X 2019 B

Hervé Gianella, Serge Francinou et Antoine Le Calvez

1. (a) On a $|u'| = -u$ et $|u'|$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. Soit $y \in [-1,1]$ tel que $u'(y) \neq 0$ et supposons par exemple $u'(y) > 0$. Par continuité de u' il existe un intervalle ouvert non vide J centré en y tel que $u' > 0$ sur $[-1,1] \cap J$. On a alors $u' = -u$ sur cet intervalle et u y est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $u''(y) = -u'(y) = u(y)$. Dans le cas où $u'(y) < 0$ on a de même $u' = u$ sur un voisinage de y et $u''(y) = u'(y) = u(y)$.

   (b) Soit $y \in [-1,1]$ tel que $u'(y) = 0$. On a alors $u(y) = 0$ et comme $\left|\dfrac{u(x) - u(y)}{x - y}\right| = \dfrac{|u(x)| - |u(y)|}{|x - y|}$ tend vers 0 lorsque x tend vers y on en déduit que $|u|$ est dérivable en y avec une dérivée nulle en ce point.

2. On a donc montré que $u'' = u$ sur $[-1,1]$. Avec les conditions au bord on obtient $u(x) = -\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 1}$ pour tout $x \in [-1,1]$ mais cette fonction ne vérifie pas l'équation.

3. Les fonctions u_0 et u_1 sont clairement continues sur $[-1,1]$ et dérivables en tout point $x \neq 0$. Elles valent -1 en -1 et en 1 et un calcul très simple montre qu'elles vérifient l'équation pour tout $x \neq 0$.

4. Soit φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0 telle que $u - \varphi$ ait un maximum local en x_0. La fonction $u - \varphi$ étant dérivable en x_0 sa dérivée est nulle et $\varphi'(x_0) = u'(x_0)$. Il en découle que $D^+u(x_0) \subset \{u'(x_0)\}$ et on montre qu'il y a égalité en prenant $\varphi = u$. C'est pareil pour le sous-différentiel.

5. (a) Comme $D^+u(x_0)$ est supposé non vide, on peut se donner une fonction ψ_2 de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0 telle que $u - \psi_2$ ait un maximum local en x_0. Pour x au voisinage de x_0 on a alors $u(x) \leqslant \psi_2(x) + u(x_0) - \psi_2(x_0)$ et on note φ_2 la fonction de droite. Elle est $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0 et vérifie $u(x) \leqslant \varphi_2(x)$ et $\varphi_2(x_0) = u(x_0)$. On procède de même pour définir φ_1 en utilisant la non vacuité de $D^-u(x_0)$.

   (b) Pour $x_0 < x < x_0 + \delta$ on a alors l'encadrement

$$\frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{\varphi_2(x) - \varphi_2(x_0)}{x - x_0}$$

   En faisant tendre x vers x_0^+ on en déduit que $\varphi_1'(x_0) \leqslant \varphi_2'(x_0)$. En considérant la limite à gauche on obtient l'inégalité inverse si bien que $\varphi_1'(x_0) = \varphi_2'(x_0)$. Le théorème d'encadrement assure alors que le taux d'accroissement de u en x_0 converge aussi vers cette valeur (à droite et à gauche) si bien que u est dérivable en x_0.

   Comme en 4 on a alors $D^+u(x_0) \subset \{u'(x_0)\}$ et comme le sur-différentiel est supposé non vide il y a égalité. C'est pareil pour $D^-u(x_0)$.

6. (a) La fonction $u - \varphi_{x_0,r}$ est continue sur l'intervalle ouvert $I_{x_0}(r)$ et tend vers $-\infty$ en $x_0 - r$ et en $x_0 + r$. On en déduit facilement qu'elle admet un maximum global sur $I_{x_0}(r)$ en un certain point y. On a alors $D^+u(y) \neq \emptyset$.

   (b) Dans la question précédente x_0 est arbitraire dans $]-1,1[$ et r peut être choisi arbitrairement petit. Il en découle directement que l'ensemble des points y de $]-1,1[$ tels que $D^+u(y)$ est non vide est dense dans $]-1,1[$.

7. (a) Posons $h(\varepsilon) = \displaystyle\sup_{\substack{y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [-1,1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|}$ cette borne supérieure étant a priori dans l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La fonction h est croissante sur $]0, +\infty[$ ce qui justifie l'existence de sa limite en 0^+ celle-ci étant dans $\overline{\mathbb{R}}$. Supposons maintenant que p soit dans $D^+u(x_0)$ et soit φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0 telle que $u - \varphi$ ait un maximum local en x_0 avec $\varphi'(x_0) = p$. Pour x au voisinage de x_0 on a alors $u(x) - \varphi(x) \leqslant u(x_0) - \varphi(x_0)$ donc $u(x) - u(x_0) \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0)$ et

$$\frac{u(x) - u(x_0) - p(x - x_0)}{|x - x_0|} \leqslant \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0) - p(x - x_0)}{|x - x_0|} = \frac{o(x - x_0)}{|x - x_0|} = o(1)$$

   Pour tout $\eta > 0$ on peut donc trouver $\varepsilon > 0$ tel que $h(\varepsilon) \leqslant \eta$ et cela implique que $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} h(\varepsilon) \leqslant 0$.

   (b) On note toujours h la fonction croissante définie ci-dessus. L'hypothèse que $\displaystyle\lim_{0^+} h \leqslant 0$ implique l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $h(\varepsilon) \leqslant 1$ et en particulier $h(\varepsilon)$ ne vaut pas $+\infty$. Il en résulte que la fonction h ne prend jamais la valeur $+\infty$ et ainsi φ est à valeurs réelles positives. Pour $x \in [-1,1]$ on a

$$\frac{u(x) - u(x_0) - p(x - x_0)}{|x - x_0|} \leqslant \varphi(|x - x_0|)$$

   dont on déduit l'inégalité demandée par l'énoncé.

(c) Il s'agit de montrer que la fontion φ est continue. On observe déjà qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est continue en 0. En effet, si $y \neq x_0$ on note $H(y) = \dfrac{u(y)-u(x_0)-p(y-x_0)}{|y-x_0|}$ et toujours pour $r > 0$, $h(r) = \sup\limits_{0<|y-x_0|\leqslant r} H(y)$. On a $\varphi(r) = \max(0, h(r))$ ce qui donne en faisant tendre r vers 0^+,

$$\lim_{r\to 0^+} \varphi(r) = \max(0, \lim_{r\to 0} h(r)) = 0 = \varphi(0).$$

Soit $m < M$ dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction H est continue sur le compact $[-1,1]\cap\{y, |y-x_0| \geqslant m\}$ (éventuellement vide), elle y est donc uniformément continue. Prenons $\varepsilon > 0$ et η un module d'uniforme continuité de H pour ε. On a pour $m \leqslant r \leqslant s$ avec $0 \leqslant s-r \leqslant \eta$,

$$h(r) \leqslant h(s) = \max(h(r), \sup_{r\leqslant|y-x_0|\leqslant s} H(y)).$$

Or comme $s - r \leqslant \eta$, tout y vérifiant $r \leqslant |y-x_0| \leqslant s$ est à une distance inférieure à η de $x_0 + r$ ou $x_0 - r$ et $H(y) \leqslant H(x_0 \pm r) + \varepsilon \leqslant h(r) + \varepsilon$. Ainsi,

$$\sup_{r\leqslant|y-x_0|\leqslant s} H(y)) \leqslant h(r) + \varepsilon,$$

inégalité restant vraie si la borne supérieure est prise sur un ensemble vide. On a donc $h(r) \leqslant h(s) \leqslant h(r)+\varepsilon$, i.e. $|h(r) - h(s)| \leqslant \varepsilon$. On en déduit que h est uniformément continue sur $[m, M]$ et a fortiori continue. La continuité étant une propriété locale, h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Il en va de même de $\varphi = \max(0, h)$ et comme φ est aussi continue en 0, φ est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que ρ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\rho(0) = 0$ et $\rho'(0) = \varphi(0) = 0$.

(d) On a $\rho(2r) = \displaystyle\int_0^{2r} \varphi(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_r^{2r} \varphi(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_r^{2r} \varphi(r)\mathrm{d}t = r\varphi(r)$ car φ est croissante.

(e) Posons $\psi(x) = u(x_0) + p(x-x_0) + \rho(2|x-x_0|)$. D'après 7.(b) et 7.(d) on a $u \leqslant \psi$ avec égalité en x_0. Donc $u - \psi$ admet un maximum local en x_0 et ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ (on utilise le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ pour la dérivabilité en x_0 de $x \mapsto \rho(2|x-x_0|)$). On a $\psi'(x_0) = p$ donc $p \in D^+u(x_0)$. On a montré finalement dans cette question 7 que

$$D^+u(x_0) = \left\{p \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{\substack{y\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\ \cap[-1,1] \\ y\neq x_0}} \frac{u(y)-u(x_0)-p(y-x_0)}{|y-x_0|} \leqslant 0\right\}$$

8. Si u est seulement dérivable en x_0 on voit comme en 4 que $D^+u(x_0) \subset \{u'(x_0)\}$. La formule de Taylor-Young montre que $\dfrac{u(y)-u(x_0)-u'(x_0)(y-x_0)}{|y-x_0|}$ tend vers 0 lorsque $y \to 0^+$ et la caractérisation de la question 7 permet alors de dire que $u'(x_0)$ est bien élément du sur-différentiel.

9. Montrons d'abord que $D^+u(x_0)$ est convexe. Soit p_1 et p_2 deux de ses éléments et $t \in [0,1]$. On pose $p = (1-t)p_1 + tp_2$. Pour alléger la rédaction on note $h_p(\varepsilon)$ la valeur de la borne supérieure avec le réel p pour $\varepsilon > 0$. On a clairement pour $\varepsilon > 0$ et tout y dans $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \cap [-1,1]$ distinct de x_0,

$$\frac{u(y)-u(x_0)-p(y-x_0)}{|y-x_0|} = (1-t)\frac{u(y)-u(x_0)-p_1(y-x_0)}{|y-x_0|} + t\frac{u(y)-u(x_0)-p_2(y-x_0)}{|y-x_0|} \leqslant (1-t)h_{p_1}(\varepsilon) + th_{p_2}(\varepsilon)$$

Donc en passant à la borne supérieure, $h_p(\varepsilon) \leqslant (1-t)h_{p_1}(\varepsilon) + th_{p_2}(\varepsilon)$. Comme expliqué en 7 les fonctions sont croissantes et ont une limite en 0^+ et on a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} h_p(\varepsilon) \leqslant 0$ de sorte que $p \in D^+u(x_0)$. Le sur-différentiel est donc convexe et c'est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrons maintenant qu'il est fermé. Soit (p_n) une suite d'éléments de $D^+u(x_0)$ qui converge vers $p \in \mathbb{R}$. Pour n fixé on a pour tout $y \neq x_0$

$$\left|\frac{u(y)-u(x_0)-p(y-x_0)}{|y-x_0|} - \frac{u(y)-u(x_0)-p_n(y-x_0)}{|y-x_0|}\right| \leqslant |p_n - p|$$

et on en déduit facilement que $h_p(\varepsilon) \leqslant h_{p_n}(\varepsilon) + |p_n - p|$. Il suffit alors de quantifier. Soit $\alpha > 0$. On choisit n tel que $|p_n - p| \leqslant \alpha$ Pour cet entier n on utilise l'inégalité précédent et on fait tendre ε vers 0^+. On en déduit que $\lim h_p(\varepsilon) \leqslant \alpha$. Comme cela vaut pour tout α on a $\lim h_p(\varepsilon) \leqslant 0$ et $p \in D^+u(x_0)$.

10. (a) Cela découle directement du théorème des pentes décroissantes.

(b) Il est classique d'en déduire qu'une fonction concave admet en tout point $x_0 \in]-1,1[$ une dérivée à droite ℓ^+ et à gauche ℓ^- et on a $\ell^+ \leqslant \ell^-$. Montrons que $D^+u(x_0)$ est exactement le segment $[\ell^+, \ell^-]$. La fonction concave u est en-dessous de ses deux demi-tangentes en x_0 et cela implique que ℓ^+ et ℓ^- sont dans le sur-différentiel en x_0. Comme on sait que $D^+u(x_0)$ est un intervalle on a déjà $[\ell^+, \ell^-] \subset D^+u(x_0)$. Et il est facile de voir l'inclusion inverse.

(c) Si $p \in \mathbb{R}$ avec pour tout x, $u(x) \leqslant u(x_0) + p(x - x_0)$ alors pour $x \neq x_0$,

$$\frac{u(x) - u(x_0) - p(x - x_0)}{|x - x_0|} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad h_p(\varepsilon) \leqslant 0,$$

et il en va de même de la limite quand ε tend vers 0 si bien que $p \in D^+u(x_0)$.
Réciproquement, prenons $p \in D^+u(x_0) = [\ell^+, \ell^-]$. Si $x < x_0$, par monotonie des pentes des sécantes issues d'un point, pour $x < x_0$, $\dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \geqslant \ell^- \geqslant p$ ce qui donne $u(x) \leqslant u(x_0) + p(x - x_0)$. Pour $x > x_0$, $\dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \leqslant \ell^+ \leqslant p$ ce qui donne la même inégalité. On conclut que pour tout x, $u(x) \leqslant u(x_0) + p(x - x_0)$.

Si $0 \in D^+u(x_0)$, $u(x) \leqslant u(x_0)$ pour tout x et u présente un maximum en x_0. Réciproquement, si u présente un maximum en x_0, l'inégalité $u(x) \leqslant u(x_0) + p(x - x_0)$ est vérifiée pour tout x avec $p = 0$. Ainsi u admet un maximum en x_0 si, et seulement si, $0 \in D_+u(x_0)$.

11. (a) Si u de classe $\mathcal{C}^1$ est solution, on a avec la question 4, $D^+u(x) = D^-u(x) = \{u'(x)\}$ et

$$u(x) + H(x, u'(x)) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad u(x) + H(x, u'(x)) \geqslant 0,$$

si bien que u est à la fois sous-solution et sur-solution de (1).

(b) Prenons u sur-solution et sous-solution de (1). Si x est dans un intervalle ouvert où u est de classe $\mathcal{C}^1$, $D^+u(x) = D^-u(x) = \{u'(x)\}$ et donc

$$u(x) + H(x, u'(x)) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad u(x) + H(x, u'(x)) \geqslant 0,$$

autrement dit, u vérifie $u(x) + H(x, u'(x)) = 0$ sur tout intervalle ouvert où u est de classe $\mathcal{C}^1$.

12. • La fonction continue $u - v$ admet un maximum sur le compact $[-1, 1]$ qui ne peut être ni en 1, ni en -1 par l'hypothèse faite.

• Comme ω est continue en 0, il existe $\eta' > 0$ tel que pour $0 \leqslant r \leqslant \eta'$, $\omega(r) < M/2$. D'après le théorème de Heine, u et v sont uniformément continues sur le compact $[-1, 1]$ et il existe donc η'' que l'on peut supposé inférieur ou égal à $\eta'/3$, tel que si $|x - y| \leqslant \eta''$, $|v(x) - v(y)| \leqslant \eta'/3$ et donc

$$\omega(|x - y| + 2|v(x) - v(y)|) < M/2$$

puisque $|x - y| + 2|v(x) - v(y)| \leqslant 3\eta'/3 = \eta'$. Toujours par uniforme continuité de u et v, quitte à réduire η'', on peut supposer que si $|x - y| \leqslant \eta''$, $|u(x) - u(y)| + 2|v(x) - v(y)| < M/2$. Il suffit donc de prendre $\eta = \dfrac{\eta''^2}{2(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)}$.

13. Le pavé $[-1, 1]^2$ est un compact et Φ_η est continue : elle possède donc un maximum en un point (x_η, y_η). Comme $\Phi_\eta(x_0, x_0) = M$, on a $\Phi_\eta(x_\eta, y_\eta) \geqslant M$.

14. (a) Si on suppose que l'inégalité demandée n'est pas vérifiée, on aurait $\dfrac{(x_\eta - y_\eta)^2}{2\eta} > \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ et

$$\Phi_\eta(x_\eta, y_\eta) \leqslant \|u\|_\infty + \|v\|_\infty - (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty) \leqslant 0 < M,$$

ce qui est contradictoire.

(b) On a $M = \Phi_\eta(x_\eta, y_\eta) \leqslant u(x_\eta) - v(y_\eta)$. Si $x_\eta = \pm 1$, $M \leqslant v(x_\eta) - v(y_\eta) < M/2$ ce qui est exclu. De même si $y_\eta = \pm 1$ puisqu'alors $M \leqslant u(x_\eta) - u(y_\eta)$.

(c) On a pour tout x, y, $u(x) - v(y) - \dfrac{|x - y|^2}{2\eta} \leqslant u(x_\eta) - v(y_\eta) - \dfrac{|x_\eta - y_\eta|^2}{2\eta}$. En particulier avec $y = y_\eta$, on a

$$u(x) - \frac{|x - y_\eta|^2}{2\eta} \leqslant u(x_\eta) - \frac{|x_\eta - y_\eta|^2}{2\eta}.$$

En prenant la fonction $\varphi(x) = \dfrac{(x-y_\eta)^2}{2\eta}$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$, on a $u-\varphi$ qui admet un maximum en x_η et $\varphi'(x_\eta) = \dfrac{x_\eta - y_\eta}{\eta} \in D^+u(x_\eta)$. De même, avec $x = x_\eta$, on a

$$v(y) + \frac{(x_\eta - y)^2}{2\eta} \geqslant v(y_\eta) + \frac{(x_\eta - y_\eta)^2}{2\eta},$$

et avec $\psi(y) = -\dfrac{(x_\eta - y)^2}{2\eta}$, $v-\psi$ admet un minimum en y_η si bien que $\psi'(y_\eta) = \dfrac{x_\eta - y_\eta}{\eta} \in D^-u(y_\eta)$.

15. Comme u (resp. v) est sous-solution (resp. sur-solution), on a donc

$$u(x_\eta) + H(x_\eta, \frac{x_\eta - y_\eta}{\eta}) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad v(y_\eta) + H(y_\eta, \frac{x_\eta - y_\eta}{\eta}) \geqslant 0.$$

Ainsi, par soustraction,

$$\begin{aligned} u(x_\eta) - v(y_\eta) &\leqslant H(y_\eta, \frac{x_\eta - y_\eta}{\eta}) - H(x_\eta, \frac{x_\eta - y_\eta}{\eta}) \\ &\leqslant \omega\left(|x_\eta - y_\eta|(1 + \left|\frac{x_\eta - y_\eta}{\eta}\right|\right) \\ &\leqslant \omega\left(|x_\eta - y_\eta| + \frac{|x_\eta - y_\eta|^2}{\eta}\right) \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{|x_\eta - y_\eta|^2}{2\eta} &= u(x_\eta) - v(y_\eta) - \Phi_\eta(x_\eta, y_\eta) \\ &\leqslant u(x_\eta) - v(y_\eta) - M \\ &\leqslant u(x_\eta) - v(y_\eta) - (u(x_\eta) - v(x_\eta)) \text{ car } (u-v)(x_\eta) \leqslant M, \\ &\leqslant v(x_\eta) - v(y_\eta) \leqslant |v(x_\eta) - v(y_\eta)|, \end{aligned}$$

et donc par croissance de ω, $u(x_\eta) - v(y_\eta) \leqslant \omega(|x_\eta - y_\eta| + 2|v(x_\eta) - v(y_\eta)|) < M/2$. Mais alors $M \leqslant \Phi_\eta(x_\eta, y_\eta) \leqslant u(x_\eta) - v(y_\eta) < M/2$ ce qui est contradictoire.

16. (a) Si x est non nul dans $]-1,1[$, u_0 est localement $\mathcal{C}^1$ et d'après la question 4, $D^+u_0(x) = D^-u_0(x) = \{u_0'(x)\}$ avec $u_0'(x) = -e^x/e$ si $x > 0$ et $u_0'(x) = e^{-x}/e$ si $x < 0$.

(b) L'application $x \longmapsto e^{|x|}$ est convexe car l'exponentielle est elle-même convexe et croissante : en effet si $x, y \in [-1,1]$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$\exp(|(1-\lambda)x + \lambda y| \leqslant \exp((1-\lambda)|x| + \lambda|y|) \leqslant (1-\lambda)e^{|x|} + \lambda e^{|y|}.$$

On peut donc appliquer la question 10.(b) à u_0 qui est concave et on a

$$\ell^+ = \lim_{y\to 0^+} \frac{-e^{-1+y} - e^{-1}}{y} = -e^{-1} \text{ et } \ell^- = \lim_{y\to 0^-} \frac{-e^{-1-y} - e^{-1}}{y} = e^{-1},$$

et $D^+u_0(0) = [\ell^+, \ell^-] = [-e^{-1}, e^{-1}]$. Comme u_0 n'est pas dérivable en 0, $\ell^+ \neq \ell^-$, la question 5 assure que $D^-u(0)$ est vide.

(c) Avec les questions 3 et 16.(a), il apparaît que u_0 est sur-solution et sous-solution en tout $x \in]-1,1[$ non nul. Vérifions le aussi en 0. Comme $D^-u(0)$ est vide, elle est bien sur-solution. Si $p \in [-e^{-1}, e^{-1}]$, on a $u(0) + p = -e^{-1} + |p| \leqslant 0$ et u_0 est une sous-solution en 0.

(d) C'est $-u_1$ qui est concave. Pour x non nul dans $]-1,1[$, $D^+u_1(x) = D^-u_1(x) = \{u_1'(x)\}$ avec $u_1'(x) = e^{1-x}$ pour $x > 0$ et $-e^{1+x}$ pour $x < 0$, $D^-u_1(0) = [-e, e]$ et $D^+u_1(0) = \emptyset$. En 0, u_1 est une sur-solution, mais pas une sous-solution puisque $-e + 0 < 0$.

(e) Si v_0 est sur-solution et sous-solution de (1) avec $u_0(1) = v_0(1) = -1 = u_0(-1) = v_0(-1)$, on a $u_0 \leqslant v_0$ par la question 15 et par symétrie, $v_0 \leqslant u_0$. Ainsi $u_0 = v_0$.

17. Par théorème d'opérations, u_ε est continue sur $[-1,1]$ et $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,0[$ et $]0,1]$. De plus elle est paire. Pour vérifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$, par le théorème de la limite de la dérivée, il suffit de vérifier que les limites à gauche et à droite de u_ε' et u_ε'' sont finies et égales. Pour la dérivée première, c'est 0 en 0^+ et 0^-. Pour

la dérivée seconde, c'est $\lambda_\varepsilon^+\lambda_\varepsilon^-(\lambda_\varepsilon^- - \lambda_\varepsilon^+)/\mu$ avec $\mu = \lambda_\varepsilon^- e^{\lambda_\varepsilon^+} - \lambda_\varepsilon^+ e^{\lambda_\varepsilon^-}$ le dénominateur de la fraction définissant u_ε.

On a bien $u_\varepsilon(1) = u_\varepsilon(-1) = -1$.

Par parité il suffit de vérifier que u_ε est solution de (5) sur $[0,1]$. Sur cet intervalle on a $u'_\varepsilon \leqslant 0$ et donc u_ε doit satisfaire l'équation différentielle $y - y' - \varepsilon y'' = 0$. C'est bien le cas car les racines de l'équation caractéristique sont $\lambda_\varepsilon^\pm$. On notera que sur l'intervalle $[-1,0]$ on a $u'_\varepsilon \geqslant 0$ et u_ε vérifie l'équation différentielle $y + y' - \varepsilon y'' = 0$ (les racine de l'équation caractéristique sont alors $-\lambda_\varepsilon^\pm$).

18. (a) Soit v une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$ vérifiant $v(-1) = v(1) = 1$ et $v(x) + |v'(x)| - \varepsilon|v'''(x)| = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$. Sur un intervalle I sur lequel v' est positive (resp. négative) v est solution de l'équation différentielle linéaire $y + y' - \varepsilon y'' = 0$ (resp. $y - y' - \varepsilon y'' = 0$) dont les solutions ont été données dans la question précédente. La solution u_ε a une dérivée qui ne s'annule qu'en 0 et qui est positive sur $[-1,0[$ et négative sur $]0,1]$. On va essayer de montrer qu'il en est forcément de même pour v. Notons tout d'abord que v' s'annule au moins une fois dans $]-1,1[$ en vertu du théorème de Rolle. Si $v'(1) = 0$ alors $v''(1)$ est non nul et il existe $\eta > 0$ tel que v' ne s'annule pas sur $]-1,-1+\eta[$. Cela reste clairement vrai si $v'(1) \neq 0$. On peut donc considérer le plus petit zéro de v' strictement supérieur à -1 que l'on note τ. Sur le segment $[-1,\tau]$ v' possède un signe constant et s'écrit sous la forme $v(x) = Ae^{\pm\lambda_\varepsilon^+ x} + Be^{\pm\lambda_\varepsilon^- x}$. Comme v n'est pas nulle sur $[-1,\tau]$ on ne peut pas avoir $v(\tau) = v'(\tau) = 0$ (théorème de Cauchy). Donc $v(\tau) \neq 0$ et par suite $v''(\tau) \neq 0$. Il en découle que τ est un zéro isolé de v' et que v' change de signe en τ. Supposons par l'absurde que v' admet un autre zéro dans $]\tau,1[$. On peut à nouveau considérer τ' le plus petit de ces zéros (l'ensemble des zéros strictement supérieurs à τ est fermé). Sur $[\tau,\tau']$ la fonction v est $x \mapsto A'e^{-\pm\lambda_\varepsilon^+ x} + B'e^{-\pm\lambda_\varepsilon^- x}$ et il est facile de vérifier que la dérivée de cette fonction s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$ si $(A',B') \neq (0,0)$ (ce qui est le cas ici). Il en découle que τ est l'unique zéro de v dans $[-1,1]$ (car le même argument montre que $v'(-1)$ ne peut pas être nul).

Posons alors $w(t) = v(2\tau - t)$ pour $t \geqslant \tau$ (on prolonge v à gauche de -1 en gardant l'expression $v(x) = Ae^{\pm\lambda_\varepsilon^+ x} + Be^{\pm\lambda_\varepsilon^- x}$). On a $w(\tau) = v(\tau)$ et $w'(\tau) = 0$. De plus v' a un signe constant sur $]-\infty,\tau[$ et w' a le signe opposé sur $]\tau,+\infty[$. Il en découle que pour $t \in [\tau,1]$, $v(t) = w(t) = v(2\tau - t)$. On a $v(-1) = v(1) = -1$ et v est strictement monotone sur $[-1,\tau]$ et sur $[\tau,1]$ donc -1 a uniquement ces deux antécédents. Ainsi $v(2\tau - 1) = -1$ donc $2\tau - 1 = -1$ et $\tau = 0$. En explicitant les constantes A et B avec les conditions au bord il est alors facile de voir que v est exactement la fonction u_ε.

(b) Les équivalents sont pris pour ε tendant vers 0^+. On a $\lambda_\varepsilon^+ \sim \dfrac{2\varepsilon}{2\varepsilon} = 1$ et $\lambda_\varepsilon^- \sim -\dfrac{1}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\infty$. Notons D_ε le dénominateur de u_ε, $D_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^- e^{\lambda_\varepsilon^+} - \lambda_\varepsilon^+ e^{\lambda_\varepsilon^-} \sim -\dfrac{e}{\varepsilon}$. Si $x = 0$, $u_\varepsilon(0) \sim \dfrac{-\lambda_\varepsilon^-}{D_\varepsilon} \sim -\dfrac{1}{e}$ et si $x > 0$, $u_\varepsilon(x) \sim \dfrac{-\lambda_\varepsilon^- e^{\lambda_\varepsilon^+ x}}{-e/\varepsilon} \sim -\dfrac{e^x}{e}$. Comme u_0 et u_ε sont paires, on en conclut que u_ε converge simplement vers u_0 quand ε tend vers 0.

Montrons que cette convergence est uniforme sur $[-1,1]$. Pour cela, il suffit de majorer $|u_\varepsilon(x) - u_0(x)|$ pour $x \in [0,1]$ par une quantité indépendante de x tendant vers 0 quand ε tend vers 0. Le terme $\dfrac{\lambda_\varepsilon^+ e^{\lambda_\varepsilon^- x}}{D_\varepsilon}$ converge uniformément vers 0 puisque, comme $\lambda_\varepsilon^- x \leqslant 0$,

$$\left|\frac{\lambda_\varepsilon^+ e^{\lambda_\varepsilon^- x}}{D_\varepsilon}\right| \leqslant \frac{\lambda_\varepsilon^+}{D_\varepsilon} \sim \frac{1}{D_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Il s'agit donc de montrer que $x \longmapsto \dfrac{-\lambda_\varepsilon^- e^{\lambda_\varepsilon^+ x}}{D_\varepsilon}$ converge uniformément vers $x \longmapsto u_0(x)$ sur $[0,1]$. Formons la différence

$$\Delta_\varepsilon(x) = \left|\frac{-\lambda_\varepsilon^- e^{\lambda_\varepsilon^+ x}}{D_\varepsilon} - u_0(x)\right| \leqslant \left|\frac{-\lambda_\varepsilon^-(e^{\lambda_\varepsilon^+ x} - e^x)}{D_\varepsilon}\right| + e^x\left|\frac{-\lambda_\varepsilon^-}{D_\varepsilon} + \frac{1}{e}\right| \leqslant \left|\frac{-\lambda_\varepsilon^-}{D_\varepsilon}\right|(e - e^{\lambda_\varepsilon^+}) + e\left|\frac{-\lambda_\varepsilon^-}{D_\varepsilon} + \frac{1}{e}\right|.$$

Le dernier majorant trouvé ne dépend que de ε et tend vers 0 quand ε tend vers 0^+. CQFD.