

Partie I

1. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0, elle équivaut à $\frac{1}{\sqrt{t}}$, qui est intégrable sur $]0, 1]$ et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$, qui est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc elle est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. Le changement de variable $u = \sqrt{kt}$ ($\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même) conduit à

$$J_k = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

3. Analogie au 1. : au voisinage de 0, $\frac{1}{\sqrt{t} \operatorname{ch} t} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$, et au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{t} \operatorname{ch} t} \sim \frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
4. (a) Il suffit de remplacer $\operatorname{ch} t$ par sa définition, et de multiplier numérateur et dénominateur par e^{-t} .
- (b) Sur $]0, +\infty[$, $e^{-2t} < 1$, donc

$$\frac{1}{1 + e^{-2t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-2nt}$$

Donc

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right) dt$$

La série fournie par l'énoncé n'étant pas absolument convergente, il n'y a aucune chance de pouvoir appliquer le théorème habituel d'intégration terme à terme sur un intervalle non borné.

On écrit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} K &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right) dt + \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} \left((-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right) dt + \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right) dt \end{aligned}$$

puisque la première somme est finie. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right) dt = 0$$

Il s'agit du reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial, donc

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{e^{-(2n+3)t}}{\sqrt{t}}$$

On peut, ou bien utiliser le théorème de convergence dominée en majorant encore par $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, ou bien écrire :

$$\left| \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right| dt \leq J_{2n+3} = \sqrt{\frac{\pi}{2n+3}}$$

qui tend bien vers 0 si n tend vers $+\infty$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient bien

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k J_{2k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$$

5. La forme intégrale du 4.(a) montre, en écrivant $0 < e^{-2t} < 1$, que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{J_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} dt < K < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} J_1$$

donc

$$\frac{1}{2} < K < 1$$

On peut aussi utiliser la série alternée, mais c'est plutôt plus lourd.

Partie II

6. (a) Calcul à savoir faire ! On écrit

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \operatorname{Im} \sum_{k=0}^n e^{ikx} \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) \quad (x \in]0, \pi[, \text{ donc } e^{ix} \neq 1) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i \frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i \frac{x}{2}}} \cdot \frac{-2i \sin \frac{(n+1)x}{2}}{-2i \sin \frac{x}{2}} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

On remarque qu'il en résulte $|A_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$, puisque $\frac{x}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(b) C'est ce qu'on appelle la transformation d'Abel $\mathcal{A}$. En remarquant que, si $k \geq 2$, $\sin(kx) = A_k(x) - A_{k-1}(x)$, on écrit

$$f_n(x) = A_1(x) + \sum_{k=2}^n \frac{A_k(x) - A_{k-1}(x)}{\sqrt{k}}$$

On sépare ensuite la somme en deux, et on fait un changement d'indice dans la deuxième somme. On obtient

$$f_n(x) = A_1(x) + \sum_{k=2}^n \frac{A_k(x)}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(x)}{\sqrt{k+1}}$$

On rassemble à nouveau (le terme où figure $A_n(x)$ reste à part) :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) + \frac{A_n(x)}{\sqrt{n}}$$

Or $\left| \frac{A_n(x)}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \sqrt{n}}$, qui tend bien vers 0 si n tend vers l'infini.

7. D'après la question précédente, il suffit de montrer que la série $\sum A_k(x) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$ converge.

Or :

$$\left| A_k(x) \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

et par le télescopage, la série $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$ converge.

La série $\sum A_k(x) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$ est donc *absolument convergente*, ce qui permet de conclure.

8. (a) On a $f_{2n} \left(\frac{\pi}{4n} \right) - f_n \left(\frac{\pi}{4n} \right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin \left(k \frac{\pi}{4n} \right)}{\sqrt{k}}$.

Si $n \leq k \leq 2n$, alors $\frac{\pi}{4} \leq k \frac{\pi}{4n} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\sin \left(k \frac{\pi}{4n} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. D'autre part, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Donc

$$f_{2n} \left(\frac{\pi}{4n} \right) - f_n \left(\frac{\pi}{4n} \right) \geq n \times \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{n}$$

- (b) Si la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ convergeait uniformément sur $]0, \pi[$, alors $(f_{2n} - f_n)$ convergerait uniformément vers 0. Or, en notant $\| \cdot \|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $]0, \pi[$,

$$\left| f_{2n} \left(\frac{\pi}{4n} \right) - f_n \left(\frac{\pi}{4n} \right) \right| \leq \| f_{2n} - f_n \|_\infty$$

et la question précédente montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_{2n} \left(\frac{\pi}{4n} \right) - f_n \left(\frac{\pi}{4n} \right) \right) = +\infty$.

Donc $\lim \| f_{2n} - f_n \|_\infty = +\infty$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $]0, \pi[$.

9. (a) La fonction $g : t \mapsto |e^{ix-t} - 1|$ est continue sur $[0, +\infty[$. Étant positive, elle a les mêmes variations que son carré. Posons $h(t) = |e^{ix-t} - 1|^2$. On trouve sans peine

$$h(t) = e^{-2t} - 2e^{-t} \cos x + 1$$

h est de classe $\mathcal{C}^1$ et $h'(t) = 2e^{-t}(\cos x - e^{-t})$. Si $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, alors h' est négative sur $[0, +\infty[$.

Si $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, h' s'annule et change de signe pour $t = -\ln \cos x$, valeur qui est bien positive.

La valeur de h en ce point est

$$h(-\ln \cos x) = \cos^2 x - 2 \cos^2 x + 1 = \sin^2 x$$

Finalement, le tableau de variations de g est (en remarquant que $\sin x > 0$),

Cas $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

t	0	$+\infty$
$g(t)$	$ e^{ix} - 1 $	1

Cas $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

t	0	$-\ln \cos x$	$+\infty$
$g(t)$	$ e^{ix} - 1 $	$\sin x$	1

- (b) Ce qui précède montre que $|e^{-ixt} - 1| \geq 1$ si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, et que $|e^{-ixt} - 1| \geq \sin x > 0$ si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En tout cas,

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad \left| \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1 - e^{-ixt})} \right| \leq \frac{Ce^{-t}}{\sqrt{t}}$$

où $C = \frac{1}{\sin x}$ ou 1 selon les cas, ne dépend pas de t . L'intégrabilité en résulte sans peine.

- (c) La fonction $t \mapsto \frac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car

$$\left| \frac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})} \right| \leq \frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}|1 - e^{ix-t}|}$$

qui est intégrable d'après le (b).

On reconnaît dans cette expression la somme partielle d'une série géométrique. Plus précisément,

$$\frac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^n (e^{ix-t})^k$$

Donc (la somme est finie)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(e^{ix-t})^k}{\sqrt{t}} dt = \sum_{k=1}^n e^{ikx} J_k = \sum_{k=1}^n e^{ikx} \sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

dont la partie imaginaire est bien $\sqrt{\pi} f_n(x)$.

- (d) Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})}$ tend vers $\frac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})}$. Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée :

$$\forall t \in]0, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})} \right| \leq \frac{e^{-t} + e^{-(n+1)t}}{\sqrt{t}|1 - e^{ix-t}|} \leq \frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}|1 - e^{ix-t}|}$$

qui est continue et, d'après (b), intégrable sur $]0, +\infty[$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc, et (compte tenu en plus de la continuité de Im),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Im} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})} dt$$

On peut aussi majorer directement $\left| \int_0^{+\infty} \frac{(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})} dt \right|$ et vérifier que cette expression tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.

En multipliant haut et bas par le conjugué $\overline{1 - e^{ix-t}}$, on obtient

$$\frac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})} = \frac{e^{ix-t}(1 - e^{-ix-t})}{\sqrt{t}(1 + e^{-2t} - 2e^{-t} \cos x)} = \frac{(e^{ix-t} - e^{-2t})}{\sqrt{t}(1 + e^{-2t} - 2e^{-t} \cos x)}$$

dont la partie imaginaire est $\frac{e^{-t} \sin x}{\sqrt{t}(1 + e^{-2t} - 2e^{-t} \cos x)} = \frac{\sin x}{2\sqrt{t}(\text{ch } t - \cos x)}$. On a bien le résultat annoncé.

Remarque : pour $x = \frac{\pi}{2}$, on retrouve le résultat du 4.(b).

(e) Comme $x \in]0, \pi[$, $\sin x > 0$, et $\text{ch } t > 1 \geq \cos x$. Il en résulte bien $f(x) > 0$.

(f) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t} \text{ch } t}.$

On a $\text{ch } t > \frac{e^t}{2}$, d'où $f(x) < \frac{1}{\sqrt{\pi}} J_1 = 1$. Par ailleurs, sur $]0, +\infty[$, $\text{ch } t - e^t = -\text{sh } t < 0$, donc

$$f(x) > \frac{1}{2\sqrt{\pi}} J_1 = \frac{1}{2}.$$

On retrouve le résultat (avec plus ou moins la même méthode !) de la question 5.

Partie III

10. (a) Analogue à la question 3.

(b) On écrit $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(\text{ch } t - \cos(2x))} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(\text{ch } t + 2 \sin^2 x - 1)}$. Puis on pose $t = 2u$:

$$f(2x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{2 du}{\sqrt{2u}(\text{ch}(2u) - 1 + 2 \sin^2 x)}$$

Il faut exprimer $\text{ch } 2u - 1$. La formule n'est pas au programme, mais on la retrouve facilement :

$$\text{ch}(2u) - 1 = \frac{e^{2u} + e^{-2u} - 2}{2} = \frac{(e^u - e^{-u})^2}{2} = 2 \text{sh}^2 u$$

et on obtient bien la formule proposée.

11. $x \mapsto \sin 2x$ est évidemment continue sur $]0, +\infty[$. Par ailleurs, $\text{sh}^2 u + \sin^2 x > 0$, donc la fonction $\varphi : (u, x) \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}(\text{sh}^2 u + \sin^2 x)}$ est continue sur $]0, +\infty[\times]0, \pi[$. Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Alors

$$\forall u \in]0, +\infty[\quad \forall x \in [a, \pi - a] \quad 0 \leq \varphi(u, x) \leq \frac{1}{\sqrt{u}(\text{sh}^2 u + \sin^2 a)}$$

Cette dernière fonction est clairement intégrable sur $]0, +\infty[$. L'hypothèse de domination locale est donc vérifiée. Il résulte du théorème de continuité sous le signe $\int$ que f est continue sur $]0, +\infty[$.

12. On procède de même, mais on domine en outre la dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 x)^2}$$

qu'on domine sur $]0, +\infty[\times [a, \pi - a]$ par $\frac{1}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 a)^2}$, fonction intégrable sur $]0, +\infty[$.

On applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur un intervalle non compact, et f apparaît alors comme le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.