$$

Ainsi $f * g$ est de classe \mathcal{C}^k et $(f * g)^{(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^{(k)}(x-t)dt = f * (g^{(k)})$.

Q 26. On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \right) e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} g(x-t)dx \right) dt \end{aligned}$$

par le changement $s = x - t$ on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} g(x-t)dx = e^{-it\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(s+t)\xi} g(s)ds$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(s+t)\xi} g(s)ds \right) dt \\ &= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

II.C Introduction d'une fonction plateau

Q 27. Montrons par récurrence que φ est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} , $\forall k \in \mathbb{N}$.

– On a φ est continue sur \mathbb{R}^* et $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, donc φ est de classe \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R} .

– Soit $k \geq 1$, supposons que : φ est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} et

$$\exists P_k \in \mathbb{R}[X], \varphi^{(k)}(t) = \begin{cases} P_k(1/t)e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

• $\varphi^{(k)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* , $(\varphi^{(k)})'(t) = 0$ si $t < 0$ et $(\varphi^{(k)})'(t) = \frac{1}{t^2} (-P_k'(1/t) + P_k(1/t)) e^{-1/t}$ si $t > 0$, posons

$$P_k(X) = X^2 (-P_k'(X) + P_k(X))$$

alors φ est de classe \mathcal{C}^{k+1} sur \mathbb{R}^* et $\varphi^{(k+1)}(t) = \begin{cases} P_{k+1}(1/t)e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

• On a

$$\frac{\varphi^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(0)}{t} = \begin{cases} \frac{1}{t} P_{k+1}(1/t)e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(0)}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(0)}{t} = 0$$

donc φ est $k + 1$ fois dérivable en 0 et $\varphi^{(k+1)}(0) = 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi^{(k+1)}(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi^{(k+1)}(t) = 0$ donc φ est de classe \mathcal{C}^{k+1} en 0 .

Ainsi φ est de classe \mathcal{C}^{k+1} sur \mathbb{R} et $\varphi^{(k+1)}(t) = \begin{cases} P_{k+1}(1/t)e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$

Finalement φ est de classe $\mathcal{C}^k \forall k \in \mathbb{N}$ sur \mathbb{R} .

Q 28. Soit $\psi : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]-1, 1[\\ e^{1/(t^2-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$ définie sur \mathbb{R} , on a $\psi(t) = \varphi(1-t^2)$. ψ est composée de deux fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} donc elle est aussi.

Q 29. Soit $\theta : x \mapsto \int_0^x \psi(t) dt$ l'unique primitive de ψ s'annulant en 0. Comme $\theta' = \psi$ alors θ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Soit $x \in]-\infty, -1]$, on a $\psi(t) = 0$ pour $t \in [0, x]$ donc $\theta(x) = 0 = A$.

Soit $x \in [1, +\infty[$, $\theta(x) = \int_0^1 \psi(t) dt + \int_1^x \psi(t) dt$ et $\int_1^x \psi(t) dt = 0$, car $\psi(t) = 0$ pour $t \in [0, x]$, donc $\theta(x) = \int_0^1 \psi(t) dt = B$.

De plus $B \neq 0$ car ψ est continue et strictement positive sur $[0, 1]$.

Q 30. Posons $h : x \mapsto \frac{1}{B}\theta(x)$, elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , $h(x) = 0$ si $x \in]-\infty, -1]$ et $h(x) = 1$ si $x \in [1, +\infty[$. On compose h avec une fonction affine $x \mapsto ax + b$ qui envoie -2 sur 1 et -1 sur -1 . On a donc $a = 2$ et $b = 3$.

La fonction $x \mapsto h(2x + 3)$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et $h(2x + 3) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -2] \\ 1 & \text{si } x \in [-1, +\infty[\end{cases}$.

De même on compose h avec la fonction affine $x \mapsto -2x + 3$ qui envoie 2 sur -1 et 1 sur 1 .

La fonction $x \mapsto h(-2x + 3)$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et $h(-2x + 3) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [2, +\infty[\\ 1 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \end{cases}$.

Donc la fonction suivante convient :

$$\rho : x \mapsto h(2x + 3)h(-2x + 3)$$

en effet $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et :

Si $x \in [-1, 1]$ alors $h(2x + 3) = h(-2x + 3) = 1$ donc $\rho(x) = 1$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ alors $h(2x + 3) = 0$ ou $h(-2x + 3) = 0$ donc $\rho(x) = 0$.

Plus précisément $\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2] \\ 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ h(2x + 3) & \text{si } x \in [-2, -1] \\ h(-2x + 3) & \text{si } x \in [1, -2] \end{cases}$

II.D Inégalités de Bernstein

Soit r la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que, pour tout réel x ,

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi$$

Q 31. On a $\rho(\xi) = 0$ si $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ donc $\xi \mapsto e^{ix\xi} \rho(\xi)$ est intégrable sur \mathbb{R} et r est bien définie sur \mathbb{R} .

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi$$

La fonction $(x, \xi) \mapsto e^{ix\xi} \rho(\xi)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 , et $\frac{\partial}{\partial x} (e^{ix\xi} \rho(\xi)) = i\xi e^{ix\xi} \rho(\xi)$. La fonction $\xi \mapsto \xi \rho(\xi)$ est continue sur le compact $[-2, 2]$, elle est donc bornée, $|\xi \rho(\xi)| \leq M$ et $M \in \mathbb{R}^+$, par suite $\left| \frac{\partial}{\partial x} (e^{ix\xi} \rho(\xi)) \right| \leq M$ et la fonction $\xi \mapsto M$ est intégrable sur $[-2, 2]$, ce qui donne que r est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $r'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} i\xi e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi$.

Q 32. Une double intégration par parties donne

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{1}{2i\pi x} \int_{-2}^2 (e^{ix\xi})' \rho(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2i\pi x} \int_{-2}^2 e^{ix\xi} \rho'(\xi) d\xi \\ &= \frac{-1}{2\pi x^2} \int_{-2}^2 e^{ix\xi} \rho''(\xi) d\xi \end{aligned}$$

ρ'' est bornée sur $[-2, 2]$ ce qui donne $x \mapsto x^2 r(x)$ est bornée sur \mathbb{R} , et $r(x) = O(\frac{1}{x^2})$ donc r est intégrable sur \mathbb{R} .

Comme ρ est bornée sur $[-2, 2]$ et $r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi$ alors r est bornée sur \mathbb{R} .

Q 33. On a $r(\lambda x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda\xi} \rho(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \rho(\frac{t}{\lambda}) dt$ donc $\widehat{r}_\lambda = \frac{1}{\lambda} \rho_{1/\lambda}$ avec $\rho_{1/\lambda} : t \mapsto \rho(\frac{t}{\lambda})$.

Remarquons que $\rho_{1/\lambda}(t) = 1$ si $t \in [-\lambda, \lambda]$ et \widehat{f} est nulle en dehors de $[-\lambda, \lambda]$ donc $\widehat{f} = \widehat{f} \rho_{1/\lambda} = \lambda \widehat{f} \widehat{r}_\lambda$, comme $f * r_\lambda$ est intégrable alors $\widehat{f} \widehat{r}_\lambda = \widehat{f * r_\lambda}$ et $\widehat{f} = \lambda \widehat{f * r_\lambda}$, ce qui donne $f = \lambda f * r_\lambda$. et $\widehat{f} \widehat{r}_\lambda = \widehat{f * r_\lambda}$ ainsi $f = \lambda f * r_\lambda$

Q 34. On a r'_λ est bornée et intégrable sur \mathbb{R} . Les questions Q24 et Q25 et la relation $f = \lambda f * r_\lambda$ donnent $f' = \lambda f * r'_\lambda$ et $\|f'\|_\infty = \lambda \|f * r'_\lambda\|_\infty \leq \|r'_\lambda\|_1 \|f\|_\infty$.

On a $\|r'_\lambda\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda |r'(\lambda t)| dt = \int_{s=\lambda t}^{+\infty} |r'(s)| ds = C$ indépendante de λ , d'où

$$\|f'\|_\infty \leq C \lambda \|f\|_\infty.$$