Centrale TSI 2004 - Mathématiques 1

ΔΔΔΔΔ

Partie I

I.A.1. Une intégration par parties donne $I_{n+2} = [\sin x \cos^{n+1} x]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^n x \, dx$. D'où :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= (n+1)\left(\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\cos^n x \, dx\right) \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \text{ et} \end{aligned}$$

$$\boxed{(n+2)\, I_{n+2} = (n+1)\, I_n}$$

I.A.2. Pour $n \geq 1$, $I_{2n} = \dfrac{(2n-1)}{(2n)} I_{2(n-1)}$

$$= \frac{(2n-1)\ ...\ 1}{(2n)\ ...\ 2} I_0 \text{ (récurrence simple). D'où :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n+1} = \dfrac{(2n)}{(2n+1)} I_{2n-1}$

$$= \frac{(2n)\ ...\ 2}{(2n+1)\ ...\ 3} I_1 \text{ (récurrence simple). D'où :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n+1} = \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

I.B.1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos^{n+2} x \leq \cos^{n+1} x \leq \cos^n x$. D'où :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow$

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 \text{ et :}$$

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}}$$

I.B.2. D'après I.A.1., $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)\, I_{n+2} = (n+1)\, I_n \Rightarrow$

$(n+2)\, I_{n+2} I_{n+1} = (n+1)\, I_n I_{n+1} \Rightarrow$

$J_{n+1} = J_n$. Donc $\underline{\text{la suite } (J_n) \text{ est constante}}$ et $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ J_n =} J_0 = I_0 I_1 = \underline{\dfrac{\pi}{2}}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\, I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$. Or $(n+1)\, I_n I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n I_n^2$ (d'après I.B.1.). Donc $n I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$ et, comme $I_n > 0$,

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

I.B.3. **Application I**

Soit t réel positif. L'application $\begin{array}{l}\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \cos^t x\end{array}$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \cos^t x \, dx$ a un sens.

L'on a $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos^{E(t)+1} x \leq \cos^t x \leq \cos^{E(t)} x$ où $E(t)$ désigne la partie entière de t. Donc :

$\int_0^{\pi/2} \cos^{E(t)+1} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \cos^t x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{E(t)} x \, dx$. En outre :

$E(t) \leq t < E(t) + 1 \Rightarrow t - 1 \leq E(t) \leq t$

$\Rightarrow E(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} t$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t) = +\infty$. On en déduit (en utilisant I.B.2.) :

$\int_0^{\pi/2} \cos^{E(t)+1} x \, dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(E(t)+1)}} \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2E(t)}} \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2t}}$ et de même $\int_0^{\pi/2} \cos^{E(t)} x \, dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2t}}$.

Donc :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \cos^t x \, dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2t}}}$$

I.B.4. **Application II**

$x \overset{\varphi}{\rightarrow} |\sin x|^x$ est continue sur $[1, +\infty[$ et positive

Étudions la série de terme général u_n. Dans u_n, effectuons le changement de variables $u = x - n\pi$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\pi} |\sin u|^{u+n\pi} du \geq \int_0^{\pi} |\sin u|^{(n+1)\pi} du$ car $\forall u \in [0, \pi]$, $n\pi \leq u + n\pi \leq (n+1)\pi$ et comme $|\sin u| \leq 1$, $|\sin u|^{n\pi} \geq |\sin u|^{u+n\pi} \geq |\sin u|^{(n+1)\pi}$.

Or $u \rightarrow |\sin u|^{(n+1)\pi}$ est $\pi-$ périodique et paire; d'où :

$u_n \geq 2\int_0^{\pi/2} (\sin u)^{(n+1)\pi} du = 2\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{(n+1)\pi} du = v_n \geq 0$ (changement de variables $v = \dfrac{\pi}{2} - u$).

Or $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)\pi}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$, donc $\sum\limits_{n \geq 1} v_n$ diverge et $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ diverge.

Soit $A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n > A \Rightarrow \int_{\pi}^{(N+1)\pi} \varphi(x) \, dx > A$, ce qui prouve que $\begin{array}{l}[1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \int_{\pi}^{x} \varphi(u) \, du\end{array}$ n'est pas majorée; comme $\varphi \geq 0$, $\int_{\pi}^{+\infty} \varphi(u) \, du$ diverge. Donc :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(u) \, du \text{ diverge}}$$

I.C.1. $v_n = \left(n + \dfrac{3}{2}\right) \ln(n+1) - n - 1 - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \ln k - \left(\left(n + \dfrac{1}{2}\right) \ln(n) - n - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k\right)$

$$\begin{aligned}
&= \left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln n) - 1 \\
&= n\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \\
&= n\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\
&= n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\
&= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ D'où :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{v_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}}$$

I.C.2. On en déduit que $\sum v_n = \sum (u_{n+1} - u_n)$ converge donc $\underline{(u_n) \text{ converge}}$.

I.D. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = S \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} = e^S$. Posons $C = e^{-S}$: $C > 0$.

Or $e^{u_n} = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{C} \Rightarrow$

$$\boxed{n! \underset{n\to\infty}{\sim} C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$$

I.E. Comme $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, $I_{2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$. Or :

$I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{C (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{2^{2n} C^2 n^{2n+1} e^{-2n}} \times \dfrac{\pi}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$. D'où, après simplification, $C = \sqrt{2\pi}$.
On obtient la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}$$

Partie II

II.A. Posons $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. a_n est une fonction rationnelle de n, donc $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1. En outre pour $x = -1$, $\sum\limits_{n\geq 1} a_n (-1)^n$ est une série numérique alternée qui vérifie le critère spécial de convergence des séries alternées (la suite (a_n) décroit et tend vers 0), donc elle converge. on en déduit que :
$\underline{\text{la somme } f \text{ de la série entière est définie et continue sur } [-1, 1[}$.
$\underline{\forall x \in [-1, 1[\,,\ f(x) = -\ln(1-x)}$

II.B.1. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} = a_n$; donc $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x^n$ a même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$, c'est-à-dire 1. Donc :
$\underline{\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x^n \text{ a pour rayon de convergence 1.}}$

II.B.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)(-1)^n = \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)(-1)^n = u_n + v_n$ avec :
$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$. Or :
$\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge (critère spécial de convergence des séries alternées)
$\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ est absolument convergente car $|v_n| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$. D'où :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)(-1)^n \text{ converge}}$$

$$\begin{aligned}
g(-1) &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{2N} (\ln(n+1) - \ln(n))(-1)^n \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} (\ln(2n+1) - \ln(2n)) - \sum_{n=0}^{N-1} (\ln(2n+2) - \ln(2n+1)) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} (\ln(2n+1) - \ln(2n)) - \sum_{n=1}^{N} (\ln(2n) - \ln(2n-1))
\end{aligned}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{(2n+1)(2n-1)}{4n^2}$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \ln \frac{(2N+1)(2N-1)(2N-1)(2N-3)\ \dots 5.3.3.1}{4^N (N!)^2}$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \ln \left[(2N+1) \frac{((2N)!)^2}{4^N (N!)^2 2^{2N} (N!)^2} \right]$$

Or $(2N+1) \dfrac{((2N)!)^2}{4^N (N!)^2 2^{2N} (N!)^2} \underset{N\to\infty}{\sim} 2N \dfrac{4\pi N (2N)^{4N} e^{-4N}}{2^{4N} 4\pi^2 N^2 N^{4N} e^{-4N}} = \dfrac{2}{\pi}$. Donc :

$$\boxed{g(-1) = \ln \frac{2}{\pi}}$$

II.C. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$; d'où $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ diverge; comme $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = +\infty$.

Soit $A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{N} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) > 2A$.

$x \to \sum\limits_{k=1}^{N} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) x^k$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en 1 à gauche et il existe $\alpha > 0$ tel que :

$\forall x \in \left]1-\alpha, 1\right[$, $\left| \sum\limits_{k=1}^{N} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) x^k - \sum\limits_{k=1}^{N} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \right| < A \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) x^k > \sum_{k=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - A$$
$$> 2A - A = A.$$

Or $\forall x \in \left]1-\alpha, 1\right[$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) x^k \geq \sum\limits_{k=1}^{N} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) x^k > A$. J'ai donc montré que :

$\forall A > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \left[-1, 1\right[$, $|x-1| < \alpha \Rightarrow g(x) > A$ ce qui signifie que :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty}$$

II.D.1. $\forall x \in \left]-1, 1\right[$, $g(x) + \ln(1-x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} \right) x^n$. Posons $c_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$;
$c_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$

D'où $\sum\limits_{n\geq 1} c_n x^n$ converge pour $x = 1$ et la somme de la série entière est continue en 1. Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} g(x) + \ln(1-x) = l \in \mathbb{R}}$$

II.D.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \dfrac{dt}{t} \leq 0$ car $\forall t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{t} \geq \dfrac{1}{n+1}$, ce qui donne $\int_n^{n+1} \dfrac{dt}{t} \geq \dfrac{1}{n+1}$. Donc :

$$\boxed{(w_n) \text{ est décroissante.}}$$

II.D.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $\int_k^{k+1} \dfrac{dt}{t} \leq \dfrac{1}{k}$ (car $t \to \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$). D'où :
$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \dfrac{dt}{t} \geq 1 - \ln(2)$ (terme obtenu pour $k = 1$). D'où :

$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \int_1^{n+1} \dfrac{dt}{t} \geq 1 - \ln(2) \Rightarrow$
$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1) \geq 1 - \ln(2) \Rightarrow$
$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n) \geq \ln(n+1) - \ln(n) + 1 - \ln(2) \geq 1 - \ln(2) > 0.$
D'où la suite (w_n) est décroissante minorée par $1 - \ln(2)$ et :

$$\underline{(w_n) \text{ converge vers un réel } \gamma \geq 1 - \ln(2), \text{ donc strictement positif.}}$$

II.E. Posons pour tout $x \in [-1, 1]$, $h(x) = g(x) + \ln(1-x)$; on a vu que $\forall x \in [-1, 1]$, $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$.
Comme la série entière converge en -1 et 1, h est continue en -1 et 1.

$$\begin{aligned}
\text{D'où } l = h(1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{1}{n} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} -\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \right) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} -\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) + \ln N \right) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{N+1}{N}\right) + \ln N - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right) \\
&= -\gamma. \text{ Donc :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{l = -\gamma}$$

II.F.1. $\begin{array}{l}]0,1[\overset{\varphi}{\to} \mathbb{R} \\ t \to \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{\ln(1-t)} \end{array}$ est continue sur $]0,1[$.

$$\begin{aligned}
\text{En } 0,\ \varphi(t) &= \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} \\
&= \frac{1}{t} + \frac{1}{-t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)} \\
&= \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{t}{2} + o(t)}\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(1 - 1 + \frac{t}{2} + o(t)\right) \\
&= \frac{1}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

Donc, φ se prolonge par continuité en 0 et $\int_0^{1/2} \varphi$ converge.
En 1, $\lim\limits_{t \to 1^-} \varphi(t) = 1$; donc, φ se prolonge par continuité en 1 et $\int_{1/2}^{1} \varphi$ converge.
D'où $\underline{I \text{ est une intégrale convergente.}}$

II.F.2. Effectuons le changement de variables dans I, $t = 1 - e^{-x}$. Cela est possible car $x \overset{\theta}{\to} 1 - e^{-x}$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]0,1[$ $(\forall x \in]0, +\infty[,\ \theta'(x) = e^{-x} \neq 0)$. D'où :

$$\boxed{I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx}$$

$\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\ \Phi(x)=\varphi\circ\theta(x)$. Donc $\Phi\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\varphi\left(\left]0,1\right[\right)$. Or φ se prolonge par continuité sur $[0,1]$, donc φ est bornée, ce qui prouve que :

$$\boxed{\Phi \text{ est bornée}}$$

II.F.3. Or $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}e^{-kx}=\dfrac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}$ car $e^{-x}\neq 1$. D'où :

$\dfrac{1}{1-e^{-x}}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}e^{-kx}+\dfrac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}$ et :

$I=\int_0^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}e^{-kx}+\dfrac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)e^{-x}dx$

$=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_0^{+\infty}e^{-(k+1)x}dx+\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}-\dfrac{e^{-x}}{x}\right)dx$ (car les n premières intégrales, donc la dernière converge)

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty}e^{-kx}dx-\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}+\dfrac{e^{-(n+1)x}}{x}-\dfrac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\right)dx$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}\right)dx+\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)x}\left(\dfrac{1}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)dx$ (car

$x\to\dfrac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$\dfrac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}\underset{x\to0^+}{\sim}n$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\dfrac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}\right)=0$ et $\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}\right)dx$ converge). Donc :

$$\boxed{I=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}\right)dx+\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)x}\Phi(x)\,dx}$$

II.F.4. $\int_\varepsilon^{+\infty}\left(\dfrac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}\right)dx=\int_\varepsilon^{+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}dx-\int_\varepsilon^{+\infty}\dfrac{e^{-(n+1)x}}{x}dx$ (car les 2 intégrales convergent)

$=\int_\varepsilon^{+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}dx-\int_{(n+1)\varepsilon}^{+\infty}\dfrac{e^{-u}}{u}du$ (grâce au changement de variables $u=(n+1)x$, valide, dans la seconde intégrale). Donc :

$$\boxed{\int_\varepsilon^{+\infty}\left(\frac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}\right)dx=\int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}dx}$$

II.F.5. $\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}\right)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{+\infty}\left(\dfrac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}\right)dx$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon}\dfrac{e^{-x}}{x}dx$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon}\dfrac{1}{x}dx+\int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon}\dfrac{e^{-x}-1}{x}dx\right)$. Or $x\overset{\mu}{\to}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$, est donc bornée sur $\left]0,1\right[$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon}\dfrac{e^{-x}-1}{x}dx=0$. Donc :

$\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{x}\right)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon}\dfrac{1}{x}dx$

$= \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} [\ln x]_{\varepsilon}^{(n+1)\varepsilon}$. D'où :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} \right) dx = \ln(n+1)}$$

II.F.6. Comme Φ est bornée, $\exists M \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $|\Phi(x)| \leq M$. J'en déduis que :
$\left| \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \Phi(x)\, dx \right| \leq M. \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} dx$ (majoration par une intégrale convergente)
$\leq \dfrac{M}{n+1}$.
D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \Phi(x)\, dx = 0$.
Comme $I = 1 + \dfrac{1}{2} + \ ... \ + \dfrac{1}{n} - \ln(n) + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) + \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \Phi(x)\, dx$
$= w_n + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) + \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \Phi(x)\, dx$,
$I = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) + \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \Phi(x)\, dx \Rightarrow$

$$\boxed{I = \gamma}$$

Partie III

III.A.1. $b_n = o(a_n) \Leftrightarrow \exists (\varepsilon_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \varepsilon_n a_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0 \end{cases}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |\varepsilon_n| \leq 1)$. D'où, pour $n > N$, $|b_n| \leq |a_n|$, ce qui entraîne que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum a_n x^n$. Donc :

<u>le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.</u>

III.A.2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme dans III.A.1., il existe $N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |b_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} |a_n| = \dfrac{\varepsilon}{2} a_n$. D'où :

$\forall x \in [0, 1[$, $\left| \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right| \leq \left| \sum\limits_{n=0}^{N} b_n x^n \right| + \left| \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} b_n x^n \right|$
$\leq \sum\limits_{n=0}^{N} |b_n| + \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{\varepsilon}{2} a_n x^n$
$\leq \sum\limits_{n=0}^{N} |b_n| + \dfrac{\varepsilon}{2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Donc :

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ |v(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} |b_n| + \frac{\varepsilon}{2} u(x)}$$

III.A.3. Montrons que $\lim\limits_{x \to 1^-} u(x) = +\infty$. Comme $\sum a_n$ diverge et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = +\infty$.

Soit $A > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N_1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} a_k > 2A$.

Soit $n > N_1$. $x \to \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ est continue en 1. Donc $\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \alpha \Rightarrow \left| \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \right| < A$. D'où :

$\forall x \in]1-\alpha, 1[$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \geq \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \geq \sum\limits_{k=0}^{n} a_k - A \geq 2A - A = A$. J'ai donc montré que :

$\forall a > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in [0,1[\,,\ |x-1| < \alpha \Rightarrow u(x) > A$, ce qui signifie $\underline{\lim\limits_{x\to 1^-} u(x) = +\infty}$.

Or $\exists N \in \exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ |v(x)| \leq \sum\limits_{n=0}^{N} |b_n| + \dfrac{\varepsilon}{2} u(x)$.

Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} u(x) = +\infty$, $\exists \alpha > 0$, tel que $\forall x \in [0,1[\,,\ |x-1| < \alpha \Rightarrow u(x) > \left(\sum\limits_{n=0}^{N} |b_n|\right) \dfrac{2}{\varepsilon}$. D'où :

$\forall x \in [0,1[\,,\ |x-1| < \alpha \Rightarrow |v(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} u(x) + \dfrac{\varepsilon}{2} u(x) = \varepsilon u(x)$

$\Rightarrow \left|\dfrac{v(x)}{u(x)}\right| \leq \varepsilon$. D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{v(x)}{u(x)} = 0$ et

$$\boxed{v(x) = o(u(x)) \text{ au voisinage de } 1}$$

III.B. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, $a_n = b_n + c_n$ avec $c_n = o(b_n)$. Or, on a maintenant $b_n \geq 0$ à partir d'un certain rang, $\sum b_n$ diverge et $\sum b_n x^n$ a pour rayon de convergence 1. Donc si l'on appelle w la somme de $\sum c_n x^n$.

$\forall x \in [0,1[\,,\ u(x) = v(x) + w(x)$ avec $w(x) = o(v(x))$ au voisinage de 1 d'après la question précédente, ce qui montre que :

$$\boxed{u(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} v(x)}$$

III.C. - **Application 1**

III.C.1. $n^3 \ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3 \left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n} - 1\right)$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} n^3 \left(\dfrac{1}{2n^2}\right)$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$. Or $\sum \dfrac{n}{2} x^n$ a pour rayon de convergence 1, le coefficient étant une fonction rationnelle de n.. Donc :

$$\boxed{\sum n^3 \ln\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}\right) x^n \text{ a pour rayon de convergence } 1}$$

III.C.2. Appliquons III.B. :

$\left(\dfrac{n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, $\sum \dfrac{n}{2}$ diverge, $\sum \dfrac{n}{2} x^n$ a pour rayon de convergence 1, $n^3 \ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$. Donc :

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^3 \ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}\right) x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{2} x^n$. Or :

$\forall x \in]-1,1[\,,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{2} x^n = \dfrac{x}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \dfrac{x}{2} \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2 \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2$. D'où :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 \ln\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}\right) x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x}\right)^2}$$

III.D. - **Application 2**

III.D.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq H_n \leq n$; d'où si l'on note $\rho\left(\sum a_n x^n\right)$ le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, l'on obtient :

$\rho\left(\sum\limits_{n\geq 1} n x^n\right) \leq \rho\left(\sum\limits_{n\geq 1} H_n x^n\right) \leq \rho\left(\sum\limits_{n\geq 1} x^n\right)$. Comme $\rho\left(\sum\limits_{n\geq 1} n x^n\right) = \rho\left(\sum\limits_{n\geq 1} x^n\right) = 1$, l'on en déduit que :

$$\boxed{\rho\left(\sum_{n\geq 1} H_n x^n\right) = 1}$$

$\forall n \geq 2,\ \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1$, ce qui montre que :

$$\boxed{\rho\left(\sum_{n\geq 1} \ln(n)\, x^n\right) = 1}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-1,1\right[,\ (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} H_{n-1} x^n\\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (H_n - H_{n-1})\, x^n\\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}. \text{ D'où :}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[,\ (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\ln(1-x)}$$

III.D.2. D'après II.D.3., $1 + \dfrac{1}{2} + \ \dots\ + \dfrac{1}{n} - \ln(n) = \gamma + o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$. D'où $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Or (H_n) est une suite à termes positifs, $\sum H_n$ diverge (H_n ne tend pas vers 0), $\rho\left(\sum_{n\geq 1} H_n x^n\right) = 1$, donc :

$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$. D'où, d'après III.D.1.,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}}$$

III.E. - **Application 3**

III.E.1. L'on sait que $\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1\times 3\times\ \dots\ \times(2n-1)}{2\times 4\times\ \dots\ \times(2n)} x^{2n}$ (série entière de rayon de convergence 1). D'où :

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right[,\ \frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\times 3\times\ \dots\ \times(2n-1)}{2\times 4\times\ \dots\ \times(2n)} a^{2n} x^{2n},}$$

(série entière de rayon de convergence $\dfrac{1}{a}$)

III.E.2. $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \forall x \in \left]-1,1\right[,\ |x\cos(t)| < 1$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2\cos^2 t}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\times 3\times\ \dots\ \times(2n-1)}{2\times 4\times\ \dots\ \times(2n)} x^{2n}\cos^{2n} t\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}\cos^{2n} t. \text{ D'où :}\end{aligned}$$

$\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \forall x \in \left]-1,1\right[, \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2\cos^2 t}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2}{\pi} I_{2n} x^{2n} \cos^{2n} t$ et :

$\forall x \in \left]-1,1\right[, \forall n \in \mathbb{N}^*, J(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2}{\pi} I_{2k} x^{2k} \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} t \, dt + \int_0^{\pi/2} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{2}{\pi} I_{2k} x^{2k} \cos^{2k} t \right) dt$. Or :

$\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \forall x \in \left]-1,1\right[, \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{2}{\pi} I_{2k} x^{2k} \cos^{2k} t \le \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{2}{\pi} I_{2k} x^{2k}$ et

$\forall x \in \left]-1,1\right[, 0 \le \int_0^{\pi/2} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{2}{\pi} I_{2k} x^{2k} \cos^{2k} t \right) dt \le \dfrac{\pi}{2} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{2}{\pi} I_{2k} x^{2k}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{2}{\pi} I_{2k} x^{2k} \cos^{2k} t \right) dt = 0$ et :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[, J(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} I_{2k}^2 x^{2k}}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{\pi} I_{2n}}$$

III.E.3. On sait que $I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$; d'où $\dfrac{2}{\pi} I_{2n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{\pi}{4n} = \dfrac{1}{2n}$. Or, si $b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{2}{\pi} I_{2n}^2 \end{cases}$ et $c_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{2n} \text{ si } n \text{ est pair et non nul} \end{cases}$,

(b_n) est à termes positifs, $\sum b_n$ diverge, $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. d'où, d'après, III.B.,

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \underset{x\to1^-}{\sim} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \Leftrightarrow$

$J(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n} = -\dfrac{\ln(1-x^2)}{2} = -\dfrac{\ln(1-x) + \ln(1+x)}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{J(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{2}}$$

Partie IV

IV.A. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (1-x) \sum\limits_{p=0}^{n} A_p x^p = \sum\limits_{p=0}^{n} A_p x^p - \sum\limits_{p=0}^{n} A_p x^{p+1}$

$$= \sum_{p=0}^{n} A_p x^p - \sum_{p=1}^{n+1} A_{p-1} x^p$$
$$= A_0 + \sum_{p=1}^{n} (A_p - A_{p-1}) x^p - A_n x^{n+1}$$
$$= a_0 + \sum_{p=1}^{n} a_p x^p - A_n x^{n+1}. \text{ D'où :}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (1-x) \sum_{p=0}^{n} A_p x^p = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p - A_n x^{n+1}}$$

D'où si $x \in \left]0,1\right[$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \le (1-x) \sum\limits_{p=0}^{n} A_p x^p = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p x^p - A_n x^{n+1} \le \sum\limits_{p=0}^{n} a_p x^p \le \sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$ puisque $\sum a_p x^p$ converge et est à termes positifs. D'où la suite $\left(\sum\limits_{p=0}^{n} A_p x^p \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\dfrac{\sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_p x^p}{1-x}$: elle converge, ce qui montre que $\sum A_p x^p$ converge; on en déduit que $\forall x \in \left]-1,1\right[$, $\sum A_p x^p$ est absolument convergente et que $\rho\left(\sum A_n x^n\right) \geq 1$. Comme (A_n) tend vers $+\infty$, $\sum A_n$ diverge et $\rho\left(\sum A_n x^n\right) \leq 1$. Donc :

$$\boxed{\rho\left(\sum A_n x^n\right) = 1}$$

IV.B. $\forall x \in \left]-1,1\right[$, $\sum A_n x^n$ converge et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n x^n = 0$. Donc d'après IV.A.,

$\forall x \in \left]-1,1\right[$, $(1-x)\sum\limits_{p=0}^{+\infty} A_p x^p = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_p x^p \Rightarrow$

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{1-x}}$$

Comme $\rho\left(\sum A_n x^n\right) = 1$ et $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_n$, $\rho\left(\sum B_n x^n\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n x^{n+1} = 0$. En outre d'après IV.A.,

$\forall x \in \left]-1,1\right[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-x)\sum\limits_{p=0}^{n} B_p x^p = \sum\limits_{p=0}^{n} b_p x^p - B_n x^{n+1}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $\left(\sum\limits_{p=0}^{n} b_p x^p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} B_n x^n = \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}{1-x}}$$

Enfin, comme (A_n) est à termes positifs, $\sum A_n$ diverge, $\rho\left(\sum A_n x^n\right) = 1$, $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_n$, d'après III.B.,

$$\boxed{u(x) \underset{x\to1^-}{\sim} v(x)}$$

IV.C. **Application 1 :**

IV.C.1. Pour $x = 1$, $\sum x^{a^n}$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Donc $\rho\left(\sum x^{a^n}\right) \leq 1$.

Pour $|x| < 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} |x|^{a^k} \leq \sum\limits_{k=0}^{a^n} |x|^k$ qui tend vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |x|^k$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $\sum x^{a^n}$ est absolument convergente et $\rho\left(\sum x^{a^n}\right) \geq 1$. Donc :

$$\boxed{\rho\left(\sum x^{a^n}\right) = 1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$; la suite $(a^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante; posons $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } \forall p \in \mathbb{N},\ n \neq a^p \\ 1 \text{ si } \exists p \in \mathbb{N},\ n = a^p \end{cases}$. Alors :

$\sum x^{a^n} = \sum a_n x^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et p l'unique entier positif tel que $a^p \leq n < a^{p+1}$, alors $A_n = p$ et $\dfrac{\ln n}{\ln a} - 1 < p \leq \dfrac{\ln n}{\ln a}$, ce qui montre $p \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{\ln a}$. En posant $B_n = \dfrac{\ln n}{\ln a}$, $b_0 = 0$ et $b_n = B_n - B_{n-1}$, on a : (a_n) est à termes positifs non tous nuls, $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$, $\rho\left(\sum a_n x^n\right) = 1$ et $\sum a_n$ diverge; d'où :

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n x^n \underset{x\to1^-}{\sim} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} B_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{\ln a} x^n \underset{x\to1^-}{\sim} -\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(a)(1-x)}$ d'après III.D.2.. Donc :

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1-x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n x^n \underset{x\to1^-}{\sim} -\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(a)}$. J'ai montré :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{\ln(a)}}$$

III.D. **Application 2 :**

III.D.1. Pour $x=1$, $\sum x^{n^2}$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Donc $\rho\left(\sum x^{n^2}\right) \leq 1$.

Pour $|x|<1$, $\sum_{k=0}^{n} |x|^{k^2} \leq \sum_{k=0}^{n^2} |x|^k$ qui tend vers $\sum_{k=0}^{+\infty} |x|^k$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $\sum x^{n^2}$ est absolument convergente et $\rho\left(\sum x^{n^2}\right) \geq 1$. Donc :

$$\boxed{\rho\left(\sum x^{n^2}\right) = 1}$$

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$. En utilisant la règle de d'Alembert, on obtient :

$$\boxed{\rho\left(\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n\right) = 1}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$; la suite $(p^2)_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante; posons $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } \forall p\in\mathbb{N},\ n\neq p^2 \\ 1 \text{ si } \exists p\in\mathbb{N},\ n=p^2 \end{cases}$. Alors : $\sum x^{n^2} = \sum a_n x^n$. Soit $n\in\mathbb{N}$ et p l'unique entier positif tel que $p^2 \leq n < (p+1)^2$, alors $A_n = p$ et $\sqrt{n}-1 < p \leq \sqrt{n}$, ce qui montre $p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n+1}$. En posant $B_n = \sqrt{n+1}$, $b_0 = 1$ et $b_n = B_n - B_{n-1} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, on a :

(a_n) est à termes positifs non tous nuls, $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$, $\rho\left(\sum a_n x^n\right)=1$ et $\sum a_n$ diverge; d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} B_n x^n \Leftrightarrow (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} B_n x^n$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n. \text{ D'où :}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n}$$

IV.D.2. On sait que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$; donc $\frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} I_n$.

D'après III.B. appliquée aux séries entières $\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n$ et $\sum \sqrt{\frac{1}{2\pi}} I_n x^n$ ($\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ est à termes positifs, $\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ diverge, $\rho\left(\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n\right) = 1$ et $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} I_n$),

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n}$$

IV.D.3. $\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\forall x\in\,]-1,1[$, $|x\cos(t)|<1$, donc $\frac{1}{1-x\cos t} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^n t$. D'où :

$\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \forall x \in \left]-1,1\right[, \dfrac{1}{1-x\cos t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^n t$ et :

$\forall x \in \left]-1,1\right[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{1-x\cos t} dt = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^k t\, dt}_{I_k} + \int_0^{\pi/2} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k \cos^k t\right) dt$. Or :

$\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \forall x \in \left]-1,1\right[, \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k \cos^k t = \dfrac{x^{n+1}\cos^{n+1} t}{1-x\cos t}$ et

$\forall x \in \left]-1,1\right[, \left|\int_0^{\pi/2} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k \cos^k t\right) dt\right| \leq |x|^{n+1} \int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos^{n+1} t}{1-x\cos t} dt \leq |x|^{n+1} \int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{1-x\cos t}$ (intégrale d'une fonction continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$) qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k \cos^k t\right) dt = 0$ et :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[, \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k x^k}$$

IV.D.4. Calculons $\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{1-x\cos t} dt$ à l'aide du changement de variables $u = \tan \dfrac{t}{2}$ (C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$).

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos t} dt &= \int_0^1 \frac{2du}{1+u^2-x\left(1-u^2\right)} \\
&= \int_0^1 \frac{2du}{1-x+u^2(1+x)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}du}{1+\left(u\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left[\arctan\left(u\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right]_0^1. \text{ D'où :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos t} dt = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}$$

Or $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) \underset{x\to1^-}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{2\left(1-x\right)}}$. D'où :

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} I_n x^n \underset{x\to1^-}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{2\left(1-x\right)}}$ et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x\to1^-}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}}$$

∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6, *allée Chaptal*, 22000 *St Brieuc*
Tel. 0296639414
Adresse électronique : *BRON.Pierre@wanadoo.fr*

à l'aide de Scientific Workplace