

I Questions préliminaires

I.A -

$$\text{I.A.1) } A A' = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & q_1 \\ p_{21} & p_{22} & q_2 \\ r_1 & r_2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_{11} & p'_{12} & q'_1 \\ p'_{21} & p'_{22} & q'_2 \\ r'_1 & r'_2 & s' \end{bmatrix}$$

On calcule le terme première ligne, troisième colonne : $p_{11}q'_1 + p_{12}q'_2 + q_1s'$,
et le terme deuxième ligne, troisième colonne : $p_{21}q'_1 + p_{22}q'_2 + q_2s'$.

On a donc :

$$Y = \begin{bmatrix} p_{11}q'_1 + p_{12}q'_2 + q_1s' \\ p_{21}q'_1 + p_{22}q'_2 + q_2s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}q'_1 + p_{12}q'_2 \\ p_{21}q'_1 + p_{22}q'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1s' \\ q_2s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s' \end{bmatrix}.$$

On conclut : $Y = P Q' + Q S'$.

$$\text{I.A.2) } {}^tA = \begin{bmatrix} {}^tP & {}^tR \\ {}^tQ & {}^tS \end{bmatrix}, \text{ en admettant que tout se passe « bien ».}$$

I.B -

I.B.1) Si X_1 et X_2 sont propres pour B , il en est de même pour $-X_1$ et X_2 , les valeurs propres sont les mêmes,

si X_1 et X_2 sont normés, il en est de même pour $-X_1$ et X_2 ,

si X_1 et X_2 sont orthogonaux, il en est de même pour $-X_1$ et X_2 .

En un mot, si on peut choisir une base orthonormale de vecteurs propres, on peut en plus la choisir directe sans changer la matrice diagonale semblable.

I.B.2) S , symétrique réelle est diagonalisable avec une matrice de passage N orthogonale, c'est à dire telle que $N^{-1} = {}^tN$.

On obtient donc : $S = N D {}^tN$.

On considère L obtenue en remplaçant la première colonne de N par son opposée. C'est encore une matrice orthogonale qui diagonalise S dans la même matrice D puisque les vecteurs colonnes de L sont respectivement propres pour les mêmes valeurs propres que N .

On obtient donc : $S = L D {}^tL$.

I.B.3) Clairement : $\det L = -\det N$, l'une des deux matrices est directe. Une matrice orthogonale directe en dimension 2 est une matrice de rotation, qui est de la forme : $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

$$\text{I.C } R - I = \begin{bmatrix} \cos \theta - 1 & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(R - I) = \begin{vmatrix} \cos \theta - 1 & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{vmatrix} = (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta = 2(1 - \cos \theta).$$

$$R \neq I \Rightarrow \cos \theta \neq 1 \Rightarrow \det(R - I) \neq 0 \Rightarrow R - I \text{ inversible.}$$

II Le groupe $\mathcal{G}$

II.A -

$$\text{II.A.1) } \det(M(\theta, p, q)) = \det \left(\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \det R = 1, \text{ car la matrice } M \text{ est triangulaire par blocs.}$$

II.A.2) Une matrice est orthogonale si et seulement si les vecteurs colonnes sont normés et orthogonaux deux à deux.

Les trois vecteurs colonnes sont normés, ici, si et seulement si $1 + p^2 + q^2 = 1$, ce qui équivaut à $p = q = 0$.

Dans ces conditions, les vecteurs colonnes sont orthogonaux deux à deux et la matrice est orthogonale.

La condition nécessaire et suffisante est : $p = q = 0$.

II.B -

$$\text{II.B.1)} \quad M(\theta, p, q) \cdot M(\theta', p', q') = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R' & T' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R R' & R T' + T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a bien $R R'$ qui est la matrice de rotation correspondant à $\theta + \theta'$.

Le produit des matrices est bien une loi de composition interne de $\mathcal{G}$.

II.B.2) On a besoin de 2 conditions pour que ce produit soit la matrice identité :

$$* \quad R R' = I_2 \Leftrightarrow \theta + \theta' = 0_{[2\pi]} \Leftrightarrow \theta' = -\theta_{[2\pi]}$$

$$* \quad R T' + T = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$M(\theta', p', q') \text{ est l'inverse de } M(\theta, p, q) \Leftrightarrow \left(\theta' = -\theta_{[2\pi]} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = - {}^t R \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \right)$$

II.B.3) $\mathcal{G}$ est non vide, par définition ; il est stable par produit et par passage à l'inverse. C'est donc un sous-groupe du groupe orthogonal, c'est donc un groupe pour le produit des matrices.

II.C -

$$\text{II.C.1)} \quad P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta & p \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda & q \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) ((\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta) \\ = (1 - \lambda) (\lambda^2 - 2 \lambda \cos \theta + 1)$$

II.C.2) a) On sait que $\theta \neq 0_{[2\pi]}$.

Le discriminant Δ de $\lambda^2 - 2 \lambda \cos \theta + 1$ est : $\Delta = 4 (\cos^2 \theta - 1) = -4 \sin^2 \theta$.

Si $\theta \neq \pi_{[2\pi]}$, la seule valeur propre réelle est 1, qui est simple.

Si $\theta = \pi_{[2\pi]}$, 1 est valeur propre simple et -1 est valeur propre double.

b) E_1 est toujours de dimension 1, car 1 est toujours valeur propre simple.

$$\text{On résout : } \begin{bmatrix} R - I_2 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ce qui revient à : } (R - I_2) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = -(R - I_2)^{-1} T = (I_2 - R)^{-1} T$$

II.D -

II.D.1) On a évidemment : $(x', y') = (x + p, y + q)$.

$$\text{II.D.2)} \quad \text{La formule habituelle est : } \begin{bmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}.$$

Ce qui donne :

$$x' = (x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0) + (x_0 (1 - \cos \theta_0) + y_0 \sin \theta_0),$$

$$y' = (x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0) + (-x_0 \sin \theta_0 + y_0 (1 - \cos \theta_0)).$$

$$\text{II.D.3)} \quad \text{Pour la translation, il suffit de prendre : } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour la rotation, on prendra : $M = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & x_0(1 - \cos \theta_0) + y_0 \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & -x_0 \sin \theta_0 + y_0(1 - \cos \theta_0) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ces matrices sont bien dans $\mathcal{G}$, ce sont les seules qui conviennent, mais l'énoncé ne demande pas de montrer l'unicité.

$$\text{II.D.4) a) } M(\theta, p, q) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & p \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0 + p \\ x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 + q \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Pour $\theta_0 = 0_{[2\pi]}$, P' est le translaté de P de vecteur $\vec{T}$.

Pour $\theta_0 \neq 0_{[2\pi]}$, P' est le transformé de P par une rotation d'angle θ_0 et de centre l'unique point invariant. Ce point invariant est l'unique solution du système de rang 2 :

$$\begin{cases} x_0 = x_0 \cos \theta_0 - y_0 \sin \theta_0 + p \\ y_0 = x_0 \sin \theta_0 + y_0 \cos \theta_0 + q \end{cases}$$

Dans tous les cas, c'est un déplacement.

c) On vient de voir que dans ce cas : $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + T$, c'est à dire : $V_{P_0} = R V_{P_0} + T$, ou

$$\text{encore : } (I - R) V_{P_0} = T.$$

$$\text{On a donc bien : } V_{P_0} = (I - R)^{-1} T.$$

III Le groupe $\mathcal{G}$ et les matrices symétriques

III.A Soit $Q \in \mathcal{S}$.

III.A.1) On doit montrer que : $M \in \mathcal{G} \Rightarrow {}^tMQM \in \mathcal{S}$.

Mais ${}^t({}^tMQM) = {}^tMQM$, ce qui prouve que cette matrice est bien symétrique.

III.A.2) ${}^tI = I$, donc : ${}^tQI = Q$.

Q est bien une transformée de Q .

III.A.3) N'oublions pas que M est orthogonale, c'est à dire que $M^{-1} = {}^tM$, et que M^{-1} est aussi orthogonale.

$$Q' = {}^tMQM = M^{-1}QM \Leftrightarrow Q = MQ'M^{-1} = {}^t(M^{-1})Q'M^{-1}.$$

Ce qui prouve que Q' est une transformée de Q .

III.A.4) On a : $Q' = {}^tMQM$, et : $Q'' = {}^tPQ'P$. On remplace : $Q'' = {}^tP{}^tMQMP = {}^t(MP)Q(MP)$.

Mais, MP est aussi orthogonale, donc Q'' est une transformée de Q .

III.B -

$$\text{III.B.1) } M = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tM = \begin{bmatrix} {}^tR & 0 \\ {}^tT & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Q = \begin{bmatrix} S(Q) & A \\ {}^tA & f \end{bmatrix}, \quad \text{en posant : } A = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}.$$

$$QM = \begin{bmatrix} S(Q) & A \\ {}^tA & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(Q)R & ST + A \\ {}^tAR & {}^tAT + f \end{bmatrix}.$$

$$\text{Et enfin : } {}^tMQM = \begin{bmatrix} {}^tRS(Q)R & * \\ * & * \end{bmatrix}.$$

C'est à dire : $S({}^tMQM) = {}^tRS(Q)R$.

III.B.2) $P_1(Q) = \text{Tr}(S(Q))$, la trace de $S(Q)$.

$$P_1(Q') = \text{Tr}(S(Q')) = \text{Tr}(S({}^tMQM)) = \text{Tr}({}^tRS(Q)R).$$

Mais, ${}^tR = R^{-1}$, car R est orthogonale.

$$P_1(Q') = \text{Tr}(R^{-1}S(Q)R) = \text{Tr}(S(Q)) = P_1(Q).$$

On conclut donc : $P_1(Q) = P_1(Q')$.

$$P_2(Q) = \det(S(Q)), \text{ le déterminant de } S(Q).$$

$$P_2(Q') = \det(S(Q')) = \det(S({}^tMQM)) = \det({}^tRS(Q)R).$$

Mais, ${}^tR = R^{-1}$, car R est orthogonale.

$$P_2(Q') = \det(R^{-1}S(Q)R) = \det(S(Q)) = P_2(Q).$$

On conclut donc : $P_2(Q) = P_2(Q')$.

$$\begin{aligned} \text{III.B.3)} \quad P_3(Q') &= \det(Q') = \det({}^tMQM) = \det({}^tM) \det(Q) \det(M) \\ &= \underbrace{\det(M)}_{=1} \det(Q) \underbrace{\det(M)}_{=1} = \det(Q) = P_3(Q). \end{aligned}$$

On conclut donc : $P_3(Q) = P_3(Q')$.

III.C -

III.C.1) $S(Q)$ est symétrique réelle, donc diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale, qu'on peut choisir directe, comme on l'a montré. On appelle R cette matrice.

$$\text{Alors : } {}^tRS(Q)R = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

On choisit : $M = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, avec cet R là et T quelconque et $Q' = {}^tMQM = M^{-1}QM$ vérifie :

$$S(Q') = S({}^tMQM) = {}^tRS(Q)R = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Q' est donc bien de la forme $Q(\lambda, 0, \mu, d', e', f')$.

$$\text{III.C.2)} \quad P_1(Q) = P_1(Q') = \lambda + \mu, \quad \text{et} \quad P_2(Q) = P_2(Q') = \lambda \mu.$$

$$\text{III.C.3)} \quad P_2(Q) = 0 \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \mu = 0).$$

Mais, en diagonalisant $S(Q)$, on n'avait aucune condition sur l'ordre des valeurs propres, dont l'un est nulle, on pouvait donc choisir sans contrainte la seconde nulle, c'est à dire : $\mu = 0$.

$$\text{III.D} \quad M = M(0, p, q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^tMQ'M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & d' \\ 0 & \mu & e' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & d' \\ 0 & \mu & e' \\ \lambda p + d' & \mu q + e' & d'p + e'q + f' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \lambda p + d' \\ 0 & \mu & \mu q + e' \\ \lambda p + d' & \mu q + e' & \alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On n'a ici calculé explicitement que les termes demandés et appelé le dernier « α ».

III.E Etude des différents cas

$$\text{III.E.1)} \quad P_2(Q) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 0 \text{ et } \mu \neq 0).$$

On va chercher à annuler les termes non diagonaux de Q' . C'est à dire :
$$\begin{cases} \lambda p + d' = 0 \\ \mu q + e' = 0 \end{cases}$$

On a donc : $p = \frac{-d'}{\lambda}$ et $q = \frac{-e'}{\mu}$ qui conviennent.

$$\text{Alors : } {}^tMQ'M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

$$P_3(Q) = P_3(Q') = \det(Q'), \text{ et,}$$

$$\det({}^tMQ'M) = \det({}^tM) \det(Q') \det(M) = \det(Q') \text{ car } \det(M) = 1.$$

$$\text{Ce qui donne : } P_3(Q) = \lambda \mu \alpha = \det(S(Q)) \alpha = P_2(Q) \alpha.$$

$$\text{Le troisième terme diagonal, } \alpha, \text{ est bien alors : } \frac{P_3(Q)}{P_2(Q)}.$$

III.E.2) $P_2(Q) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$, compte tenu du choix déjà fait.

a) $P_1(Q) \neq 0$ et $P_3(Q) \neq 0$.

On a donc $\lambda \neq 0$ et $\det(Q) \neq 0$.

On choisit p tel que $\lambda p + d' = 0$.

Ce qui donne :

$${}^tMQ'M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & d' \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & d'p + e'q + f' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & d'p + 2e'q + f' \end{bmatrix}$$

$$\text{Mais } P_3(Q) = \det(Q) = \det(Q') = \det({}^tMQ'M) = -\lambda e'^2 \neq 0, \text{ donc : } e' \neq 0.$$

On choisit donc q tel que $d'p + 2e'q + f' = 0$.

$$\text{Alors : } {}^tMQ'M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & 0 \end{bmatrix} = Q(\lambda, 0, 0, 0, e', 0).$$

b) $P_1(Q) \neq 0$ et $P_3(Q) = 0$.

On a donc $\lambda \neq 0$ et $\det(Q) = 0$.

On choisit p tel que $\lambda p + d' = 0$.

Ce qui donne, en reprenant le calcul précédent :

$${}^tMQ'M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & d'p + 2e'q + f' \end{bmatrix}$$

$$\text{Mais } P_3(Q) = \det(Q) = \det(Q') = \det({}^tMQ'M) = -\lambda e'^2 = 0, \text{ donc : } e' = 0.$$

$${}^tMQ'M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d'p + f' \end{bmatrix} = Q(\lambda, 0, 0, 0, 0, f''), \text{ en posant : } f'' = d'p + f'.$$

c) $P_1(Q) = 0$.

On a donc : $\lambda = \mu = 0$, $S(Q)$ est semblable à la matrice nulle et est donc nulle.

On en déduit immédiatement : $a = b = c = 0$.

IV Application aux coniques

IV.A Etude d'un exemple.

$\mathcal{H}_1$ est d'équation : $xy - y = 1$.

Sous la forme : $y = \frac{1}{x-1}$, on reconnaît une hyperbole équilatère.

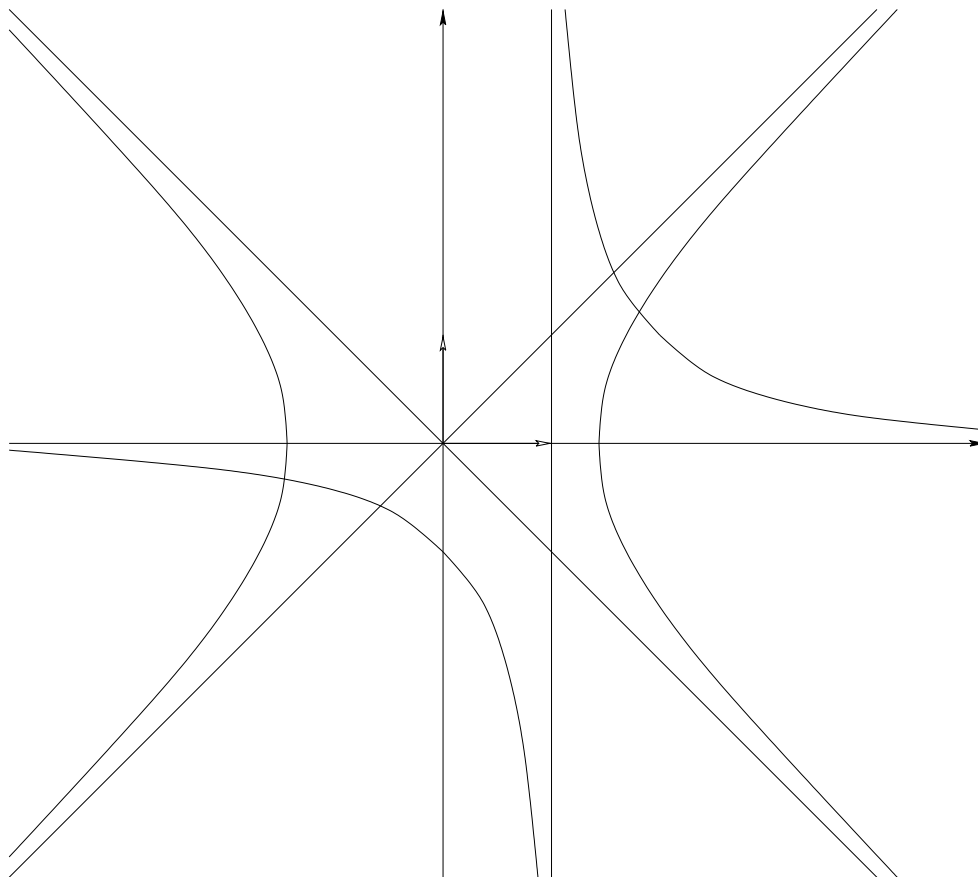
Les asymptotes sont les droites d'équations $x = 1$ et $y = 0$.

$\mathcal{H}_2$ est d'équation : $x^2 - y^2 = 2$.

Sous la forme : $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$, on reconnaît encore une hyperbole équilatère.

Les asymptotes sont les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.

Sur la figure qui suit, personne n'aura de mal à identifier les deux hyperboles.



IV.B Compte tenu de l'expression générale d'une forme quadratique, sans calculs :

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ax^2 + cy^2 + fz^2 + 2bxy + 2dxd + 2ezy.$$

En posant $z = 1$, on obtient :

$${}^tP_1QP_1 = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$

Finalement : $P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow {}^tP_1QP_1 = 0$.

IV.C -

IV.C.1) Si le point P correspond à la matrice P_1 , le point $d(P)$ correspond à la matrice MP_1 .

Ce qui donne : $d(P) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow {}^t(MP_1)Q(MP_1) = 0 \Leftrightarrow {}^tP_1{}^tMQMP_1 = 0$.

IV.C.2) $d(P) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow {}^tP_1({}^tMQM)P_1 = 0 \Leftrightarrow {}^tP_1Q'P_1 = 0 \Leftrightarrow P \in \mathcal{C}'$, avec $\mathcal{C}'$ qui correspond à la matrice $Q' = {}^tMQM$.

IV.C.3) $Q' = {}^tMQM$ est une transformée de Q puisque $M \in \mathcal{G}$.

Cette définition a été donnée à la partie III...

IV.D Selon les invariants de Q , $\mathcal{C}$ est la transformée d'une courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation

- $\lambda x^2 + \mu y^2 + \frac{P_3(Q)}{P_2(Q)} = 0$ au cas III.E.1);

- $\lambda x^2 + 2e'y = 0$ au cas III.E.1.a);
- $\lambda x^2 + f' = 0$ au cas III.E.1.b);
- $2dx + 2ey + f = 0$ au cas III.E.1.c).

IV.E $P \in \mathcal{C}_Q \Leftrightarrow {}^tP_1QP_1 = 0 \Leftrightarrow {}^tP_1(\alpha Q)P_1 = 0$ puisque $\alpha \neq 0$.

Examinons l'exemple proposé.

Pour $\mathcal{H}_1$, la matrice Q_1 peut être, en doublant tous les coefficients :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

et on peut avoir comme transformée : $Q_1'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

En effet, les valeurs propres de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sont 1 et -1 . De plus $P_3(Q) = 2$ et $P_2(Q) = -1$, on applique le cas III.E.1).

Pour $\mathcal{H}_2$, la matrice Q_2 est : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = Q_1''$.

Ces matrices Q_1 et Q_2 sont transformées l'une de l'autre.

$\mathcal{H}_1$ est bien l'image de $\mathcal{H}_2$ par un déplacement.

Mais, géométriquement, on remarque que ce déplacement est, par exemple, la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme le centre de $\mathcal{H}_2$, de coordonnées $(0,0)$, en le centre de $\mathcal{H}_1$, de coordonnées $(1,0)$, ce qui permet de déterminer le point fixe, centre de la rotation.

Ce sont tout simplement deux hyperboles équilatères dont la distance d'un sommet au centre est à chaque fois $\sqrt{2} \dots$

Pour $\mathcal{H}_1$, le centre est de coordonnées $(1,0)$, et les sommets $(0, -1)$ et $(2,1)$.

Pour $\mathcal{H}_2$, le centre est de coordonnées $(0,0)$, et les sommets $(-\sqrt{2},0)$ et $(\sqrt{2},0)$.