Concours Commun Mines-Ponts 2025

Épreuve de mathématiques II, MP & MPI, quatre heures

(corrigé)

A. Propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. On a :

$$x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{x^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k = p_0(x),$$

où l'égalité $(*)$ découle du changement d'indice $k \mapsto n-k$, qui permute $[\![0,n]\!]$. D'où la première égalité. De plus, comme p est scindé, de coefficient dominant a_n et de racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, on a :

$$p = a_n \prod_{j=1}^{n} (X - \alpha_j),$$

et donc, par l'égalité ci-dessus :

$$p_0(x) = x^n \cdot a_n \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{x} - \alpha_j\right) = x^n \cdot a_n \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{x}\left(1 - \alpha_j x\right) = a_n \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \alpha_j x\right).$$

Ceci vaut pour tout $x \in \mathbf{R}^*$. Par conséquent le polynôme $p_0 - a_n \prod\limits_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X)$ admet une infinité de racines : il est nul. D'où le résultat :

$$p_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \alpha_j X\right).$$

Remarque. En particulier, p_0 est scindé sur $\mathbf{R}$ et les racines de p_0 sont les inverses des racines non nulles de p, avec les mêmes ordres de multiplicité.

2. Soit D le pgcd de p et p_0. Faisons deux observations préliminaires :

— comme p est scindé sur $\mathbf{R}$, le fait que D divise p implique que D est scindé sur $\mathbf{R}$ aussi ;

— si α est une racine stable de p, alors $\alpha^n p\left(\alpha^{-1}\right) = 0$ par définition de la stabilité, et donc $p_0(\alpha) = 0$ par la question précédente ; réciproquement, si $\alpha \neq 0$ et $p(\alpha) = p_0(\alpha) = 0$, alors α est une racine stable de p par un raisonnement similaire.

Supposons alors : $D = 1$. Alors p et p_0 n'ont pas de racine réelle en commun (sinon il existerait $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $X - \alpha$ divise p et p_0, et alors $X - \alpha$ diviserait D : absurde puisque $D = 1$). Par l'observation préliminaire ci-dessus, p n'admet pas de racine stable.

Réciproquement, supposons : $D \neq 1$. Comme D est non constant et scindé, il admet une racine $\alpha \in \mathbf{R}$. Comme $X - \alpha$ divise D, par transitivité $X - \alpha$ divise p et p_0, donc α est une racine commune de p et p_0 ; de plus α est non nul, sinon le coefficient constant de p_0, qui vaut a_n, serait nul : c'est faux par hypothèse. C'est donc une racine stable de p d'après le commentaire ci-dessus.

Ainsi $D = \mathrm{pgcd}(p, p_0)$ égale 1 si et seulement si p ne possède pas de racine stable.

Remarque. On peut généraliser cette observation : D est un polynôme unitaire dont les racines sont *exactement* les racines stables de p. C'est là un résultat général : si l'on connaît la décomposition en facteurs irréductibles de p et p_0 (et c'est le cas ici puisqu'on les a scindés), alors on obtient celle de D en prenant le minimum des valuations des facteurs irréductibles de p et p_0. On en déduit ici que si, pour toute racine α de p, on note $m(\alpha)$ son ordre de multiplicité, alors D est scindé et ses racines sont celles communes à p et p_0 ; en regardant la factorisation de p_0 de la question précédente, on observe d'ailleurs que l'ordre de multiplicité de $\alpha \in \mathbf{R}^*$ comme racine de p est égal à celui de α^{-1} comme racine de p_0. En particulier, si α est une racine stable, alors c'est une racine de p_0 d'ordre $m(\alpha^{-1})$. Donc :

$$D = \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \text{ stable}}}^{n} (X - \alpha_j)^{\min(m(\alpha_j), m(\alpha_j^{-1}))}.$$

Je pense que c'était l'approche attendue. Elle permet de traiter ensemble les deux implications.

3. Comme p n'a que des racines stables, 0 n'est pas racine de p. En particulier, $a_0 \neq 0$ et donc $p_0 = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$ a même degré que p. De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le polynôme $X - \alpha_i$ divise p_0 car α_i est racine stable de p (donc aussi racine de p_0, cf. la discussion de la question précédente). Comme les $X - \alpha_i$ sont premiers entre eux deux à deux (en effet, il est supposé dans cette question que les racines de p sont toutes simples, donc les α_i sont tous distincts), leur produit $\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$ divise p_0. Comme p et $\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$ sont associés, on en déduit que p divise p_0. Comme ils sont de même degré, ils sont proportionnels : d'où l'existence de $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $p = \lambda p_0$.

   Pour démontrer que λ est dans $\{-1, 1\}$, notons que l'application linéaire $\varphi : P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ est une symétrie de $\mathbf{R}_n[X]$, puisque :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad \varphi^2(P) = \varphi\left(X^n P\left(\frac{1}{X}\right)\right) = X^n \left(\frac{1}{X^n} P\left(\frac{1}{1/X}\right)\right) = P.$$

   On en déduit que ses valeurs propres sont dans $\{-1, 1\}$, or p est un vecteur propre de φ d'après l'égalité $p_0 = \frac{1}{\lambda} p$ (on a $\lambda \neq 0$ car $p \neq 0$) : d'où le résultat.

   Remarque. On pouvait aussi utiliser la remarque de la question précédente, et l'hypothèse sur l'ordre de multiplicité des racines de p, pour démontrer : $\operatorname{pgcd}(p, p_0) = \frac{1}{a_n} p$, et en déduire que p divise p_0.

4. On a, par la question précédente et la question 1 :

$$\frac{p'}{p} = \frac{(p_0)'}{p_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_i X - 1}.$$

   On en déduit :

$$\frac{(p')_0}{p_0} \overset{(q.\,1)}{=} \frac{X^{n-1} p'(1/X)}{X^n p(1/X)} = \frac{1}{X} \frac{p'(1/X)}{p(1/X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_i - X},$$

   et donc :

$$\frac{h}{p} = \frac{Xp'}{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X - \alpha_i + \alpha_i}{X - \alpha_i} = n - \frac{(p')_0}{p_0} \overset{(q.\,3)}{=} n - \lambda \frac{(p')_0}{p},$$

   d'où le résultat : $h = np - \lambda (p')_0$. On en déduit, en reprenant le raisonnement de la question 1 (qui vaut pour tout polynôme réciproque, on s'en est d'ailleurs servi ci-dessus pour le calcul de $(p')_0$) :

$$h_0 = X^n h\left(\frac{1}{X}\right) = nX^n p\left(\frac{1}{X}\right) - \lambda X \cdot X^{n-1} (p')_0 \left(\frac{1}{X}\right) = np_0 - \lambda X p'.$$

   La dernière égalité découle d'un calcul analogue à celui de φ^2 dans la question précédente. Comme $p = \lambda p_0$ et $\lambda \in \{-1, 1\}$, on a : $p_0 = \lambda p$, d'où le résultat : $h_0 = \lambda\,(np - Xp')$.

5. Par le théorème de Rolle, p' admet au moins une racine dans $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$: comme ces intervalles sont disjoints, cela fournit $n - 1$ racines distinctes de p' qui est de degré $n - 1$: le polynôme p' est donc scindé sur $\mathbf{R}$ (et même à racines simples).

   Démontrons que h et h_0 sont premiers entre eux. Supposons qu'il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ un diviseur irréductible de h et h_0. Par la question précédente, on a : $h_0 = \lambda(np - h)$. Par conséquent, Q

divise $h_0+\lambda h = \lambda np$, et comme $\lambda n \in \mathbf{R}^*$ on en déduit que Q divise p. Or Q divise aussi $h = Xp'$, donc par le lemme d'Euclide Q divise X ou p'. Comme p et p' n'ont pas de racine commune (en effet p est à racines simples), Q ne peut pas diviser p' (en effet, comme p est scindé, un diviseur irréductible de p est de degré 1, donc Q aussi ; la divisibilité de p et p' par Q impliquerait alors l'existence d'une racine commune). On en déduit : $Q = X$. Mais alors X divise p, donc 0 est racine de p : cela contredit le fait que toutes les racines de p sont stables.

Par l'absurde, h et h_0 n'ont pas de diviseur irréductible en commun, donc leur pgcd égale 1.

Déduisons-en que p' n'admet pas de racine stable en raisonnant par l'absurde. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tel que $p'(\alpha) = p'(\alpha^{-1}) = 0$. Comme $h = Xp'$, on en déduit que $h(\alpha) = h(\alpha^{-1}) = 0$ et donc que h admet une racine stable ; or h est scindé puisque p' l'est, donc par la question 2 l'existence d'une racine stable implique que h n'est pas premier avec h_0 : cela contredit ce qu'on vient d'établir.

Par l'absurde, p' n'admet pas de racine stable, ce qu'il fallait démontrer.

B. Liberté d'une famille de polynômes

6. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On a :

$$f_j(\alpha_i) = a_n \prod_{\ell=j+1}^{n} (1-\alpha_\ell\alpha_i) \prod_{\ell=1}^{j-1} (\alpha_i - \alpha_\ell)\,.$$

Par conséquent, s'il existe deux entiers i, k tels que : $1 \leqslant i < k \leqslant n$, et : $\alpha_i\alpha_k = 1$, alors le premier produit a un facteur nul si $k \in [\![j+1,n]\!]$ (de sorte que $\ell = k$ se réalise), c'est-à-dire si $j \leqslant k-1$, tandis que c'est le second produit qui a un facteur nul si $j \geqslant k$ (puisque dans ce cas on a $i \leqslant k-1 \leqslant j-1$, et donc $\ell = i$ se réalise). Dans tous les cas : $f_j(\alpha_i) = 0$, et donc α_i est racine de f_j.

Tous les f_j sont donc dans le noyau de la forme linéaire ev définie sur $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ par $P \mapsto P(\alpha_i)$: par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit : $\mathrm{Vect}\left((f_1,\ldots,f_n)\right) \subseteq \ker(\mathrm{ev})$. Comme le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan, on en déduit :

$$\mathrm{rang}\left((f_1,\ldots,f_n)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left((f_1,\ldots,f_n)\right)\right) \leqslant n-1,$$

donc la famille $(f_1,\ldots,f_n)$ est liée : d'où le résultat.

7. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Démontrons que si $f \in E$ alors $P_j(f) \in E$. Soit $f \in E$. Il existe $k \in \mathbf{N}$ et $g \in \mathbf{R}[X]$ tels que : $f = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)^k} g$. Notons que $\alpha_j\alpha_i$ est différent de 1 pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, sinon on aurait $\alpha_i = \alpha_j^{-1}$ et donc α_j serait une racine stable de p : absurde par hypothèse. On a en outre :

$$(1-\alpha_j X)\, f - \left(1-\alpha_j^2\right) f\left(\alpha_j\right) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)^k}\left((1-\alpha_j X)\, g - \left(1-\alpha_j^2\right) f\left(\alpha_j\right) \prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)^k\right),$$

et évaluer en α_j le polynôme au numérateur donne :

$$\left(1-\alpha_j^2\right) g(\alpha_j) - \left(1-\alpha_j^2\right) f\left(\alpha_j\right) \prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i\alpha_j)^k = (1-\alpha_j^2)\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i\alpha_j)^k \left(\frac{g(\alpha_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\alpha_i\alpha_j)^k} - f(\alpha_j)\right) = 0,$$

donc il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que : $(1-\alpha_j X)\, g - \left(1-\alpha_j^2\right) f\left(\alpha_j\right) \prod\limits_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X) = (X-\alpha_j)Q$. On en déduit :

$$P_j(f) = \frac{Q}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)^k} \in E.$$

Ainsi P_j est bien une application de E dans E, linéaire par linéarité de l'évaluation et de la multiplication par une fraction rationnelle : c'est un endomorphisme de E.
Déterminons son noyau. Soit $f \in E$ tel que : $P_j(f) = 0$. Alors :

$$(1-\alpha_j X)f = (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j) \in \mathbf{R},$$

donc : $f \in \text{Vect}\left(\frac{1}{1-\alpha_j X}\right)$. Réciproquement, $\frac{1}{1-\alpha_j X}$ est bien dans E par définition et on a :

$$P_j\left(\frac{1}{1-\alpha_j X}\right) = \frac{1-(1-\alpha_j^2)\frac{1}{1-\alpha_j^2}}{X-\alpha_j} = 0,$$

donc : $\frac{1}{1-\alpha_j X} \in \ker(P_j)$, et par stabilité du noyau par combinaison linéaire on en déduit :

$$\ker(P_j) = \text{Vect}\left(\frac{1}{1-\alpha_j X}\right).$$

8. Soient $j \in [\![1,n]\!]$ et $g \in E$. On a $\dfrac{(X-\alpha_j)\,g}{1-\alpha_j X} \in E$, et :

$$P_j\left(\frac{(X-\alpha_j)\,g}{1-\alpha_j X}\right) = (1-\alpha_j X)\,\frac{g}{1-\alpha_j X} = g.$$

9. Soit $(c_1,\dots,c_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que : $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j f_j = 0$. Divisons cette égalité par $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)$. On obtient : $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j g_j = 0$, avec par définition :

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad g_j = \frac{f_j}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)} = \frac{a_n}{1-\alpha_j X}\prod_{k=1}^{j-1}\frac{X-\alpha_k}{1-\alpha_k X}.$$

Par la question précédente, on a donc :

$$\forall j \in [\![2,n]\!], \quad P_{j-1}\circ\cdots\circ P_1(g_j) = \frac{a_n}{1-\alpha_j X},$$

et par la question 7 :

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad P_j\circ\cdots\circ P_1(g_j) = 0.$$

Par extension : $\forall k \geqslant j$, $P_k\circ\cdots\circ P_1(g_j) = 0$. Voyons comment en déduire que tous les scalaires c_j sont nuls : raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble $\{j \in [\![1,n]\!] \mid c_j \neq 0\}$ est non vide. Soit j_0 le maximum de cet ensemble. On a donc : $\sum\limits_{j=1}^{j_0} c_j g_j = 0$. On a $j_0 \geqslant 2$, parce que dans le cas contraire : $c_1 g_1 = 0$, et donc $c_1 = 0$ car $g_1 \neq 0$, ce qui contredit la définition de j_0.
Appliquons à cette relation de dépendance linéaire l'endomorphisme $P_{j_0-1}\circ\cdots\circ P_1$. D'après les calculs ci-dessus, on obtient : $c_{j_0}\frac{a_n}{1-\alpha_{j_0}X} = 0$. Comme a_n est non nul, on conclut : $c_{j_0} = 0$, ce qui contredit la définition de j_0.
Par l'absurde : $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Ceci démontre que la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre.

C. Expression de la matrice $J(p)$

10. Soit $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On a par définition : $U = E_1$, et : $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $S^\top E_i = E_{i+1}$. On en déduit aisément par récurrence :

$$\left(\left(S^\top\right)^i U\right)_{0\leqslant i\leqslant n-1} = (E_1,\dots,E_n).$$

C'est une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, d'où le résultat.

11. On a :
$$\sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\top \left(C_j^\top C_j - B_j^\top B_j\right) f_j(S) = \sum_{j=1}^{n} \left[(C_j f_j(S))^\top (C_j f_j(S)) - (B_j f_j(S))^\top (B_j f_j(S))\right].$$
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Simplifions le terme général de cette somme. Par définition de f_j et commutativité de l'algèbre $\mathbf{R}[S]$, on a :
$$B_j f_j(S) = a_n \prod_{k=j+1}^{n} (\mathrm{I}_n - \alpha_k S) \prod_{k=1}^{j} (S - \alpha_k \mathrm{I}_n), \quad \text{et :} \quad C_j f_j(S) = a_n \prod_{k=j}^{n} (\mathrm{I}_n - \alpha_k S) \prod_{k=1}^{j-1} (S - \alpha_k \mathrm{I}_n).$$
On remarque : $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $B_j f_j(S) = C_{j+1} f_{j+1}(S)$. La somme ci-dessus est donc télescopique :
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} f_j(S)^\top \left(C_j^\top C_j - B_j^\top B_j\right) f_j(S) &= \sum_{j=1}^{n-1} \left[(C_j f_j(S))^\top (C_j f_j(S)) - (C_{j+1} f_{j+1}(S))^\top (C_{j+1} f_{j+1}(S))\right] \\ &= (C_1 f_1(S))^\top (C_1 f_1(S)) - (C_n f_n(S))^\top (C_n f_n(S)) \\ &= p_0(S)^\top p_0(S) - (C_n f_n(S))^\top (C_n f_n(S)),\end{aligned}$$
où la dernière égalité découle de la question 1. D'où le résultat :
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\top \left(C_j^\top C_j - B_j^\top B_j\right) f_j(S) &= p_0(S)^\top p_0(S) - (B_n f_n(S))^\top (B_n f_n(S)) \\ &= p_0(S)^\top p_0(S) - p(S)^\top p(S) \\ &= J(p).\end{aligned}$$

12. On a :
$$\begin{aligned}C_j^\top C_j - B_j^\top B_j &= \left(\mathrm{I}_n - \alpha_j (S^\top + S) + \alpha_j^2 S^\top S\right) - \left(S^\top S - \alpha_j (S^\top + S) + \alpha_j^2 \mathrm{I}_n\right) \\ &= \left(1 - \alpha_j^2\right) \left(\mathrm{I}_n - S^\top S\right).\end{aligned}$$
Démontrons alors : $\mathrm{I}_n - S^\top S = UU^\top$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Notons $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Si $i = 1$, on a :
$$\left(\mathrm{I}_n - S^\top S\right) E_1 = E_1 - S^\top S E_1 = E_1, \quad \text{et :} \quad UU^\top E_1 = E_1(E_1^\top E_1) = E_1,$$
tandis que si $i \geqslant 2$ on a :
$$\left(\mathrm{I}_n - S^\top S\right) E_i = E_i - S^\top E_{i-1} = E_i - E_i = 0, \quad \text{et :} \quad UU^\top E_i = U(E_1^\top E_i) = 0.$$
Les colonnes de $\mathrm{I}_n - S^\top S$ et $UU^\top$ sont donc égales, ce qui permet de conclure :
$$C_j^\top C_j - B_j^\top B_j = \left(1 - \alpha_j^2\right) \left(\mathrm{I}_n - S^\top S\right) = \left(1 - \alpha_j^2\right) UU^\top.$$

13. L'identité à démontrer découle des deux questions précédentes. Plus précisément :
$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j^2) f_j(S)^\top UU^\top f_j(S) = \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j^2) V_j V_j^\top,$$
et par définition de V on a :
$$\begin{aligned}VDV^\top &= \begin{pmatrix} V_1 & \cdots & V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^\top \\ \vdots \\ V_n^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V_1 & \cdots & V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \alpha_1^2) V_1^\top \\ \vdots \\ (1 - \alpha_n^2) V_n^\top \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (1 - \alpha_j^2) V_j V_j^\top,\end{aligned}$$
d'où le résultat : $J(p) = VDV^\top$.

14. Supposons que p admet une racine stable. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que α_i et α_i^{-1} soient racines de p. Comme les racines de p sont notées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que : $\alpha_i^{-1} = \alpha_k$, soit donc $\alpha_i \alpha_k = 1$.
    Si $i = k$ alors : $\alpha_i^2 = 1$, donc la matrice diagonale D de la question précédente a au moins un coefficient diagonal nul : elle est de rang au plus $n-1$. Or :
    $$\operatorname{rang}(J(p)) \leqslant \min\Big(\operatorname{rang}(V), \operatorname{rang}(D), \operatorname{rang}(V^\top)\Big) \leqslant n-1,$$
    donc $J(p)$ n'est pas inversible si $i = k$.
    Si $i \neq k$ alors, quitte à échanger i et k, on peut supposer $i < k$, et par la question 6 la famille $(f_1, \dots, f_n)$ définie dans la partie B est liée. Si l'on évalue une relation de dépendance linéaire non triviale en $S^\top$, puis qu'on la multiplie par U, on trouve que la famille $(V_1, \dots, V_n)$ est également liée. La matrice V n'est donc pas inversible, et par le même argument que ci-dessus $J(p)$ ne l'est pas non plus.
    Dans tous les cas, si p possède une racine stable alors $J(p)$ n'est pas inversible.

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

Culture scientifique. Les trois questions qui suivent étudient la *signature* d'une forme quadratique réelle (ou, cela revient au même, celle d'une matrice symétrique réelle) et démontrent une partie du théorème d'inertie de Sylvester.

15. L'égalité $X^\top AX = (PX)^\top B(PX)$, valable pour tout vecteur colonne X, assure que l'application suivante est bien définie :
    $$\begin{cases} \{F \subseteq \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \mid F \text{ vérifie } (\mathcal{C}_A)\} & \to & \{G \subseteq \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \mid G \text{ vérifie } (\mathcal{C}_B)\} \\ F & \mapsto & P(F) \end{cases}$$
    et est bijective, la bijection réciproque étant $G \mapsto P^{-1}(G)$. De plus, l'inversibilité de P assure que la multiplication par P préserve la dimension. Donc :
    $$\max\{F \subseteq \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \mid F \text{ vérifie } (\mathcal{C}_A)\} = \max\{G \subseteq \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \mid G \text{ vérifie } (\mathcal{C}_B)\},$$
    d'où le résultat : $d(A) = d(B)$.
16. Soient $M \in \mathrm{S}_n(\mathbf{R})$ et $r = \pi(M)$. Par le théorème spectral, il existe une matrice P orthogonale d'ordre n et une matrice $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ diagonale telles que : $P^\top MP = D$. De plus, quitte à permuter les colonnes de P, on peut supposer que les r premiers coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres strictement positives de M. Posons alors :
    $$F_D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \mid x_{r+1} = \cdots = x_n = 0 \right\}.$$
    C'est un espace vectoriel de dimension r, et pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F_D$ on a :
    $$X^\top DX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0.$$
    Comme $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont strictement positifs par hypothèse, et que les x_i^2 sont positifs en tant que réels au carré, la nullité de $X^\top DX$ implique celle de $\lambda_i x_i^2$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, puis : $\forall i \in [\![1, r]\!]$,

$x_i = 0$. Par contraposée, si $X \in F_D$ est non nul, alors : $X^\top DX > 0$. Par définition de $d(D)$, on a donc : $d(D) \geqslant r = \pi(M)$.

Par la question précédente : $d(M) = d(D)$, donc : $d(M) \geqslant \pi(M)$, d'où le résultat. Un espace vectoriel F_M de dimension $\pi(M)$ vérifiant $(\mathcal{C}_M)$ est $P(F_D)$, d'après la bijection de la question précédente. Un examen attentif de la définition de P et de F_D donne plus précisément :

$$F_M = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M)\\ \lambda>0}} \ker(M - \lambda \mathrm{I}_n).$$

17. Soit $M \in \mathrm{S}_n(\mathbf{R})$. On veut démontrer : $d(M) \leqslant \pi(M)$. Par l'absurde, on suppose l'existence d'un sous-espace vectoriel G de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\dim(G) > \pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$. Par la formule de Grassmann :

$$\dim\left(F_M^\perp \cap G\right) = \dim(F_M^\perp)+\dim(G)-\dim(F_M^\perp+G) > \dim(F_M^\perp)+\pi(M)-n = \pi(M)-\dim(F_M) = 0.$$

Puisque : $\dim\left(F_M^\perp \cap G\right) > 0$, on a : $\dim\left(F_M^\perp \cap G\right) \geqslant 1$. Il existe donc un vecteur X non nul dans $F_M^\perp \cap G$. Par construction de G, on a : $X^\top MX > 0$. Déduisons-en une contradiction.

Pour cela, on note que l'endomorphisme induit par $X \mapsto MX$ sur $F_M^\perp$ (qui est stable car F_M l'est – c'est une somme de sous-espaces propres – et $X \mapsto MX$ est autoadjoint) est diagonalisable, toujours par le théorème spectral. Si $(X_1, \ldots, X_{n-r})$ est une base *orthonormée* de $F_M^\perp$ constituée de vecteurs propres de M, et si $\mu_1, \ldots, \mu_{n-r}$ sont les valeurs propres de M associées aux $X_1, \ldots, X_{n-r}$, alors, en notant $X = \sum_{i=1}^{n-r} x_i X_i$ la décomposition de X dans cette base orthonormée, on a $MX = \sum_{i=1}^{n-r} \mu_i x_i X_i$ et donc :

$$X^\top MX = \sum_{i=1}^{n-r} \mu_i x_i^2.$$

Or les vecteurs propres de M appartenant à $F_M^\perp$ sont nécessairement associés à des valeurs propres négatives ou nulles : par définition, les vecteurs propres associés à des valeurs propres strictement positives sont dans F_M, et on sait que F_M et $F_M^\perp$ sont en somme directe. On en déduit :

$$X^\top MX = \sum_{i=1}^{n-r} \mu_i x_i^2 \leqslant 0,$$

ce qui contredit l'inégalité $X^\top MX > 0$ ci-dessus.

Par l'absurde, il n'existe pas de sous-espace vectoriel G vérifiant $(\mathcal{C}_M)$ et tel que : $\dim(G) > \pi(M)$, donc : $d(M) \leqslant \pi(M)$. Par la question précédente, on a donc :

$$d(M) = \pi(M).$$

18. Supposons que $J(p)$ est inversible. Alors p ne possède aucune racine stable par la question 14. De plus, l'identité $J(p) = VDV^\top$ de la question 13 assure que V est inversible, d'inverse $DV^\top J(p)^{-1}$ (rappelons que dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, un inverse à droite est aussi un inverse à gauche). Par les questions 17 et 15 on a donc :

$$\pi(J(p)) = d(J(p)) = d(D) = \pi(D).$$

Les coefficients diagonaux de D sont les $1 - \alpha_i^2$ avec $i \in [\![1, n]\!]$, où les α_i sont les racines réelles de p. Comme $1 - \alpha_i^2$ est strictement positif si et seulement si α_i est dans $]-1, 1[$, on conclut :

$$\pi(J(p)) = \sigma(p).$$

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19. Supposons que p n'admet pas de racine stable et que $J(p)$ n'est pas inversible. Comme p n'admet pas de racine stable, en particulier 1 et -1 ne sont pas racines de p et donc les coefficients diagonaux de la matrice D de la question 13 sont non nuls. La non inversibilité de $J(p)$ entraîne donc nécessairement celle de V (sinon, V, D et $V^\top$ seraient inversibles et donc $J(p) = VDV^\top$ également). Les colonnes de V sont donc liées : il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul tel que : $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(S^\top)U = 0$.

    Or le fait que p n'ait pas de racine stable implique, par la question 9, que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre. On a donc : $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \neq 0$. Si l'on pose : $q = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$, nous avons bien un polynôme non nul de degré au plus $n-1$ tel que : $q\left(S^\top\right)U = 0$, d'où le résultat.

20. La question 10 assure que si $q \in \mathbf{R}[X]$ est de degré au plus $n-1$, alors l'égalité $q\left(S^\top\right)U = 0$ implique $q = 0$. Conjointement à la question précédente, on en déduit que si p n'admet pas de racine stable, alors $J(p)$ est inversible ; sinon nous avons une contradiction.

    La réciproque a été traitée à la question 14 (il s'agissait plus précisément de sa contraposée). On en déduit que $J(p)$ est inversible si et seulement si p n'admet aucune racine stable.

F. Un cas particulier

21. Nous avons démontré dans la question 5 que h est scindé et premier avec h_0. Par la question 2, le polynôme h n'a pas de racine stable et donc $J(h)$ est inversible par la question précédente. D'où le résultat.

22. Soit $r \in]0,1[$. Les racines de $p(rX)$ sont exactement les réels de la forme $r^{-1}\alpha_i$ avec $i \in [\![1,n]\!]$. Cela fournit n racines distinctes car les α_i le sont par hypothèse, et comme $p(rX)$ est de degré n on en déduit que $p(rX)$ est scindé (à racines simples).

    Notons $\alpha_i < \cdots < \alpha_j$ les racines de p dans $]-1,1[$, s'il en existe. On a : $\lim\limits_{r\to 1^-} (r^{-1}\alpha_i, \ldots, r^{-1}\alpha_j) = (\alpha_i, \ldots, \alpha_j) \in]-1,1[^{j-i+1}$, et comme $]-1,1[^{j-i+1}$ est un ouvert on en déduit qu'il existe $\eta_1 \in]0,1[$ tel que pour tout $r \in]1-\eta_1, 1[$, on ait : $(r^{-1}\alpha_i, \ldots, r^{-1}\alpha_j) \in]-1,1[^{j-i+1}$. On en déduit que $p(rX)$ admet au moins autant de racines que p dans $]-1,1[$ (c'est-à-dire $\sigma(p)$) pour tout $r \in]1-\eta_1, 1[$. De plus, comme $r^{-1} > 1$, on a $r^{-1}\alpha_k > r^{-1}\alpha_{j+1} > 1$ pour tout $k \geqslant j+1$, donc $p(rX)$ admet $n-j$ racines dans $]1,+\infty[$. Par le même raisonnement, $p(rX)$ admet $i-1$ racines dans $]-1,+\infty[$, donc $p(rX)$ a $n-(j-i+1) = n-\sigma(p)$ racines dans $]-1,+\infty[\cup]1,+\infty[$. Le compte est bon : $p(rX)$ a exactement $\sigma(p)$ racines dans $]-1,1[$.

    Il reste à justifier que $p(rX)$ n'admet pas de racine stable pour r suffisamment proche de 1 : supposons l'existence de $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tel que $p(r\alpha) = p(r\alpha^{-1}) = 0$. Il existe donc $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $r\alpha = \alpha_i$ et $r\alpha^{-1} = \alpha_j$. On a alors : $\alpha_i\alpha_j = r^2$, donc $\alpha_i\alpha_j$ est positif et on a : $r \in \left\{\sqrt{\alpha_i\alpha_j} \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right\}$. On en déduit réciproquement que si l'on définit $\eta_2 \in]0,1[$ par :

    $$1 - \eta_2 = \max\left\{\sqrt{\alpha_i\alpha_j} \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \alpha_i\alpha_j \in]0,1[\right\}$$

    (du moins si cet ensemble est non vide ; sinon, η_2 peut être pris arbitrairement, égal à η_1 par exemple), alors pour tout $r \in]1-\eta_2, 1[$ l'égalité $r^2 = \alpha_i\alpha_j$ est impossible, et donc $p(rX)$ n'a pas de racine stable.

    En conclusion, si l'on pose : $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$, alors pour tout $r \in]1-\eta, 1[$ le polynôme $p(rX)$ est scindé, admet exactement $\sigma(p)$ racines dans $]-1,1[$ et ne possède aucune racine stable. D'où le résultat.

23. Soit r au voisinage de 1 par valeurs inférieures. Comme le polynôme $p(rX)$ est scindé sur $\mathbf{R}$ et n'a pas de racine stable par la question précédente, par le critère de Schur-Hohn on a :

$$\pi(J(p(rX))) \overset{(q.18)}{=} \sigma(p(rX)) \overset{(q.22)}{=} \sigma(p).$$

Comme $r-1$ est négatif, les valeurs propres strictement positives de $\frac{n}{2(r-1)}J(p(rX))$ sont en bijection avec celles strictement négatives de $J(p(rX))$ (il est facile de démontrer que pour tout c non nul, les valeurs propres de $c\,J(p(rX))$ sont exactement les nombres de la forme $c\lambda$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}\left(J(p(rX))\right)$). Comme $J(p(rX))$ est inversible par les questions 20 et 22, elle n'admet pas de valeur propre nulle et a donc $n - \pi\left(J(p(rX))\right)$ valeurs propres strictement négatives. D'où :

$$\pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) = n - \pi(J(p(rX))) = n - \sigma(p),$$

d'où le résultat quand $r \to 1^-$.

24. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$. Le polynôme réciproque de $p(rX)$ vérifie :

$$p(rX)_0 \overset{(q.1)}{=} X^n p\left(\frac{r}{X}\right) = r^n\left(\frac{X}{r}\right)^n p\left(\frac{r}{X}\right) \overset{(q.1)}{=} r^n p_0\left(\frac{X}{r}\right).$$

Comme $p = \lambda p_0$ avec $\lambda \in \{-1, 1\}$, on a simplement : $p(rX)_0 = \lambda r^n p\left(\frac{X}{r}\right)$, et donc :

$$F(r) = \lambda^2 r^{2n} p\left(\frac{S}{r}\right)^\top p\left(\frac{S}{r}\right) - p(rS)^\top p(rS) = r^{2n} p\left(\frac{S}{r}\right)^\top p\left(\frac{S}{r}\right) - p(rS)^\top p(rS).$$

La dérivée de la fonction vectorielle $r \mapsto p(rS)$ est l'application $r \mapsto Sp'(rS)$ (dériver la relation $p(rS) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k r^k S^k$ et factoriser par S), donc par linéarité de la transposition, la dérivée de $r \mapsto p(rS)^\top$ est $r \mapsto (Sp'(rS))^\top$. De même, la dérivée de $r \mapsto p\left(\frac{S}{r}\right)$ est $r \mapsto -\frac{1}{r^2}Sp'\left(\frac{S}{r}\right)$. Par composition avec les applications multilinéaires $(A, B) \mapsto AB$ (sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})^2$) et $(\lambda, A, B) \mapsto \lambda AB$ (sur $\mathbf{R} \times \mathrm{M}_n(\mathbf{R})^2$), on en déduit que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que :

$$\begin{aligned} F'(r) = 2nr^{2n-1}p\left(\frac{S}{r}\right)^\top p\left(\frac{S}{r}\right) - r^{2n-2}\left(Sp'\left(\frac{S}{r}\right)\right)^\top p\left(\frac{S}{r}\right) - r^{2n-2}p\left(\frac{S}{r}\right)^\top\left(Sp'\left(\frac{S}{r}\right)\right) \\ - (Sp'(rS))^\top p(rS) - p(rS)^\top(Sp'(rS)). \end{aligned}$$

On en déduit, comme $\mathbf{R}[S]$ est une algèbre commutative :

$$\begin{aligned} F'(1) &= 2np(S)^\top p(S) - (Sp'(S))^\top p(S) - p(S)^\top(Sp'(S)) - (Sp'(S))^\top p(S) - p(S)^\top(Sp'(S)) \\ &= 2np(S)^\top p(S) - p'(S)^\top S^\top p(S) - p(S)^\top p'(S)S - p'(S)^\top S^\top p(S) - p(S)^\top p'(S)S \\ &= 2np(S)^\top p(S) - 2p'(S)^\top S^\top p(S) - 2p(S)^\top p'(S)S \\ &= 2np(S)^\top p(S) - 2S^\top p'(S)^\top p(S) - 2p(S)^\top p'(S)S, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

25. Comme F est dérivable en 1, on a :

$$F(r) = F(1) + (r-1)F'(1) + \underset{r\to 1}{o}\left(r-1\right).$$

Or l'égalité $p_0 = \lambda p$ avec $\lambda \in \{-1, 1\}$ implique :

$$F(1) = J(p) = \lambda^2 p(S)^\top p(S) - p(S)^\top p(S) = 0.$$

D'où :
$$\frac{n}{2(r-1)}F(r) = \frac{n}{2}F'(1) + \underset{r\to 1}{o}(1).$$
Il s'agit à présent de simplifier $F'(1)$ pour reconnaître $J(h)$. Comme indiqué, on va utiliser la question 4. Rappelons que $\mathbf{R}[S]$ est une algèbre commutative. On a :
$$\begin{aligned}
J(h) &= h_0(S)^\top h_0(S) - h(S)^\top h(S)\\
&= \lambda^2\left(np(S) - Sp'(S)\right)^\top \left(np(S) - Sp'(S)\right) - S^\top p'(S)^\top p'(S)S\\
&= n^2 p(S)^\top p(S) - np(S)^\top Sp'(S) - np'(S)^\top S^\top p(S) + p'(S)^\top S^\top Sp'(S) - S^\top p'(S)^\top p'(S)S\\
&= \frac{n}{2}\Big(2np(S)^\top p(S) - 2p(S)^\top Sp'(S) - 2p'(S)^\top S^\top p(S)\Big)\\
&= \frac{n}{2}F'(1),
\end{aligned}$$
d'où le résultat : $\frac{n}{2(r-1)}F(r) = J(h) + \underset{r\to 1}{o}(1)$.

26. Le résultat admis de l'énoncé implique la constance locale de l'application $M \mapsto \pi(M)$ en toute matrice symétrique réelle et *inversible*. En effet, si $M \in \mathrm{S}_n(\mathbf{R})$ est inversible, alors 0 n'appartient pas à son spectre. Son spectre, ordonné en un n-uplet décroissant, est de la forme $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n)$ avec $r = \pi(M)$ et donc $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0 > \lambda_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Par continuité (admise par l'énoncé, qui équivaut à la continuité composante par composante), il existe $\eta_M > 0$ tel que pour toute matrice N symétrique réelle vérifiant : $\|M - N\| \leqslant \eta_M$ (la norme est arbitraire), de spectre ordonné $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, on ait :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |\mu_i - \lambda_i| \leqslant \min\left(\frac{\lambda_r}{2}, -\frac{\lambda_{r+1}}{2}\right),$$
et donc : $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\mu_i \geqslant \lambda_r - \frac{\lambda_r}{2} > 0$, puis : $\forall i \in [\![r+1, n]\!]$, $\mu_i \leqslant \lambda_{r+1} - \frac{\lambda_{r+1}}{2} < 0$. Ainsi $\pi(N) = r = \pi(M)$ pour toute matrice N symétrique réelle vérifiant : $\|M - N\| \leqslant \eta_M$, démontrant ce qui fut annoncé.
On peut l'appliquer à la matrice $J(h)$, symétrique par définition et inversible par la question 21. On a donc : $\lim\limits_{r\to 1}\pi\left(J(h) + \underset{r\to 1}{o}(1)\right) = \pi(J(h)) = \sigma(Xp') = 1 + \sigma(p')$ (critère de Schur-Cohn). On en déduit par la question précédente :
$$\lim_{r\to 1}\pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) = 1 + \sigma(p').$$
Encore par le critère de Schur-Cohn, qu'on peut utiliser parce que $J(p')$ est inversible (c'est le même raisonnement qu'à la question 21), on a : $\sigma(p') = \pi(J(p'))$. Par unicité de la limite et la question 23 :
$$n - \sigma(p) = 1 + \pi\left(J\left(p'\right)\right),$$
d'où le résultat : $\sigma(p) = n - 1 - \pi\left(J\left(p'\right)\right)$.

G. Méthode générale.

27. Nous allons utiliser le critère de Schur-Cohn avec g, dont on doit vérifier qu'il n'admet pas de racine stable. Par la question 2, il suffit de démontrer que g et g_0 sont premiers entre eux. Pour cela, justifions les égalités successives :
$$p_0 = f_0 g_0 = \pm f g_0.$$

La première se justifie ainsi : si $k = \deg(f)$ et $m = \deg(g)$, alors $k + m = n$ et on a d'après la question 1 :

$$p_0 = X^n p\left(\frac{1}{X}\right) = X^{k+m} f\left(\frac{1}{X}\right) g\left(\frac{1}{X}\right) = X^k f\left(\frac{1}{X}\right) \cdot X^m g\left(\frac{1}{X}\right) = f_0 g_0.$$

Pour la seconde, on reprend l'observation en remarque de la question 2 :

$$f = \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \text{ stable}}}^{n} (X - \alpha_j)^{\min(m(\alpha_j), m(\alpha_j^{-1}))}.$$

L'application $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$ est une permutation de l'ensemble des racines stables de p (de réciproque elle-même), donc :

$$\begin{aligned}
f &= \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \text{ stable}}}^{n} \left(X - \frac{1}{\alpha_j}\right)^{\min(m(\alpha_j^{-1}), m(\alpha_j))} \\
&= \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \text{ stable}}}^{n} \frac{1}{\alpha_j^{\min(m(\alpha_j), m(\alpha_j^{-1}))}} (\alpha_j X - 1)^{\min(m(\alpha_j), m(\alpha_j^{-1}))} \\
&= \pm \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \text{ stable}}} (\alpha_j X - 1)^{\min(m(\alpha_j), m(\alpha_j^{-1}))} \\
&= \pm f_0, \qquad (q.\,1)
\end{aligned}$$

où on a simplifié le produit des $\frac{1}{\alpha_j}$ en notant qu'on peut regrouper $\frac{1}{\alpha_j}$ avec son inverse α_j, qui apparaît aussi dans le produit par définition d'une racine stable ; ceci n'est pas possible si $\frac{1}{\alpha_j} = \alpha_j$, mais dans ce cas $\alpha_j = \pm 1$: d'où le signe $\pm$ en facteur du produit.

On a achevé de justifier l'égalité $p_0 = \pm f g_0$, ce qui implique, par les propriétés générales des pgcd :

$$f \operatorname{pgcd}(g, g_0) = \operatorname{pgcd}(fg, fg_0) = \operatorname{pgcd}(p, \pm p_0) = f,$$

donc : $\operatorname{pgcd}(g, g_0) = 1$. Comme annoncé, cela démontre que $J(g)$ est inversible et que :

$$\sigma(g) = \pi(J(g)).$$

28. Posons $g_1 = \frac{f}{\operatorname{pgcd}(f,f')}$. Comme f est scindé (voir la question précédente), le polynôme g_1 est l'unique polynôme unitaire scindé *à racines simples* dont les racines sont exactement celles de f. On utilise pour cela que si α est une racine de f d'ordre de multiplicité m, alors c'est une racine de f' d'ordre de multiplicité $m - 1$, ce qui permet d'en déduire la forme factorisée de $\operatorname{pgcd}(f, f')$ puis celle de g_1.

Comme toutes les racines de f sont stables (voir encore la question précédente), il en est de même de celles de g_1. On construit alors $g_2, \ldots, g_\ell$ par récurrence, en réitérant le procédé sur $\operatorname{pgcd}(f, f')$, dont les racines sont toutes stables d'après la description des racines et des multiplicités ci-dessus.

Soient donc $g_1, \ldots, g_\ell$, dont les racines sont stables et simples, tels que : $f = g_1 g_2 \cdots g_\ell$. La fonction σ transforme produits en sommes. D'après la question 26, on a donc :

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma(g_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\deg(g_i) - 1 - \pi\left(J(g_i')\right)\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \deg(g_i) - \ell - \sum_{i=1}^{\ell} \pi\left(J(g_i')\right).$$

Alors :

$$\sigma(p) = \sigma(f) + \sigma(g) \overset{(q.\,27)}{=} \sum_{i=1}^{\ell} \deg(g_i) - \ell - \sum_{i=1}^{\ell} \pi\left(J(g_i')\right) + \pi(J(g)) = \deg(f) - \ell - \sum_{i=1}^{\ell} \pi\left(J(g_i')\right) + \pi(J(g)).$$

Comme $p = fg$, on a : $\deg(f) = \deg(p) - \deg(g)$, ce qui permet de conclure :

$$\sigma(p) = n - \ell - \deg(g) - \sum_{i=1}^{\ell} \pi\left(J(g_i')\right) + \pi(J(g)).$$