Ecoles des Mines d'Albi, Alès, Douai et Nantes Concours commun 2010 Epreuve spécifique de mathématiques (MPSI)

1 Problème 1 (analyse)

1.1 Etude de courbes paramétrées

1) Il est clair que l'image de f_a est incluse dans $]0,1]$. Inversement, comme $f_a(0)=0$ et $\lim\limits_{\infty} f_a = 0$, et comme f_a est continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que f_a prend toutes les valeurs de l'intervalle $]0,1]$. Conclusion : l'image de f_a est exactement $]0,1]$.

Supposons $a=b$. Lorsque t décrit $\mathbb{R}_+$, le point $F(t)=\big(f_a(t),f_a(t)\big)$ décrit alors l'ensemble $\Big\{(y,y)\Big\}_{y\in\ ]0,1]}$, c'est-à-dire le segment joignant les points $O=(0,0)$ et $A=(1,1)$ privé de O.

2) Le support de $\Gamma_{b,a}$ est le symétrique de celui de $\Gamma_{a,b}$ par rapport à la première bissctrice d'équation $y=x$.

3) Pour tous $x,y\in\mathbb{R}_+$ tels que $x<y$: $\quad a\ln x < a\ln y \quad$ sachant que $a>0$, puis : $\quad x^a = e^{a\ln x} < e^{a\ln y} = y^a$, $\quad$ et enfin : $f_a(x) = \dfrac{1}{1+x^a} > \dfrac{1}{1+y^a} = f_a(y)$. Ainsi f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

4) Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$: $\quad f_a(t)+f_a\left(\dfrac{1}{t}\right)=1.$

5) Le point $(1,1)$ n'est atteint par F qu'en 0. Etudier le support de $\Gamma_{a,b}$ privé de $(1,1)$ revient donc à n'étudier F que sur $\mathbb{R}_+^\times$.

Or pour tout $t\in\mathbb{R}_+^\times$, via **4)** : $\quad F\left(\dfrac{1}{t}\right)=(1,1)-F(t)$. Pour $B=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, cela revient à dire que : $\quad \overrightarrow{BF\left(\dfrac{1}{t}\right)} = -\overrightarrow{BF(t)}$, i.e. que $F\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est le symétrique de $F(t)$ par rapport à B. Ainsi le support de $\Gamma_{a,b}$ privé de $(1,1)$ est symétrique par rapport à B. En outre, il suffit d'étudier F sur $]0,1]$ ou $[1,\infty[$ pour connaître tout le support de $\Gamma_{a,b}$.

6) D'après **3)**, x et y sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$, de valeur 1 en 0 et de limite 0 en ∞.

7) Allure locale en 0 : $\quad \dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \dfrac{\dfrac{1}{1+t^b}-1}{\dfrac{1}{1+t^a}-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-t^b}{-t^a} \underset{t\to 0}{\sim} t^{b-a}$. Or $a<b$ donc $\lim\limits_{\infty}\dfrac{y-y(0)}{x-x(0)}=0$. Le support de $\Gamma_{a,b}$ présente donc en 0 une tangente dirigée par $\vec{\imath}$.

Allure locale en ∞ : $\quad \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1+t^a}{1+t^b} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{t^a}{t^b} \underset{t\to\infty}{\sim} t^{a-b}$. Or $a<b$ donc $\lim\limits_{\infty}\dfrac{y}{x}=0$. Sachant par ailleurs que $\lim\limits_{\infty} x = \lim\limits_{\infty} y = 0$, on en déduit que lorsque t tend vers ∞, le point $F(t)$ s'approche de O sans l'atteindre dans la direction (Ox). Le support de $\Gamma_{a,b}$ présente donc une « tangente » en O dirigée par $\vec{\imath}$ à ceci près que O n'est pas sur la courbe.

8)
$$f_a(1+h) = \frac{1}{1+(1+h)^a} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2+ah+\dfrac{a(a-1)}{2}\,h^2+\dfrac{a(a-1)(a-2)}{6}\,h^3+o(h^3)}$$
$$\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\dfrac{a}{2}\,h+\dfrac{a(a-1)}{4}\,h^2+\dfrac{a(a-1)(a-2)}{12}\,h^3+o(h^3)}$$
$$\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{a}{2}\,h+\frac{a(a-1)}{4}\,h^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{12}\,h^3\right)+\left(\frac{a}{2}\,h+\frac{a(a-1)}{4}\,h^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{12}\,h^3\right)^2\right.$$
$$\left.-\left(\frac{a}{2}\,h+\frac{a(a-1)}{4}\,h^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{12}\,h^3\right)^3+o(h^3)\right]$$
$$\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{a}{2}\,h+\frac{a(a-1)}{4}\,h^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{12}\,h^3\right)+\left(\frac{a^2}{4}\,h^2+\frac{a^2(a-1)}{4}\,h^3\right)-\left(\frac{a^3}{8}\,h^3\right)+o(h^3)\right]$$
$$\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{a}{4}\,h+\frac{a}{8}\,h^2+\frac{(a-2)a(a+2)}{48}\,h^3+o(h^3).$$

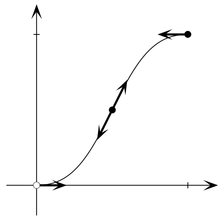
Conclusion : $\quad f_a(t) \underset{t\to 1}{=} \dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4}\,(t-1)+\dfrac{a}{8}\,(t-1)^2+\dfrac{(a-2)a(a+2)}{48}\,(t-1)^3+o\Big((t-1)^3\Big).$

9) En particulier, pour $\Gamma_{1,2}$: $\quad x(t) \underset{t\to 1}{=} \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\,(t-1)+\dfrac{1}{8}\,(t-1)^2-\dfrac{1}{16}\,(t-1)^3+o\Big((t-1)^3\Big)$

et : $\quad y(t) \underset{t\to 1}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,(t-1) + \dfrac{1}{4}\,(t-1)^2 + o\Big((t-1)^3\Big)$. La formule de Taylor-Young nous permet de récupérer alors les informations suivantes : $\quad x'(1) = -\dfrac{1}{4}, \quad x''(1) = \dfrac{1}{4}, \quad x'''(1) = -\dfrac{3}{8}, \quad y'(1) = -\dfrac{1}{2}, \quad y''(1) = \dfrac{1}{2}$ et $y'''(1) = 0$. En d'autres termes : $\quad F'(1) = \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}\right), \quad F''(1) = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ et $F'''(1) = \left(-\dfrac{3}{8}, 0\right)$.

Comme $F'(1) \neq \vec{0}$, le point $F(1) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ est régulier donc la tangente y est dirigée par $F'(1)$. Mais $F''(1)$ est colinéaire à $F'(1)$, tandis que $F'''(1)$ ne l'est pas. Le point $F(1)$ est donc un point d'inflexion.

10) Allure du support de $\Gamma_{1,2}$:



1.2 Fonction définie par une intégrale

11) $\quad \varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \varphi(1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \Big[\ln(1+t)\Big]_{t=0}^{t=1} = \ln 2 \qquad$ et $\qquad \varphi(2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\mathrm{Arctan}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

12) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Pour tout $t \in \,]0,1]$, $\ln t \leqslant 0$ donc : $\quad x \ln t \geqslant y \ln t$, puis : $\quad t^x = e^{x\ln t} \geqslant e^{y \ln t} = t^y$ et enfin : $\quad \dfrac{1}{1+t^x} \leqslant \dfrac{1}{1+t^y}$. Le comportement en 0 ne compte pas puisqu'on intègre des fonctions continues. On intègre sur $[0,1]$: $\quad \varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^y} = \varphi(y)$. Bref, φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

13) $\quad \big|\varphi(x) - \varphi(y)\big| \overset{\mathbf{12)}\text{ et } x\leqslant y}{=} \varphi(y) - \varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^y} - \frac{1}{1+t^x}\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(t^x - t^y)\,\mathrm{d}t}{(1+t^x)(1+t^y)} \leqslant \int_0^1 (t^x - t^y)\,\mathrm{d}t$.

Ensuite : $\quad \displaystyle\int_0^1 (t^x - t^y)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} - \frac{t^{y+1}}{y+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} \leqslant y - x$.

14) On peut lever l'hypothèse « $x \leqslant y$ » de **13)** en remarquant que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$: $\quad \big|\varphi(x) - \varphi(y)\big| \leqslant |x-y|$. Pour montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$, il suffit alors d'appliquer le théorème des gendarmes en faisant tendre x vers y : $\lim\limits_y \varphi$ existe et vaut $\varphi(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+$. On peut aussi dire — c'est pareil — que φ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et utiliser directement le fait que toute fonction lipschitzienne est continue.

15) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\quad 1 - \varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^x}\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^x\,\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

16) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, d'après **15)** : $\quad 0 \leqslant 1 - \varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x\,\mathrm{d}t}{1+t^x} \leqslant \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x+1}$. Il ne reste plus, pour conclure, qu'à utiliser le théorème des gendarmes.

17) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ — mais hélas la dérivée de $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0 pour $x \in \,]0,1[$. Comme le programme de MPSI n'énonce le théorème d'intégration par parties que dans le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment, nous allons redémontrer ce théorème dans le cas qui nous occupe pour lever la difficulté. Remarquons donc que la dérivée de la fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^x}$ sur $[0,1]$ est $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^x} - \dfrac{xt^x}{1+t^x}$. Intégrons cette égalité de fonctions continues sur $[0,1]$: $\quad \left[\dfrac{t}{1+t^x}\right]_{t=0}^{t=1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} - \int_0^1 \frac{xt^x\,\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

Bref, comme voulu : $\quad \varphi(x) = \dfrac{1}{2} + x\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x\,\mathrm{d}t}{(1+t^x)^2}$.

18) D'après **11)** et **17)**, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\times$: $\quad \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x\,\mathrm{d}t}{(1+t^x)^2}$. Il nous reste à faire tendre x vers 0 pour trouver la pente de la demi-tangente en 0. Remarquons pour commencer que : $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x\,\mathrm{d}t}{(1+t^x)^2} \geqslant \int_0^1 \frac{t^x\,\mathrm{d}t}{4} = \frac{1}{4(x+1)}$.

Ensuite : $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x\,\mathrm{d}t}{(1+t^x)^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^x} - \frac{1}{(1+t^x)^2}\right)\,\mathrm{d}t = \varphi(x) - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^x)^2} \leqslant \varphi(x) - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{4} = \varphi(x) - \frac{1}{4}$.

Conclusion : $\quad \dfrac{1}{4(x+1)} \leqslant \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x-0} \leqslant \varphi(x) - \dfrac{1}{4}$. Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{4(x+1)} = \dfrac{1}{4}$, et d'après **11)**, par continuité de φ en 0, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\varphi(x) - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$. Le théorème des gendarmes montre donc que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}$ existe et vaut $\dfrac{1}{4}$, valeur de la pente de la demi-tangente de φ en 0.

19) Il convient d'illustrer la croissance de φ, sa continuité, sa limite 1 en ∞, sa pente $\dfrac{1}{4}$ en 0 ainsi que les valeurs trouvées en **11)**.

20) Soit $x \geqslant 1$. Les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t^x)}{x}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, une intégration par parties donne :

$$\varphi(x) - 1 \overset{\textbf{15)}}{=} -\int_0^1 t \times \frac{t^{x-1}\,\mathrm{d}t}{1+t^x} = -\left[t \times \frac{\ln(1+t^x)}{x}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 1 \times \frac{\ln(1+t^x)}{x}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln 2}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ étant concave sur $]-1,\infty[$, son graphe est sous sa tangente en 0 : $\forall t \in\,]-1,\infty[, \quad \ln(1+t) \leqslant t$. Du coup : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$. En vertu du théorème des gendarmes, on obtient donc la limite : $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t = 0$. Finalement : $\displaystyle\varphi(x) - 1 \underset{x\to\infty}{=} -\frac{\ln 2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, donc : $\displaystyle\varphi(x) - 1 \underset{x\to\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{x}$.

2 Problème 2 (algèbre)

2.1 Théorème de Fermat

21) Tout d'abord : $k\dbinom{p}{k} = k \times \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p \times (p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = p \times \dfrac{(p-1)!}{(k-1)!\big((p-1)-(k-1)\big)!} = p\dbinom{p-1}{k-1}$. En particulier p divise $k\dbinom{p}{k}$. Mais k et p sont premiers entre eux car p est premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$. Le théorème de Gauss montre donc que p divise $\dbinom{p}{k}$.

22) **Initialisation :** Pour tout $p \in \mathscr{P}$, $0^p - 0 = 0$ donc p divise $0^p - 0$.

Hérédité : Soit $a \in \mathbb{N}$. On suppose que p divise $a^p - a$.

On remarque alors que : $(a+1)^p - (a+1) = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k\right] - a - 1 = \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k\right] + \big(a^p - a\big)$. Or chacun des termes du membre de droite est divisible par p, soit d'après **21)**, soit par hypothèse de récurrence. Il en découle donc comme voulu que p divise $(a+1)^p - (a+1)$.

23) **Remarque :** Comme M est à coefficients entiers et comme $\det(M) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{3} m_{\sigma(i)i}$, il est évident que $\det(M)$ est un entier, bien que le sujet demande qu'on l'admette.

Remarque : Le résultat **22)** peut être étendu à $\mathbb{Z}$. Si $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et si $p \in \mathscr{P}$ est impair, alors $a^p - a = -\big((-a)^p - (-a)\big)$ avec $-a \in \mathbb{N}$, donc p divise $a^p - a$; et pour $p = 2$, $a^2 - a = \big((-a)^2 - (-a)\big) - 2a$ donc 2 divise $a^2 - a$.

Venons-en maintenant à la preuve demandée. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à coefficients entiers.

$$\begin{array}{lllll}
\forall p \in \mathscr{P}, \quad p \,\big|\, \det(M^p) & \Longleftrightarrow & \forall p \in \mathscr{P}, \quad p \,\big|\, \det(M)^p & \Longleftrightarrow & \forall p \in \mathscr{P}, \quad p \,\Big|\, \Big(\big(\det(M)^p - \det(M)\big) + \det(M)\Big) \\
 & \overset{\textbf{22)}}{\Longleftrightarrow} & \forall p \in \mathscr{P}, \quad p \,\big|\, \det(M) & \overset{\bigstar}{\Longleftrightarrow} & \det(M) = 0 \\
 & \Longleftrightarrow & M \text{ n'est pas inversible.} & &
\end{array}$$

Pour l'équivalence $\bigstar$, il faut savoir qu'un entier non nul ne possède qu'un nombre fini de diviseurs premiers ; c'est une conséquence du théorème de décomposition en produits de facteurs premiers.

2.2 Etude d'un ensemble de matrices

24) Comme $\mathscr{A}$ contient la matrice nulle et est stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En particulier $\mathscr{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Ensuite les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathscr{A}$, et qu'elles forment une famille libre par ailleurs. Elles constituent donc une base de $\mathscr{A}$, et donc $\dim \mathscr{A} = 3$.

25) Tout d'abord $\mathscr{A}$ est stable par différence puisqu'il l'est pas combinaison linéaire. Ensuite $\mathscr{A}$ contient I_3. Enfin $\mathscr{A}$ est stable par produit et commutatif pour pour le produit puisque pour tous $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & -\gamma & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & 0 & 0 \\ 0 & b\beta - c\gamma & b\gamma + c\beta \\ 0 & -(b\gamma + c\beta) & b\beta - c\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & -\gamma & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}.$$

Tout ceci prouve que $\mathscr{A}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et donc un anneau commutatif.

26) Pour commencer, $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Sachant que $\dim \mathscr{A} = 3$, il nous suffit de prouver que (I_3, M, M^2) est libre pour prouver que c'est une base de $\mathscr{A}$. Soient donc $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda I_3 + \mu M + \nu M^2 = 0$. Alors : $\begin{cases} \lambda - 2\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ -\mu - 2\nu = 0, \end{cases}$ puis rapidement $\lambda = \mu = \nu = 0$ comme voulu.

27) On obtient ceci : $\quad M^3 = 2M - 4I_3$.

2.3 Etude d'une suite

28) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in \mathscr{A}$ puisque $\mathscr{A}$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donc M^k est de la forme indiquée. Les coefficients en présence sont mêmes uniques puisqu'ils sont les coordonnées de M^k dans la base exhibée en **24)**.

29) Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad M^{k+1} = M^k \times M = \begin{pmatrix} -2a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k - c_k & b_k + c_k \\ 0 & -(b_k + c_k) & b_k - c_k \end{pmatrix}$; du coup : $\begin{cases} a_{k+1} = -2a_k \\ b_{k+1} = b_k - c_k \\ c_{k+1} = b_k + c_k. \end{cases}$

30) La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison (-2) d'après **29)** et $a_0 = 1$, donc $a_k = (-2)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

31) Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad z_{k+1} = b_{k+1} + ic_{k+1} \overset{\mathbf{29)}}{=} (b_k - c_k) + i(b_k + c_k) = (1+i)(b_k + ic_k) = (1+i)z_k$. Ce calcul prouve que la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $(1+i)$, et comme $z_0 = 1$, $z_k = (1+i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Enfin, $b_k = \mathrm{Re}\Big((1+i)^k\Big)$ et $c_k = \mathrm{Im}\Big((1+i)^k\Big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

32) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après **29)** : $\quad b_{k+2} = b_{k+1} - c_{k+1} = b_{k+1} - (b_k + c_k) = b_{k+1} - b_k - (b_k - b_{k+1}) = 2b_{k+1} - 2b_k$, ou encore : $b_{k+2} - 2b_{k+1} + 2b_k = 0$. Ainsi $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 2$. Les racines de ce polynôme étant $(1+i)$ et $(1-i)$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $u_k = \lambda(1+i)^k + \mu(1-i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $b_0 = b_1 = 1$, donc en fait $\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$. Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad b_k = \dfrac{(1+i)^k + (1-i)^k}{2} = \dfrac{(1+i)^k + \overline{(1+i)^k}}{2} = \mathrm{Re}\Big((1+i)^k\Big)$.

33) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \mathrm{tr}\big(M^{n+3}\big) = \mathrm{tr}\big(M^n \times M^3\big) \overset{\mathbf{27)}}{=} \mathrm{tr}\Big(M^n(2M - 4I_3)\Big) = 2\mathrm{tr}\big(M^{n+1}\big) - 4\mathrm{tr}\big(M^n\big)$. Ainsi $\Big(\mathrm{tr}\big((M^n)\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour montrer que ces suites sont égales, il nous reste à prouver que leurs trois premiers termes coïncident, ce qu'on vérifie facilement : $\quad \mathrm{tr}\big(M^0\big) = \mathrm{tr}(I_3) = 3, \quad \mathrm{tr}(M) = 0 \quad$ et $\quad \mathrm{tr}\big(M^2\big) = 4$.

34) Pour commencer, 2 divise $u_2 = 4$. Fixons ensuite $p \in \mathscr{P}$ impair. Ecrivons p sous la forme $p = 2n+1$, où $n \in \mathbb{N}$.

$$u_p \overset{\mathbf{33)}}{=} \mathrm{tr}\big(M^p\big) = a_p + 2b_p \overset{\mathbf{30)}\text{ et }\mathbf{31)}}{=} (-2)^p + 2\ \mathrm{Re}\Big((1+i)^p\Big) = -2^p + 2\ \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} i^k\right]$$

$$= -2^p + 2\ \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{2k}(-1)^k + i\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{2k+1}(-1)^k\right] = -2^p + 2\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{2k}(-1)^k = -(2^p - 2) + \sum_{k=1}^{n}\binom{p}{2k}(-1)^k.$$

Or p divise $(2^p - 2)$ d'après **22)** et $\dbinom{p}{2k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ d'après **21)**, donc comme voulu p divise u_p.

2.4 Etude d'un coefficient

35) Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ de (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vaut -9 donc est non nul, donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

36) Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$ donc $\big(u^k(e_i)\big|e_i\big) = \lambda_i^k(e_i|e_i)$. Du coup pour tout $k \in \mathbb{N}$: $c(u^k) = \lambda_1^k(e_1|e_1) + \lambda_2^k(e_2|e_2) + \lambda_3^k(e_3|e_3) = 6\lambda_1^k + 5\lambda_2^k + 6\lambda_3^k$.

37) Pour tout $p \in \mathscr{P}$: $\quad 6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = c(u^p) + 6\big(\lambda_1^p - \lambda_1\big) + 5\big(\lambda_2^p - \lambda_2\big) + 6\big(\lambda_3^p - \lambda_3\big)$. Le fait que p divise $c(u^p)$ par hypothèse et la question **22)** montrent donc que p divise $6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3$ pour tout $p \in \mathscr{P}$. Or le seul entier divisible par tout nombre premier est 0 comme nous l'avons déjà remarqué en **23)**, donc $6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0$. Mais λ_1, λ et λ_3 sont positifs, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, et enfin $u = 0$.