

I Première partie

I.A -

I.A.1) $J =]-1, 1[$, dans ces conditions $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ et $\sum_{n=k}^{+\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r}$.

Pour $r \neq 1$, $\sum_{n=0}^p r^n = \frac{1-r^{p+1}}{1-r}$ et enfin, $\sum_{n=0}^p 1 = p+1$.

I.A.2) $|2^{-nH} \cos(2^n x)| \leq \left(\frac{1}{2^H}\right)^n$ qui est le terme général d'une série géométrique, positive, de raison $\frac{1}{2^H} < 1$, donc convergente.

La série indiquée est bien absolument convergente.

I.A.3) f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique car chacune des applications $x \mapsto \cos(2^n x)$ est 2π périodique.

Par ailleurs, $|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^H}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2^H}} = \frac{1}{1-2^{-H}} = M_1(H)$.

I.A.4) On a : $|t| \leq \frac{1}{2}$ donc $\ln|t| \leq -\ln 2$, ce qui donne $-\frac{\ln|t|}{\ln 2} \geq 1$ et, c'est aussi le cas pour sa partie entière, ce qui donne : $N(t) \geq 1$.

On utilise maintenant les inégalités de base de la partie entière.

$$2^{-N(t)} \geq 2^{-\left(-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}\right)} = e^{\ln|t|} = |t|,$$

$$2^{-N(t)-1} \leq 2^{-\left(-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}-1\right)-1} = 2^{-\left(-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}\right)} = e^{\ln|t|} = |t|.$$

$$\text{Enfin, } 2^{-N(t)} \leq 2^{-\left(-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}-1\right)} = 2 \times 2^{-\left(-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}\right)} = 2e^{\ln|t|} = 2|t|.$$

On a bien les quatre inégalités demandées.

I.A.5) a) $z = e^{ia} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n h^n}{n!} - 1 - ih \right) = e^{ia} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n h^n}{n!}$.

Ce qui donne, en posant $p = n - 2$ dans le calcul :

$$|z| = \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n h^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|h|^n}{n!} = h^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|h|^{n-2}}{n!} \leq h^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|h|^{n-2}}{(n-2)!} = h^2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{|h|^p}{p!} = h^2 e^{|h|}.$$

b) Tout d'abord : $|\Re(z)| \leq |z| \leq h^2 e^{|h|}$.

Par ailleurs, $z = e^{i(a+h)} - e^{ia} - ihe^{ia}$, ce qui nous donne : $\Re(z) = \cos(a+h) - \cos(a) + h \sin(a)$, il ne reste qu'à conclure : $|\cos(a+h) - \cos(a) + h \sin(a)| \leq h^2 e^{|h|}$

I.A.6) Montrons d'abord que : $e^{2^n t} \leq e$, quand $n \in \llbracket 0, N(t) - 1 \rrbracket$.

Ainsi : $2^n \leq 2^{N(t)} \leq 2^{-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}} = \frac{1}{|t|}$ ce qui entraîne l'inégalité préliminaire.

$$\begin{aligned} \left| S_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x) + t \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH} (\cos 2^n(x+t) - \cos 2^n x + 2^n t \sin 2^n x) \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH} 2^{2n} t^2 e^{2^n t} \leq t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} e \leq e t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} \end{aligned}$$

On a bien le résultat demandé.

$$\text{Maintenant, pour } H < 2, e t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} = e t^2 \frac{1 - 2^{N(t)(2-H)}}{1 - 2^{2-H}} \leq \frac{e t^2}{1 - 2^{2-H}} \leq \frac{e |t|^H}{1 - 2^{2-H}}.$$

Rappelons en effet que $|t| < 1$.

$$C_1(H) = \frac{e}{1 - 2^{2-H}} \text{ convient donc.}$$

$$\text{Pour } H = 2, e t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 1 = e t^2 N(t) \leq e t^2 \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{|t|}\right)}{\ln 2} + 1 \right) \leq e t^2 \left(2 \frac{\ln\left(\frac{1}{|t|}\right)}{\ln 2} \right).$$

Rappelons en effet cette fois ci que $|t| < \frac{1}{2}$.

$K = \frac{2e}{\ln 2}$ convient donc.

$$\begin{aligned} \text{I.A.7)} \quad |T_{N(t)}(x+t) - T_{N(t)}(x)| &= \left| \sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{-nH} (\cos 2^n(x+t) - \cos 2^n x) \right| \\ &\leq \sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{-nH} 2 \leq 2 \frac{2^{-N(t)H}}{1 - 2^{2-H}} \leq \frac{2}{1 - 2^{2-H}} (2|t|)^H = \frac{2^{H+1}}{1 - 2^{2-H}} |t|^H. \\ C_2(H) &= \frac{2^{H+1}}{1 - 2^{2-H}} \text{ convient donc.} \end{aligned}$$

I.B -

$$\text{I.B.1)} \quad |-2^{n(1-H)} \sin 2^n x| \leq 2^{n(1-H)} = (2^{1-H})^n.$$

Or $H > 1$ entraîne $|2^{1-H}| < 1$, ce qui prouve que la série converge.

$g(x)$ est donc la somme d'une série absolument convergente pour toute valeur de x .

g est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

$$\text{De plus, } |g(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (2^{1-H})^n = \frac{1}{1 - 2^{1-H}}.$$

$$M_2(H) = \frac{1}{1 - 2^{1-H}} \text{ convient donc.}$$

$$\begin{aligned} \text{I.B.2)} \quad l(t) &= \frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) \\ &= \frac{S_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x)}{t} + \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) + \frac{T_{N(t)}(x+t) - T_{N(t)}(x)}{t}. \end{aligned}$$

$$\text{Ce qui donne : } |f(t)| \leq \frac{C_1(H)|t|^H}{|t|} + \frac{C_2(H)|t|^H}{|t|} = (C_1(H) + C_2(H)) |t|^{H-1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, \text{ car } H-1 \in]0, 1].$$

$$\text{I.B.3)} \quad N(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty, \text{ donc : } \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) = -g(x).$$

Ceci implique que : $\frac{f(x+t) - f(x)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} g(x)$, et, par définition de la dérivabilité, que f est dérivable pour toute valeur de x , de dérivée $f'(x) = g(x)$.

En un mot, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = g$.

$$\text{I.B.4)} \quad \text{a) } f \text{ est paire, donc, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } b_n(f) = 0.$$

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(2^{-pH} \int_0^{2\pi} \cos(2^p x) dx \right) = 0.$$

On travaille maintenant pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(2^{-pH} \int_0^{2\pi} \cos(2^p x) \cos(nx) dx \right).$$

En transformant le produit de cosinus en somme, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(2^p x) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2^p x + nx) dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2^p x - nx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((2^p + n)x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((2^p - n)x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((2^p - n)x) dx. \end{aligned}$$

Mais ceci vaut 0 si $n \neq 2^p$ et vaut π si $n = 2^p$.

Finalement, $a_n(f) = 0$ si n n'est pas de la forme 2^p , et $a_{2^p}(f) = 2^{-pH}$.

b) La plupart des termes étant nuls, la somme partielle de la série de Fourier jusqu'au rang 2^n est :

$$S_{2^n}(f)(x) = \sum_{p=0}^n \cos(2^p x).$$

c) f est 2π périodique, définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, elle est donc partout égale à la somme de sa série de Fourier (qui converge!).

I.B.5) a) On utilise bien sûr le théorème de Parseval dont les hypothèses, plus faibles que celles du théorème de Dirichlet, sont ici vérifiées.

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

$$\text{Donc ici : } \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \pi \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-2pH} = \frac{\pi}{1 - 2^{-2H}}.$$

b) On a $f^2(t) = |f(t)| \times |f(t)| \leq M_1(H) |f(t)|$.

$$\text{Ce qui entraîne } |f(t)| \geq \frac{f^2(t)}{M_1(H)}.$$

En passant aux intégrales :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)| dt \geq \frac{1}{M_1(H)} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt \geq \frac{\pi}{M_1(H)(1 - 2^{-2H})} = \frac{\pi(1 - 2^{-H})}{(1 - 2^{-H})(1 + 2^{-H})} = \frac{\pi}{1 + 2^{-H}}.$$

I.C - Ici, $H = 2$.

I.C.1) On fait le tableau de valeurs suivant :

	$\cos(2^n\pi/4)$	$\cos(2^n3\pi/4)$	$\sin(2^n\pi/4)$	$\sin(2^n3\pi/4)$
$n = 0$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$n = 1$	0	0	1	-1
$n = 2$	-1	-1	0	0
$n \geq 3$	1	1	0	0

$$\text{D'où } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-4} + \sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-2n} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-4} + \frac{2^{-6}}{1 - 2^{-2}}.$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-4} + \sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-2n} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-4} + \frac{2^{-6}}{1 - 2^{-2}}.$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-1}.$$

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2^{-1}.$$

On peut bien sûr arranger encore un peu ces expressions.

I.C.2) a) La valeur minimale de $\varphi(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ est obtenue, en tenant compte du graphe sur la calculatrice, en $\frac{3\pi}{4}$.

$$\text{Cette valeur est donc : } \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

$$\text{b) } |g(x) + \varphi(x)| = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n} \leq \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Ce qui donne : } g(x) \leq \frac{1}{8} - \varphi(x) \leq \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2} - 1}{2} < 0 \text{ sur } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

c) f est donc continue, strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, de plus $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$.

I.C.3) f s'annule donc exactement une fois sur cet intervalle.

I.D - Ici, $H \in]0, 1[$.

I.D.1) On pose $h(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{4}$,

ce qui donne $h'(x) = \sin x - \frac{x}{2}$ et $h''(x) = \cos x - \frac{1}{2}$ qui est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ puis négative.

D'où le tableau de variation :

x	0	$\pi/3$	$\pi/2$
$h''(x)$	+	0	-
$h'(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ $1 - \pi/4 > 0$
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$

On a bien h qui est positive sur l'intervalle, ce qui donne l'inégalité demandée.

I.D.2) Notons bien qu'on va ici utiliser le fait que $0 \leq 2^n t \leq 1 < \pi/2$, dont la partie délicate a été montrée au I.A-6, et le fait que $2^{N(t)} \geq \frac{1}{2t}$, montrée au I.A-4.

$$\begin{aligned}
 S_{N(t)}(0) - S_{N(t)}(t) &= \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH} (1 - \cos(2^n t)) \geq \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH} \frac{2^{2n} t^2}{4} \geq \frac{t^2}{4} \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} \\
 &\geq \frac{t^2}{4} \times \frac{2^{N(t)(2-H)} - 1}{2^{2-H} - 1} \geq \frac{t^2}{4} \times \frac{(2^{N(t)})^{2-H} - 1}{2^{2-H} - 1} \geq \frac{t^2}{4} \times \frac{1}{2^{2-H} - 1} \left(\frac{1}{2^{2-H}} \times \frac{1}{t^{2-H}} - 1 \right) \\
 &\geq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{2-H} - 1} \times \frac{1}{2^{2-H}} (t^H - t^2 2^{2-H}).
 \end{aligned}$$

$C_3(H) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{2-H} - 1} \times \frac{1}{2^{2-H}}$ convient donc. La quantité étant positive, l'inégalité est encore vraie en valeur absolue.

I.D.3) $T_{N(t)}(0) - T_{N(t)}(t) = \sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{-nH} (1 - \cos(2^n t)) \geq 0$ par simple somme d'une série positive convergente.

I.D.4)
$$\frac{f(0) - f(t)}{t} = \frac{S_{N(t)}(0) - S_{N(t)}(t)}{t} + \frac{T_{N(t)}(0) - T_{N(t)}(t)}{t}$$

Remarquons que le premier quotient de cette somme tend vers $+\infty$ en 0^+ et que le deuxième quotient est positif.

Ce qui donne : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = -\infty$, ce qui, par définition de la dérivabilité, prouve que f n'est pas dérivable en 0.

La courbe représentative de f possède tout simplement une tangente verticale en ce point.

II Seconde partie

II.A -

II.A.1) Q étant un polynôme, f est clairement de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$. On utilisera à la question suivante le fait qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ pour les dérivées partielles croisées égales et le développement de Taylor.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \times f$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} \times f$, et comme f ne s'annule pas (c'est une exponentielle), les dérivées partielles de f et de Q s'annulent aux mêmes points.

$$\begin{aligned} \text{II.A.2)} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \times f + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 \times f, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \times f + \frac{\partial Q}{\partial x} \times \frac{\partial Q}{\partial y} \times f, \text{ et,} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \times f + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2 \times f. \end{aligned}$$

En un point où les dérivées partielles premières de Q sont nulles, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \times f, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \times f, \text{ et,} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \times f. \end{aligned}$$

On retrouve alors le même type de relation que pour les dérivées partielles premières.

II.A.3) Pour trouver les extremums locaux, on se place aux points critiques où les dérivées partielles premières sont nulles.

Remarquons aussi que $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 2a$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = b$, et enfin, $\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 2c$.

En un point critique de f ou Q , on calcule $s^2 - rt = (b^2 - 4ac) f^2(x_0, y_0)$ pour f et $s^2 - rt = (b^2 - 4ac)$ pour Q .

Ces deux quantités n'étant pas nulles et étant de même signe, les points critiques étant les mêmes, on peut toujours conclure sur l'existence d'un extremum pour f et pour Q . Si on a un extrémum pour f , on en a aussi un pour Q , et réciproquement, les extremums de f et Q sont donc situés aux mêmes points.

Comme $f(x_0, y_0) > 0$, les signes de $2af(x_0, y_0)$ et $2a$ sont les mêmes, ces extremums sont de même nature.

II.B -

II.B.1) On cherche les points critiques de Q_1 qui sont solution du système :

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3} = 0 \\ \frac{2}{3}x - 2y + \frac{11}{3} = 0 \end{cases}$$

Ce système possède une solution unique. Remarquons que : $s^2 - rt = b^2 - 4ac = \frac{4}{9} + 2 > 0$, on a alors un point col.

Il n'y a pas d'extrémums pour f_1 .

II.B.2) Pour Q_2 , $s^2 - rt = b^2 - 4ac = -\frac{2}{5} < 0$.

On aura un extrémum en chaque point critique, c'est à dire chaque point vérifiant :

$$\begin{cases} 2x - \frac{19}{10} = 0 \\ \frac{1}{5}y + \frac{1}{10} = 0 \end{cases}.$$

L'unique point critique est donc de coordonnées : $\left(\frac{19}{20}, -\frac{1}{2}\right)$. En ce point, $\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2} = 2a = 2 > 0$. C'est un minimum.

II.B.3) $Q_1(x, 2x) = -\frac{13}{6}x^2 + \frac{17}{3}x - \frac{7}{2} = Q_2(x, 2x) = \frac{7}{5}x^2 - \frac{17}{10}x + \frac{3}{10}$ est équivalent à :

$$107x^2 - 221x + 114 = 0, \text{ équation du second degré possédant deux racines : } 1 \text{ et } \frac{114}{107}.$$

On a donc exactement deux points : $(1, 2)$ et $\left(\frac{114}{107}, \frac{228}{107}\right)$ tels que $Q_1 = Q_2$.

II.C -

II.C.1) $Q_1(1, 2) = Q_2(1, 2) = 0$, donc $f_1(1, 2) = 1$, et $f_2(1, 2) = 2$, ce qui donne finalement $F(1, 2) = (1, 2)$.

II.C.2) La surface $\mathcal{S}_1$ est d'équation cartésienne $f_1(x, y) - z = 0$.

Son plan tangent en $(1, 2, 1)$ est normal au gradient de cette équation en ce point : $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$.

L'équation est donc $\frac{2}{3}(x - 1) + \frac{1}{3}(y - 2) - (z - 1) = 0$.

Après simplification, on obtient : $2x + y - 3z = 1$.

Pour $\mathcal{S}_2$ qui est d'équation cartésienne $f_2(x, y) - z = 0$.

Son plan tangent en $(1, 2, 2)$ est normal au gradient de cette équation en ce point : $\left(\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, -1\right)$.

L'équation est donc $\frac{1}{5}(x - 1) + \frac{6}{5}(y - 2) - (z - 2) = 0$.

Après simplification, on obtient : $x + 6y - 5z = 3$.

II.C.3) On a déjà calculé à la question précédente les dérivées partielles de f_1 et f_2 en $(1, 2)$.

Ceci nous donne la matrice jacobienne de F en ce point : $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$.

On calcule son polynôme caractéristique : $\lambda^2 - \frac{28}{15}\lambda + \frac{11}{15} = 0$.

Son discriminant est $\left(\frac{28}{15}\right)^2 - \frac{44}{15} = \frac{124}{225} > 0$, on a donc un polynôme caractéristique scindé à racines simples, cette matrice est diagonalisable.