# CONCOURS DE RECRUTEMENT

# D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

## ANNEE 2011

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

---

## Exercice 1

**Question 1 :**

**a)** VRAI
**b)** FAUX
**c)** FAUX
**d)** VRAI

**Explication 1 :**
Les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ sont les applications de la forme $(x, y) \mapsto (ax + cy, bx + dy)$. Donc a) est vrai et b) est faux.
Le déterminant du système $\left\{\begin{array}{l} 3x - y = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{array}\right.$ est $3 \times 3 - (-1) \times (-1) = 10 \neq 0$. Donc ce système est de Cramer et il admet l'unique solution $(0, 0)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ et puisque $f$ est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^2$, $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Donc d) est vrai.
Puisque $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, on a effectivement $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Mais d'autre part, on sait qu'un endomorphisme surjectif d'un espace de dimension infinie n'est pas automatiquement bijectif et donc c) est faux.

**Question 2 :**

**a)** FAUX
**b)** VRAI
**c)** VRAI
**d)** FAUX

**Explication 2 :**
$\begin{pmatrix} 3x - y \\ -x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ puis $\mathrm{Mat}(f, B, B) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Donc a) est faux et b) est vrai.
Puisque $f$ est un automorphisme, $B' = f(B)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et c) est vrai. Ensuite, en posant $B = (e_1, e_2)$ et $B' = (e'_1, e'_2)$, on a $e'_1 = f(e_1)$ et $e'_2 = f(e_2)$. Par suite, $\mathrm{Mat}(f, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Donc d) est faux.

**Question 3 :**

**a)** FAUX
**b)** FAUX
**c)** FAUX
**d)** FAUX

**Explication 3 :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}) < 2 \Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id} \notin \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3 - \lambda)^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda - 3 = 1 \text{ ou } \lambda - 3 = -1 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 4$$

et non pas $\lambda = 2$ et $\lambda = 4$. Donc tout est faux.

 

**Question 4 :**

**a)** FAUX
**b)** FAUX
**c)** VRAI
**d)** VRAI

**Explication 4 :** Il est connu que c) et d) sont vrais et a) et b) sont faux.

**Question 5 :**

**a)** FAUX
**b)** VRAI
**c)** FAUX
**d)** VRAI

**Explication 5 :** Soit $\lambda$ un réel.

$$\begin{aligned}\text{rg}(f - \lambda\text{Id}) < 2 &\Leftrightarrow 2 - \dim(\text{Ker}(f - \lambda\text{Id}) < 2 \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(f - \lambda\text{Id}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda\text{Id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow \exists u \in E \setminus \{0\}/\ (f - \lambda\text{Id})(u) = 0 \Leftrightarrow \exists u \in E \setminus \{0\}/\ f(u) = \lambda u.\end{aligned}$$

Donc, d) est vrai. Ensuite, si $\text{rg}(f - \lambda\text{Id}) < 2$, alors $\exists u \in E \setminus \{0\}/\ f(u) = \lambda u$ et en particulier, $\exists u \in E/\ f(u) = \lambda u$. Donc b) est vrai.
Maintenant, pour tout endomorphisme $f$, on a $f(0) = 0 = \lambda.0$ et donc pour tout endomorphisme $f$ et tout $\lambda$, même si $\text{rg}(f - \lambda\text{Id}) = 2$, on a toujours $\exists u \in E/\ f(u) = \lambda u$. Donc a) et c) sont faux.

**Question 6 :**

**a)** FAUX
**b)** FAUX
**c)** FAUX
**d)** FAUX

**Explication 6 :** On peut avoir $u = 0$ ou $v = 0$ et dans ce cas, la famille $(u, v)$ est liée. Donc, b) et c) sont faux. (Remarque : on ne dit pas « $u$ et $v$ sont libres » mais « $u$ et $v$ sont linéairement indépendants » ou bien « la famille $(u, v)$ est libre »).
Supposons $u \neq 0$ et $v \neq 0$ et qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $v = ku$. Alors,

$$\beta v = f(v) = kf(u) = k\alpha u = \alpha v,$$

puis $(\beta - \alpha)v = 0$ ce qui est impossible car $\beta - \alpha \neq 0$ et $v \neq 0$. Donc, on ne peut avoir $v = ku$ pour un certain $k$ et, puisque $u$ et $v$ sont non nuls, la famille $(u, v)$ est libre. Donc a) est faux. En résumé, on ne peut savoir si la famille $(u, v)$ est libre ou liée. Néanmoins, la raison invoquée en d) est une mauvaise raison car cela ne dépend pas des valeurs de $\alpha$ et $\beta$ mais cela dépend du fait que $u$ ou $v$ soient nuls ou pas. Donc d) est faux.

**Question 7 :**

**a)** FAUX
**b)** VRAI
**c)** VRAI
**d)** FAUX

**Explication 7 :** Puisque $\text{card}(u, v) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2) < +\infty$, si $(u, v)$ est libre, alors $(u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donc c) est vrai.
Si $\alpha \notin \{2, 4\}$, $\dim(\text{Ker}(f - \alpha\text{Id})) = 0$ d'après la question 3.
Si $\alpha \in \{2, 4\}$, alors $\dim(\text{Ker}(f - \alpha\text{Id})) \in \{1, 2\}$. On ne peut avoir $\dim(\text{Ker}(f - \alpha\text{Id})) = 2$ car alors $f - \alpha\text{Id} = 0$ puis $f = \alpha\text{Id}$ ce qui n'est pas au vu de la matrice de $f$ dans la base $B$. Donc $\text{Ker}(f - \alpha\text{Id})$ est une droite vectorielle.
Dans tous les cas, $\dim(\text{Ker}(f - \alpha\text{Id})) \leqslant 1$. $(u, v)$ est une famille de deux vecteurs de cet espace de dimension au plus $1$ et donc la famille $(u, v)$ est liée. Par suite, b) est vrai et d) est faux.

Si $\alpha = 2$ et si on choisit deux vecteurs $u$ et $v$ distincts et éléments de la droite vectorielle $\text{Ker}(f - \alpha\text{Id})$), $u$ et $v$ conviennent et sont distincts. Donc a) est faux.

 

**Question 8 :**

a) VRAI
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

**Explication 8 :** Posons $B = (e_1, e_2)$ et $B'' = (e_1'', e_2'')$. Les colonnes de Pass$(B, B'')$ sont constituées des coordonnées des vecteurs $e_1'' = \mathrm{Id}(e_1'')$ et $e_2'' = \mathrm{Id}(e_2'')$ dans la base B. Donc, Pass$(B, B'') = $ Mat$(\mathrm{Id}, B, B'') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
a) et c) sont vrais et b) et d) sont faux.

**Question 9 :**

a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

**Explication 9 :** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc $f(e_1'') = 2e_1''$ et $f(e_2'') = 4e_2''$ puis Mat$(f, B'', B'') = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Donc c) est vrai et d) est faux.
Ensuite, en posant $P = $ Pass$(B, B'')$, $A = $ Mat$(f, B, B)$ et $D = $ Mat$(f, B'', B'')$, on a $A = PDP^{-1}$ ou encore Mat$(f, B, B) = $ Pass$(B, B'') \times$ Mat$(f, B'', B'') \times$ Pass$(B'', B)$. Comme Pass$(B, B'') = P^{-1} = \frac{1}{2}P \neq$ Pass$(B'', B)$, a) et b) sont faux.

**Question 10 :**

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

**Explication 10 :** $A = PDP^{-1}$ et donc $A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$ et donc a) est faux, c) est faux et b) est faux car Pass$(B, B'') \neq$ Pass$(B'', B)$.
Le résultat de d) est faux pour $k = 0$ et donc d) est faux. Néanmoins,

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^k & 4^k \\ 2^k & -4^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^k + 4^k & 2^k - 4^k \\ 2^k - 4^k & 2^k + 4^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k-1} + 2^{2k-1} & 2^{k-1} - 2^{2k-1} \\ 2^{k-1} - 2^{2k-1} & 2^{k-1} + 2^{2k-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Question 11 :**

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

**Explication 11 :** On parie sur une erreur d'énoncé. Dans cette question et les deux suivantes, il faut probablement lire « $n \in \mathbb{N}^*$ » et non pas « $n \in \mathbb{N}$ ».
En supposant $n \in \mathbb{N}^*$, la bonne formule avec les bonnes hypothèses est donnée en b). b) est vrai et le reste est faux.

**Question 12 :**

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

 

**Explication 12 :**
(Rappel. L'égalité de la moyenne est hors programme. Seule l'inégalité de la moyenne fait partie du programme).
Les formules données en a) et b) sont fausses. Les formules données en c) et d) sont exactes. Seules les hypothèses de d) permettent de déduire la formule de l'égalité de la moyenne. Donc, d) est vrai et c) est faux. Néanmoins, la formule exacte donnée en c) se déduit bien des hypothèses de c) : c'est la formule de TAYLOR-LAGRANGE qui est elle aussi hors programme.

**Question 13 :**
a) FAUX
b) VRAI
c) VRAI
d) FAUX

**Explication 13 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, alors $c = 0$ convient en a) et b). Sinon, il existe $c$ dans $]0, x[$ ou $]x, 0[$ tel que $e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}e^c$. Donc b) est vrai. a) est faux car le réel $c$ varie quand $x$ varie de sorte que l'ordre des quantificateurs de a) est mauvais.
Puisque $c \leqslant |c| \leqslant |x|$,

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right| = \left|\frac{x^n}{n!}e^c\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}e^{|x|}.$$

Maintenant, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ et donc $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
c) est vrai et d) est faux.

**Question 14 :**
a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

**Explication 14 :** $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!} \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\to} \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^4 \end{pmatrix}$. Donc a) est vrai et b) est faux. Ensuite

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k &= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D^k\right)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^2 & e^4 \\ e^2 & -e^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{e^2 + e^4}{2} & \frac{e^2 - e^4}{2} \\ \frac{e^2 - e^4}{2} & \frac{e^2 + e^4}{2} \end{pmatrix} = e^3 \begin{pmatrix} \frac{e^1 + e^{-1}}{2} & -\frac{e^1 - e^{-1}}{2} \\ -\frac{e^1 + e^{-1}}{2} & \frac{e^1 + e^{-1}}{2} \end{pmatrix} = e^3 \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(1) & -\mathrm{sh}(1) \\ -\mathrm{sh}(1) & \mathrm{ch}(1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

d) est vrai et c) est faux.

# Exercice 2

Erreur d'énoncé très probable et embêtante pour la suite : le lien entre $u_0$ et $u_1$ n'est pas établi. Il faut probablement démarrer la suite $u$ au rang 1 ce que l'on fera par la suite en remplaçant systématiquement $u_0$ par $u_1$.
Plus précisément, la suite $u$ est la suite définie par son premier terme $u_1$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n\left(u_n + \frac{1}{n}\right)$.

 

**Question 15 :**

**a)** FAUX
**b)** FAUX
**c)** VRAI
**d)** VRAI

**Explication 15 :** Si $u_1 = -\dfrac{1}{2}$, alors $u_2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}+1\right) = -\dfrac{1}{4} < 0$. Donc a) est faux.
Il est clair par récurrence que c) est vrai en supposant que l'énoncé de c) est : « $\forall n \geqslant 2,\ u_n \geqslant 0 \Leftarrow u_1 \geqslant 0$ ». Ensuite, si $u_1 \leqslant -1$, alors, $u_2 = u_1(u_1+1) \geqslant 0$, puis par récurrence, $\forall n \geqslant 2,\ u_n \geqslant 0$. Donc b) est faux en supposant que l'énoncé de b) est : « $\forall n \geqslant 2,\ u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow u_1 \geqslant 0$ ».
Enfin, si $-1 < u_1 < 0$, $u_2 = u_1(u_1+1) < 0$ puis par contraposition : $(\forall n \geqslant 2,\ u_n \geqslant 0) \Rightarrow u_1 \leqslant -1$ ou $u_1 \geqslant 0$.
Finalement, on parie que d) est vrai en supposant que l'énoncé de d) est $(\forall n \geqslant 2,\ u_n \geqslant 0) \Leftrightarrow u_1 \leqslant -1$ ou $u_1 \geqslant 0$.

**Question 16 :**

**a)** FAUX
**b)** FAUX
**c)** FAUX
**d)** FAUX

**Explication 16 :** On suppose que l'énoncé signifie que $\lambda$ est réel et pas infini.
Si la suite $(u_n)$ converge vers $\lambda$, alors quand $n$ tend vers $+\infty$ on obtient $\lambda = \lambda(\lambda+0)$ et donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Donc tout est faux.

**Question 17 :**

**a)** FAUX
**b)** VRAI
**c)** FAUX
**d)** FAUX

**Explication 17 :** Si $u_1 < 0$ et $f_1(u_1)$ n'existe pas. Donc a) est faux.
Par récurrence, chaque fonction $f_p$, $p \in \mathbb{N}^*$, est définie sur $\mathbb{R}^+$. Si $u_1 > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$ et donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_p(u_n)$ existe. On parie que b) est vrai.

On suppose $u_1 > 0$. Alors par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Ensuite,
- $f_1(u_1) = u_1$
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n = f_n(u_1)$. Alors

$$f_{n+1}(u_1) = f_n(u_1)\left(f_n(u_1) + \frac{1}{n}\right) = u_n\left(u_n + \frac{1}{n}\right) = u_{n+1}.$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f_n(u_1)$. On parie que c) et d) sont faux.

**Question 18 :**

**a)** VRAI
**b)** FAUX
**c)** FAUX
**d)** VRAI

**Explication 18 :** $f_1$ est un polynôme de degré $1 = 2^{1-1}$ et si pour $n \geqslant 1$, $f_n$ est un polynôme de degré $2^{n-1}$ alors $f_{n+1} = f_n\left(f_n + \dfrac{1}{n}\right)$ est un polynôme de degré $2 \times 2^{n-1} = 2^n$. Ceci montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est un polynôme de degré $2^{n-1}$ (et donc c) et b) sont faux) et en particulier indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f_1$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et si pour $n \geqslant 1$, la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$, alors la fonction $f_{n+1} = f_n\left(f_n + \dfrac{1}{n}\right)$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions strictement positives sur $]0, +\infty[$, positives ou nulles sur $[0, +\infty[$ et strictement croissantes sur $[0, +\infty[$.
On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$. Donc a) et d) sont vrais.

 

**Question 19 :**

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

**Explication 19 :** a) est faux car les hypothèses n'assurent pas l'unicité du réel $x$. b) est faux car il manque l'hypothèse de continuité. c) est faux car si $f$ est de plus strictement croissante sur $[a,b]$, l'équation $f(x) = f(a)$ admet $x = a$ pour unique solution et cette solution n'est pas dans $]a,b[$. Enfin, d) est évidemment faux.

**Question 20 :**

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

**Explication 20 :** L'unicité du couple $(\alpha_n, \beta_n)$ est assurée par la stricte croissance de la fonction $f_n$ sur $[0,+\infty[$. D'autre part, aucun théorème des valeurs intermédiaires ne donnent l'unicité. Donc a), b) et d) sont faux.
Puisque $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$, on a $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 1$ et donc tout est faux. Néanmoins, $f_1(0) = 0$ et si pour $n \geqslant 1$, $f_n(0) = 0$, alors $f_{n+1}(0) = f_n(0)\left(f_n(0) + \dfrac{1}{n}\right) = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$.

Ensuite, $f_2(1) = 2 > 1$ et si pour $n \geqslant 2$, $f_n(1) > 1$, alors $f_{n+1}(1) = f_n(1)\left(f_n(1) + \dfrac{1}{n}\right) > 1$. Donc $\forall n \geqslant 2$, $f_n(1) > 1$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in [0,+\infty[^2$ tel que $f_n(\alpha_n) = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $f_n(\beta_n) = 1$. De plus, on a vu que $(\alpha_n, \beta_n)$ est unique.
Enfin, pour $n \geqslant 2$, on a $0 < 1 - \dfrac{1}{n} < 1$ et donc $f_n(0) < f_n(\alpha_n) < f_n(\beta_n) < f_n(1)$. Puisque chaque fonction $f_n$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on en déduit que $\forall n \geqslant 2$, $0 < \alpha_n < \beta_n < 1$.

**Question 21 :**

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

**Explication 21 :** (Erreur probable d'énoncé : il faut bien sûr lire dans chaque proposition $f_{n+1}(\beta_n)$).
$f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n)\left(f_n(\alpha_n) + \dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} < 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et $f_{n+1}(\beta_n) = 1 \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) > 1$. On parie que b) est vrai et le reste est faux.

**Question 22 :**

a) FAUX
b) VRAI
c) VRAI
d) FAUX

**Explication 22 :** b) et c) sont vrais et a) et d) sont faux.

**Question 23 :**

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

 

**Explication 23 :** Soit $n \geqslant 1$. D'après la question 21, on a $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ et $f_{n+1}(\beta_n) > f_{n+1}(\beta_{n+1})$. Puisque la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on en déduit que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ et $\beta_n > \beta_{n+1}$. Donc la suite $(\alpha_n)$ est strictement croissante et la suite $(\beta_n)$ est strictement décroissante. b) est vrai et le reste est faux.

**Question 24 :**

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) VRAI

**Explication 24 :** La suite $(\alpha_n)$ est croissante et majorée par 1. Donc la suite $(\alpha_n)$ converge vers un réel L. Donc a) est faux (il s'agit de majorer par une expression constante quand $n$ varie) et b) est vrai. De même, la suite $(\beta_n)$ est décroissante et minorée par 0 et donc la suite $(\beta_n)$ converge vers un réel $L'$. Enfin, puisque pour $n \geqslant 2$, $0 < \alpha_n < \beta_n < 1$, on en déduit que $0 \leqslant L \leqslant L' \leqslant 1$. c) est faux et d) est vrai (les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite).

**Question 25 :**

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

**Explication 25 :** Puisque la suite $(\alpha_n)$ est strictement croissante et que la suite $(\beta_n)$ est strictement décroissante, pour $n \geqslant 1$, on a $\alpha_n < L \leqslant L' < \beta_n$. Puisque chaque fonction $f_n$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on en déduit que $\forall n \geqslant 1$, $f_n(\alpha_n) < f_n(L) \leqslant f_n(L') < f_n(\beta_n)$ ou encore $\forall n \geqslant 1$, $1 - \dfrac{1}{n} < f_n(L) \leqslant f_n(L') < 1$. Donc a) est vrai et b) est faux.

Pour $n \geqslant 1$, la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et donc $f_n(u_1) - f_n(L)$ est du signe de $u_1 - L$. Donc d) est vrai.
Ensuite, l'encadrement $1 - \dfrac{1}{n} < f_n(L) \leqslant f_n(L') < 1$ montre que les suites $(f_n(L))$ et $(f_n(L'))$ converge vers 1. Supposons que $L < L'$. Alors, $\forall n \geqslant 1$, $f_n(L) < f_n(L')$. Ensuite, pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{f_{n+1}(L') - f_{n+1}(L)}{f_n(L') - f_n(L)} = \frac{(f_n(L'))^2 - (f_n(L))^2 + \dfrac{1}{n}(f_n(L') - f_n(L))}{f_n(L') - f_n(L)} = f_n(L) + f_n(L') + \frac{1}{n}.$$

Par suite, $\dfrac{f_{n+1}(L') - f_{n+1}(L)}{f_n(L') - f_n(L)}$ tend vers 2 quand $n$ tend vers $+\infty$. On en déduit qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $f_{n+1}(L') - f_{n+1}(L) > \dfrac{3}{2}(f_n(L') - f_n(L))$ puis pour $n \geqslant n_0$, $f_n(L') - f_n(L) \geqslant (f_{n_0}(L') - f_{n_0}(L))\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-n_0}$. Mais alors, $f_n(L') - f_n(L)$ tend vers $+\infty$ et non pas vers $1 - 1 = 0$. Donc $L = L'$ et c) est faux.

**Question 26 :**

a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

**Explication 26 :** Puisque $u_1 > 0$, on a $u_2 = u_1 + u_1^2 > u_1$ et donc la suite $(u_n)$ ne peut être décroissante. Donc b) est faux. Pour $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n\left(u_n + \frac{1}{n}\right) - u_n = u_n\left(u_n - 1 + \frac{1}{n}\right) = u_n(f_n(u_1) - f_n(\alpha_n)).$$

La suite $(\alpha_n)$ tend vers L et donc, il existe un rang $n_0$ à partir duquel $u_1 < \alpha_n (< L)$. Puisque la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, pour $n \geqslant n_0$, on a $f_n(u_1) - f_n(\alpha_n) < 0$ puis $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite $(u_n)$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang et donc a) est faux.
La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement positive et décroissante à partir d'un certain rang. Donc la suite $(u_n)$ converge vers $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ d'après la question 16.
D'après la question 25)d), pour $n \geqslant 1$, on a $u_n - f_n(L) = f(u_1) - f_n(L) < 0$ et donc $u_n < f_n(L) < 1$. Puisque la suite $(u_n)$ est décroissante, elle ne peut tendre vers 1 et finalement la suite $(u_n)$ converge vers 0. Donc c) est vrai et d) est faux.

 

**Question 27 :**

**a)** VRAI
**b)** FAUX
**c)** FAUX
**d)** VRAI

**Explication 27 :** Avec les calculs de la question précédente, $u_{n+1} - u_n = u_n(f_n(u_1) - f_n(\alpha_n)) > 0$ car $u_1 > L > \alpha_n$. Donc la suite $(u_n)$ est strictement croissante. a) est vrai et b) est faux.
Puisque $L' = L$, la suite $(\beta_n)$ tend vers L. Puisque $u_1 > L$, il existe un rang à partir duquel $\beta_n < u_1$ et donc $1 = f_n(\beta_n) < f_n(u_1) = u_n$. Ainsi, la suite $(u_n)$ et croissante et, à partir d'un certain rang, $u_n > 1$. Donc la suite $(u_n)$ ne peut tendre vers $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. c) est faux et d) est vrai.

# Exercice 3

**Question 28 :**

**a)** FAUX
**b)** VRAI
**c)** FAUX
**d)** FAUX

**Explication 28 :** Soit $x$ un réel. Puisque la fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto (x-t)f(2t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
On note I le segment $[x, 0]$ si $x \leqslant 0$ et $[0, x]$ si $x \geqslant 0$. Puisque la fonction $t \mapsto (x-t)f(2t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est sur I et donc $\int_0^x (x-t)f(2t)\,dt$ existe. Donc b) est vrai. a) est faux car la raison invoquée est insuffisante.

Pour tout réel $x$, $\varphi(x) = x\int_0^x f(2t)\,dt - \int_0^x tf(2t)\,dt$. Les fonctions $t \mapsto f(2t)$ et $t \mapsto tf(2t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(2t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(2t)\,dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de $\varphi$. Donc d) est faux. De plus, pour $x$ réel,

$$\varphi'(x) = \int_0^x f(2t)\,dt + xf(2x) - xf(2x) = \int_0^x f(2t)\,dt.$$

Donc c) est faux.

**Question 29 :**

**a)** VRAI
**b)** FAUX
**c)** FAUX
**d)** VRAI

**Explication 29 :** Pour tout réel $x$, $f(x) = \int_0^{x/2}\left(\frac{x}{2} - t\right)f(2t)\,dt + 1 = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + 1\ (*)$.
• La fonction $x \mapsto \int_0^{x/2}\left(\frac{x}{2} - t\right)f(2t)\,dt + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons $f$ $n$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors, les fonctions $t \mapsto f(2t)$ et $t \mapsto tf(2t)$ sont $n$ fois dérivables sur $\mathbb{R}$ puis les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(2t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(2t)\,dt$ sont $n+1$ fois dérivables surf $\mathbb{R}$ et finalement la fonction $\varphi$ est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Mais alors la fonction $f$ est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc a) est vrai.

En dérivant les deux membres de l'égalité $(P)$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $2f'(2x) = \int_0^x f(2t)\,dt$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(2x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(2t)\,dt$. d) est vrai et b) et c) sont faux.

 

**Question 30 :**
a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

**Explication 30 :** En redérivant, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $4f''(2x) = f(2x)$ ou encore $\forall u \in \mathbb{R}$, $4f''(u) = f(u)$. b) est vrai et a), c) sont faux. d) est faux car l'égalité $(P)$ impose $f(0) = 1$.

**Question 31 :**
a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

**Explication 31 :** Les solutions de l'équation différentielle $y'' - \dfrac{1}{4}y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ae^{x/2} + Be^{-x/2}$ ou aussi les fonctions de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right) + B\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Donc a), b), c) et d) sont faux.

**Question 32 :**
a) FAUX
b) VRAI
c) VRAI
d) FAUX

**Explication 32 :** Quand $x = 0$ dans l'équation $(P)$, on obtient $f(0) = 0 + 1 = 1$. Donc a) est faux et b) est vrai. En supposant que l'on a écrit les solutions sous la forme $f(x) = Ae^{x/2} + Be^{-x/2}$, on obtient $A + B = 1$. En supposant que l'on a écrit les solutions sous la forme $f(x) = A\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right) + B\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, on obtient $A = 1$. On parie alors que c) est vrai et d) est faux.

**Question 33 :**
a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

**Explication 33 :** Il existe un réel $A'$ tel que pour tout réel $x$, $f(x) = A'e^{x/2} + (1 - A')e^{-x/2} = 2A'\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{2}\right) + e^{-x/2}$ puis en posant $A = 2A'$, il existe nécessairement un réel $A$ tel que pour tout réel $x$, $f(x) = A\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{2}\right) + e^{-x/2}$. a) est vrai et le reste est faux.

**Question 34 :**
a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

**Explication 34 :** D'après la question 29, on a nécessairement $\forall x \in \mathbb{R}$, $2f'(2x) = \displaystyle\int_0^x f(2t)\,dt$. En particulier, $f'(0) = 0$ ce qui fournit $\dfrac{1}{2}(A - 1) = 0$ et donc $A = 1$.

Ainsi, nécessairement $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{2}\right) + e^{-x/2} = \mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Donc a) et b) sont faux.

Réciproquement, posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Alors

 

$$\int_0^x (x-t)f(2t)\ dt = x\int_0^x \mathrm{ch}(t)\ dt - \int_0^x t\,\mathrm{ch}(t)\ dt = x\,\mathrm{sh}(x) - [t\,\mathrm{sh}(t)]_0^x + \int_0^x \mathrm{sh}(t)\ dt = \mathrm{ch}(x) - 1,$$

et donc $\displaystyle\int_0^x (x-t)f(2t)\ dt + 1 = \mathrm{ch}(x) = f(2x)$. Donc la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ est effectivement solution du problème $(P)$. c) est vrai et d) est faux.

 