

Notations et objets du problème

On désigne par \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, par \mathbb{R} le corps des nombres réels et par \mathbb{R}^+ l'ensemble des réels positifs ou nuls.

Pour tout entier naturel n et tout entier k compris entre 0 et n , on note C_n^k le coefficient binomial défini par :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

avec la convention $0! = 1$.

Si A, B sont deux ensembles, avec B inclus dans A , on note $A \setminus B$ l'ensemble :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

On rappelle que si E est un espace vectoriel réel, une famille $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in K}$ de vecteurs non nuls de E est une base si pour tout vecteur x dans E il existe une unique famille de scalaires $(x_j)_{j \in L}$, où L est une partie finie de K , telle que $x = \sum_{j \in L} x_j e_j$.

Sauf indication contraire, on désigne par a et b des réels tels que $a < b$ et par I l'intervalle fermé borné $[a, b]$.

On note $\mathcal{C}(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur I à valeurs réelles et continues.

On note \mathcal{F} l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs réelles périodiques de période 2π et continues.

Pour éviter les répétitions dans les définitions qui suivent on désigne par \mathcal{H} l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ ou \mathcal{F} et par J l'intervalle I dans le cas où \mathcal{H} est l'espace $\mathcal{C}(I)$ ou l'intervalle \mathbb{R} dans le cas où \mathcal{H} est l'espace \mathcal{F} .

Pour toute fonction f appartenant à \mathcal{H} on désigne par $|f|$ la fonction définie par :

$$\begin{aligned} |f| : J &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

L'espace \mathcal{H} est muni de la norme de la convergence uniforme définie par :

$$\forall f \in \mathcal{H}, \|f\|_\infty = \sup_{x \in J} |f(x)|.$$

On munit l'espace \mathcal{H} de la relation d'ordre partiel notée \leq et définie par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, (f \leq g) \Leftrightarrow (\forall x \in J, f(x) \leq g(x)).$$

On dit qu'une fonction f appartenant à \mathcal{H} est positive et on note $0 \leq f$, si $0 \leq f(t)$ pour tout t dans J .

On désigne par $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'espace vectoriel des endomorphismes de \mathcal{H} . Un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est aussi appelé un opérateur linéaire sur \mathcal{H} .

On dit qu'un opérateur linéaire u sur \mathcal{H} est positif s'il transforme toute fonction positive appartenant à \mathcal{H} en une fonction positive.

On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des fonctions polynomiales d'une variable à coefficients réels. Cet espace est muni de la base $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e_k(x) = x^k.$$

On note \mathcal{P} le sous-espace vectoriel de \mathcal{F} formé des polynômes trigonométriques à coefficients réels, c'est-à-dire des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de la forme :

$$x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

où n est un entier naturel, le coefficient a_0 et les coefficients a_k, b_k pour tout entier k compris entre 1 et n sont réels.

Cet espace est muni de la base $\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, c_k(x) = \cos(kx), \\ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, s_k(x) = \sin(kx). \end{cases}$$

On remarquera que $c_0 = e_0$.

Pour toute fonction f appartenant à \mathcal{F} , on désigne par $(a_k(f))_{k \geq 0}$ et $(b_k(f))_{k \geq 0}$ les coefficients de Fourier de f définis par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt,$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt.$$

On note :

$$S_0(f) = \frac{a_0(f)}{2} c_0 \quad (1)$$

et pour tout entier n strictement positif, on désigne par $S_n(f)$ le polynôme trigonométrique défini par :

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} c_0 + \sum_{k=1}^n (a_k(f) c_k + b_k(f) s_k). \quad (2)$$

La partie **I** est consacrée aux opérateurs linéaires positifs. Cette partie est utilisée par les parties **II** et **III**.

La partie **II** est consacrée au théorème suivant sur l'approximation uniforme des fonctions continues sur un intervalle fermé borné et à valeurs réelles :

Théorème 1 (Korovkin) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{C}(I)$, où I est un intervalle fermé borné de \mathbb{R} , telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I , alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

La partie **III** indépendante de la partie **II** est consacrée au théorème suivant sur l'approximation uniforme des fonctions périodiques, continues sur \mathbb{R} et à valeurs réelles :

Théorème 2 (Korovkin) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'endomorphismes positifs de \mathcal{F} telle que pour toute fonction f appartenant à $\{c_0, s_1, s_1\}$, la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} , alors pour toute fonction f appartenant à \mathcal{F} , la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

I Opérateurs linéaires positifs. Propriétés et exemples

I.1 Soit u un opérateur linéaire positif sur \mathcal{H} . Montrer que :

$$\forall f \in \mathcal{H}, |u(f)| \leq u(|f|).$$

I.2 Soit u un opérateur linéaire positif sur \mathcal{H} . Montrer que u est l'endomorphisme question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [0, 1]$ et on se donne un entier n strictement positif.

On note φ_n la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi_n(x, y) = \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n.$$

Pour tout entier k compris entre 0 et n , on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in I, B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (3)$$

et B_n est l'opérateur linéaire positif défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} \quad (4)$$

I.2.1 Pour tout réel y on désigne par f_y la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_y(x) = e^{xy}.$$

Montrer que :

$$\forall x \in I, B_n(f_y)(x) = \varphi_n(x, y).$$

I.2.2 Montrer que pour tout entier naturel j question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [0, 1]$ et on se donne un entier n strictement positif.

On note φ_n la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi_n(x, y) = \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n.$$

Pour tout entier k compris entre 0 et n , on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in I, B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (5)$$

et B_n est l'opérateur linéaire positif défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} \quad (6)$$

A. Pour tout réel y on désigne par f_y la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_y(x) = e^{xy}.$$

Montrer que :

$$\forall x \in I, B_n(f_y)(x) = \varphi_n(x, y).$$

B. Montrer que pour tout entier naturel j on a :

$$B_n(e_j)(x) = \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0).$$

C. Exprimer $B_n(e_j)$ dans la base $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ pour $j = 0, 1, 2$.

I.2.3 Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$ et on désigne par K un polynôme trigonométrique. On associe à ce polynôme l'opérateur linéaire u défini sur \mathcal{F} par :

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}, u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt.$$

A. Montrer que pour toute fonction f appartenant à \mathcal{F} on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K(x-t)dt.$$

B. Montrer que pour toute fonction f appartenant à \mathcal{F} , $u(f)$ est un polynôme trigonométrique.

C. Montrer que l'opérateur linéaire u est positif si et seulement si la fonction K est à valeurs positives ou nulles.

I.2.4 Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$, on se donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'opérateur linéaire T_n défini sur \mathcal{F} par :

$$\forall f \in \mathcal{F}, T_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f), \quad (7)$$

où S_0 désigne l'opérateur linéaire défini sur \mathcal{F} par (1) et pour tout entier naturel k non nul, S_k désigne l'opérateur linéaire défini sur \mathcal{F} par (2).

- A. Montrer que, pour tout entier naturel p strictement positif, la fonction θ_p définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ par :

$$x \mapsto \frac{\sin(px)}{\sin(x)}$$

se prolonge en une fonction continue et périodique de période 2π sur \mathbb{R} . On note encore θ_p ce prolongement.

- B. Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right). \quad (8)$$

- C. Montrer que pour toute fonction f appartenant à \mathcal{F} on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right) dt.$$

- D. Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)\right) = \sin^2\left(\frac{n}{2}x\right). \quad (9)$$

- E. Montrer que pour toute fonction f appartenant à \mathcal{F} on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t) dt,$$

où K_n est un polynôme trigonométrique.

- F. Montrer que l'opérateur linéaire T_n est positif.

- G. Calculer $S_n(c_j)$, $T_n(c_j)$ pour tout entier naturel j et $S_n(s_j)$, $T_n(s_j)$ pour tout entier naturel j non nul.

II Théorème de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$

I.3 Pour cette partie on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [a, b]$.

- I.3.1** Soit f un élément de $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall (t, x) \in I \times I, |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_{\infty}}{\eta^2} (t-x)^2. \quad (10)$$

- I.3.2** Pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{C}(I)$, pour tout entier naturel k et pour tout réel x fixé dans I , on désigne par $g - g(x)e_k$ la fonction de I dans \mathbb{R} définie par :

$$t \mapsto g(t) - g(x)t^k.$$

Soit f appartenant à $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, |f - f(x)e_0| \leq \varepsilon e_0 + 2 \frac{\|f\|_{\infty}}{\eta^2} (e_2 - 2xe_1 + x^2e_0). \quad (11)$$

I.3.3 Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$.

Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, |u(f - f(x)e_0)| \leq \varepsilon u(e_0) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (u(e_2 - 2xu(e_1) + x^2u(e_0))). \quad (12)$$

I.3.4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{C}(I)$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

A. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n = u_n(e_2) - 2e_1u_n(e_1) + e_2u_n(e_0)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I .

B. Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, h_n(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I (on peut utiliser l'inégalité (10)).

C. Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

I.3.5 Pour cette question on prend $[a, b] = [0, 1]$ et on considère la suite d'opérateurs linéaires $(B_n)_{n \geq 1}$ définie par (4).

Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

I.3.6 Pour cette question $I = [a, b]$ est à nouveau un intervalle quelconque.

Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ muni de la norme de la convergence uniforme.

I.3.7 Pour cette question on prend $I = [0, b]$ avec b réel strictement positif. Si f est une fonction continue sur I , on la prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}^+ en posant $f(x) = f(b)$ pour x supérieur ou égal à b .

A. Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ et pour tout entier naturel n strictement positif on peut définir une fonction $u_n(f)$ appartenant à $\mathcal{C}(I)$ en posant :

$$\forall x \in I, u_n(f)(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k.$$

B. Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur I .

I.3.8 Pour cette question $I = [a, b]$ est à nouveau un intervalle quelconque.

Soient $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ trois fonctions appartenant à $\mathcal{C}(I)$ pour lesquelles on peut trouver des coefficients réels a_0, a_1, a_2 non tous nuls tels que la fonction $\theta = a_0\theta_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_2$ admette au moins trois racines réelles deux à deux distinctes, x_0, x_1, x_2 dans I .

A. Montrer qu'on peut trouver trois réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ non tous nuls tels que :

$$\begin{cases} |\lambda_k| < 1 & (k = 0, 1, 2) \\ \text{au moins deux des } \lambda_k \text{ sont positifs ou nuls} \\ \lambda_0\theta_k(x_0) + \lambda_1\theta_k(x_1) + \lambda_2\theta_k(x_2) = 0 & (k = 0, 1, 2). \end{cases}$$

En modifiant si nécessaire la numérotation des racines de la fonction θ , on peut supposer que :

$$-1 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1, \lambda_1 \geq 0.$$

Pour tout entier n strictement positif, on désigne par δ_n la restriction à l'intervalle I de la fonction affine par morceaux et continue définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{aligned} x \notin \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right] &\Rightarrow \delta_n(x) = 0, \\ \delta_n(x_0) &= 1, \\ \delta_n &\text{ affine sur } \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 \right] \text{ et sur } \left[x_0, x_0 + \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

On associe à δ_n l'opérateur linéaire u_n défini sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), u_n(f) = (e_0 - \delta_n)f + ((1 + \lambda_0)f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2))\delta_n.$$

- B. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'opérateur linéaire u_n est positif.
 C. Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et 2, la suite de fonctions $(u_n(\theta_k))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers θ_k sur $[a, b]$.
 D. Montrer qu'on peut trouver une fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle que la suite $(u_n(f))_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur I .

III Théorème de Korovkin sur \mathcal{F}

I.4 Pour cette partie on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$.

I.4.1 Montrer que toute fonction f appartenant à \mathcal{F} est uniformément continue sur \mathbb{R} .

Pour tout x fixé dans \mathbb{R} , on désigne par ψ_x la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi_x(t) = \sin^2 \left(\frac{t-x}{2} \right).$$

I.4.2 Soient f appartenant à \mathcal{F} . Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0, \pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)} \psi_x(t). \quad (13)$$

Pour f appartenant à \mathcal{F} et x fixé dans \mathbb{R} , $f - f(x)c_0$ désigne la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$t \mapsto f(t) - f(x).$$

I.4.3 Soit f une fonction appartenant à \mathcal{F} . Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0, \pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f - f(x)c_0| \leq \varepsilon c_0 + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)} (c_0 - \cos(x)c_1 - \sin(x)s_1). \quad (14)$$

I.4.4 Soient u un opérateur linéaire positif sur \mathcal{F} et f une fonction appartenant à \mathcal{F} . Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0, \pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |u(f - f(x)c_0)| \leq \varepsilon u(c_0) + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)} (u(c_0) - \cos(x)u(c_1) - \sin(x)u(s_1)). \quad (15)$$

I.4.5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de \mathcal{F} telle que pour toute fonction f appartenant à $\{c_0, c_1, s_1\}$, la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

A. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n = u_n(c_0) - c_1 u_n(c_1) - s_1 u_n(s_1)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R} .

B. Montrer que, pour toute fonction f appartenant à \mathcal{F} , la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, h_n(x) = (u_n(f - f(x)c_0))(x),$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R} (on peut utiliser (13)).

C. Montrer que, pour toute fonction f appartenant à \mathcal{F} , la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

I.4.6 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à \mathcal{F} , la suite $(T_n(f))_{n \geq 1}$ définie par (5) converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .