

**Préliminaires : Nous ajouterons aux hypothèses de l'énoncé que la fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[n_0, +\infty[$  pour assurer l'existence des intégrales.**

a)  $n_0 \leq k-1 \leq k \leq k+1$ .

$\forall t \in [k, k+1], f(t) \leq f(k)$ , donc en intégrant la fonction  $f$  et la constante  $f(k)$  sur le segment  $[k, k+1]$ , on obtient  $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$ .

De même  $\forall t \in [k-1, k], f(k) \leq f(t)$ , permet d'obtenir l'autre inégalité demandée.

b) Par la relation de Chasles,  $\sum_{k=n_0+1}^n \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)dt$  et

$\sum_{k=n_0+1}^n \int_{k-1}^k f(t)dt = \int_{n_0}^n f(t)dt$ . Il suffit donc de faire la somme des inégalités justifiées au a) pour  $k$  variant de  $n_0+1$  à  $n$ .

c) On suppose d'abord que la série converge, cette série étant à termes positifs, toutes les sommes partielles sont majorées par la somme de la série :  $\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$ .

$f$  étant positive, la fonction  $F : x \rightarrow \int_{n_0}^x f(t)dt$  est une fonction croissante sur  $[n_0, +\infty[$  :

$$\int_{n_0}^x f(t)dt \leq \int_{n_0}^{E(x)+1} f(t)dt \leq \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)dt + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

$F$  est donc une fonction croissante et majorée sur  $[n_0, +\infty[$ , elle admet donc une limite finie en  $+\infty$ , c'est-à-dire que l'intégrale converge.

Si l'on suppose que l'intégrale converge,

$$S_n = \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t)dt \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$$

La suite  $(S_n)$  est une suite réelle croissante (car  $f$  est positive) majorée, elle converge donc, ainsi la série converge.

Nous avons donc démontré que la série et l'intégrale sont de même nature.

i.e. : Si l'une converge, l'autre converge et par contraposée, si l'une diverge, l'autre diverge.

### **Première Partie**

1. a) La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et elle ne s'annule pas sur  $[e, +\infty[$ , donc par théorèmes sur les fonctions dérivables,  $f$  est dérivable sur  $[e, +\infty[$ .

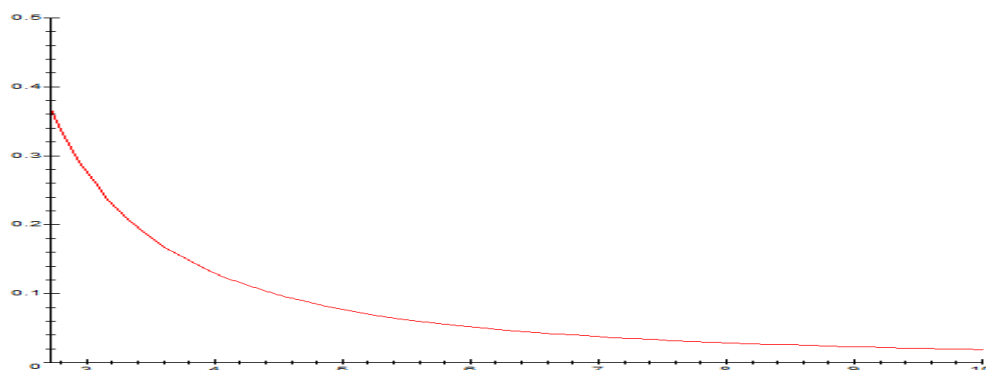
$$\forall t \in [e, +\infty[, f'(t) = -\frac{(\ln t)^2 + 2 \ln t}{t^2 (\ln t)^4} = -\frac{\ln t + 2}{t^2 (\ln t)^3}$$

b)  $\forall t \in [e, +\infty[, \ln t \geq 1 > 0$  donc  $f'(t) < 0$ .

$f$  est donc décroissante sur  $[e, +\infty[$  de limite nulle en  $+\infty$ .

$$f(e) = \frac{1}{e} \text{ et } f'(e) = -\frac{3}{e^2}.$$

c) Allure de la courbe :



d) Une primitive de  $f$  est  $t \rightarrow \frac{1}{\ln t}$  donc  $\int_e^X f(t) dt = \left[ \frac{1}{\ln t} \right]_e^X = 1 - \frac{1}{\ln X}$  tend vers 1 quand  $X$  tend vers  $+\infty$ .  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt$  est donc convergente et vaut +1.

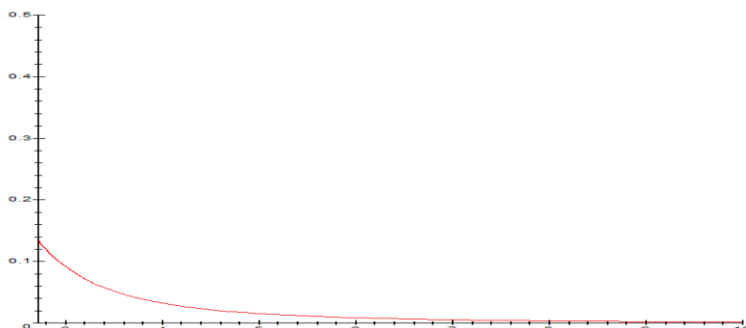
e) La fonction  $f$  vérifiant toutes les hypothèses des préliminaires, on en déduit que la série de terme général  $\frac{1}{n(\ln n)^2}$  est convergente.

2. a) La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et elle ne s'annule pas sur  $[e, +\infty[$ , donc par théorèmes sur les fonctions dérivables,  $g$  est dérivable sur  $[e, +\infty[$ .

$$\forall t \in [e, +\infty[, g'(t) = - \frac{2t \ln t (1 + \ln t)}{t^4 (\ln t)^4} = - \frac{2(1 + \ln t)}{t^3 (\ln t)^3}$$

b) La fonction  $\ln$  étant strictement positive sur  $[e, +\infty[$ ,  $\forall t \in [e, +\infty[, g'(t) < 0$ .  $g$  est donc décroissante sur  $[e, +\infty[$  et de limite nulle en  $+\infty$ .

c) Allure de la courbe :



d) Les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[e, +\infty[$  et  $f$  est intégrable sur  $[e, +\infty[$ .

$$\forall t \in [e, +\infty[, \quad 0 < \frac{1}{t^2 (\ln t)^2} \leq \frac{1}{t^2 \ln t}$$

On en déduit donc par le théorème de convergence par majoration des fonctions positives que  $g$  est intégrable sur  $[e, +\infty[$ .

e) La fonction  $g$  vérifiant toutes les hypothèses des préliminaires, on en déduit que la série de terme général  $\frac{1}{n^2 (\ln n)^2}$  est convergente.

3. a) Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $t \rightarrow \frac{\ln t}{t}$  est continue sur  $[n, n+1]$  de primitive  $\frac{1}{2} (\ln t)^2$ .

$$\text{Donc } \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2.$$

$$\text{b) } u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2} (\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2 = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt.$$

La fonction  $t \rightarrow \frac{\ln t}{t}$  étant décroissante et positive sur  $[e, +\infty[$ , on déduit des préliminaires que  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ , la suite est donc décroissante.

c) Toujours d'après les préliminaires :  $\int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \sum_{p=3}^n \frac{\ln p}{p}$

Ainsi :  $\frac{1}{2} (\ln(n+1))^2 - (\ln 3)^2 \leq \sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p} - \frac{\ln 2}{2}$

Donc  $\frac{1}{2} (\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2 - (\ln 3)^2 + \frac{\ln 2}{2} \leq u_n$ .

Comme  $\ln(n+1)^2 - (\ln n)^2 > 0$ , on obtient  $\frac{1}{2} (-(\ln 3)^2) + \frac{\ln 2}{2} \leq u_n$  ce qui est l'inégalité demandée.

d) La suite  $(u_n)$  est une suite décroissante et minorée, elle est donc convergente.

e) En utilisant que  $\frac{\ln p}{\ln n} \leq 1$  pour  $p \in [1, n]$ ,

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{u_n}{\ln n} + \frac{\ln n}{2} = \frac{1}{\ln n} \sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

Il est immédiat que la suite de terme général  $\frac{u_n}{\ln n} + \frac{\ln n}{2}$  a pour limite  $+\infty$ , donc la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

4 a) D'après les préliminaires (b) avec  $f(x) = 1/x$  et  $n_0 = 1$ , on a :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \text{ soit } \ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n).$$

Comme  $\ln(2) < 1$ , on a  $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$ .

b) On pose  $\gamma_n = H_n - \ln(n)$ .

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq 0 \text{ d'après les préliminaires (a) avec } f(x) = 1/x \text{ et } k = n.$$

D'après le 4) a),  $\gamma_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$ .

La suite  $(\gamma_n)$  est donc décroissante et minorée, donc convergente vers  $l \geq 0$ .

c)  $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + 1/n) = \frac{1}{n} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \right] - \ln(1 + 1/n) = \frac{-1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  par un développement asymptotique à l'ordre 2.

On en déduit  $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim \frac{-1}{2} \frac{1}{n^2}$ .

$\gamma_{n+1} - \gamma_n$  est donc le terme général d'une série convergente par équivalence.

$$S_n = \sum_{p=1}^{n-1} (\gamma_{p+1} - \gamma_p) = \gamma_n - \gamma_1 \rightarrow S \text{ donc } \gamma_n = \gamma_1 + S_n \rightarrow \gamma_1 + S = l$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sum_{n=2}^N \left( \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \right) &= \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{1}{k+1} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (H_{k+1} - H_k - \ln(k+1) + \ln(k)) = \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_{k+1} - \gamma_k). \end{aligned}$$

On fait tendre  $N$  vers  $+\infty$  et on trouve  $\sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \right) = l - \gamma_1$ .

$$\text{e) } R_n = S - S_n = l - \gamma_1 - (\gamma_n - \gamma_1) = l - \gamma_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \right)$$

f) On fait un développement asymptotique à l'ordre 3 de  $g(k) = \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{2k(k-1)}$ .

On trouve  $g(k) - \frac{1}{k} = \frac{-1}{6k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) = \frac{1}{k^2} h(k)$  avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} h(k) = 0$ .

Donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \left| g(k) - \frac{1}{k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{k^2}$ .

g) La série de terme général  $g(k) - \frac{1}{k}$  est donc absolument convergente par majoration.

On a la majoration de son reste d'après le f).

h)  $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}$ , donc, par télescopage,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}$ .  
 $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( -\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{2n(n-1)} \right) = \gamma_n - l - \frac{1}{2n} = H_n - \ln(n) - l - \frac{1}{2n}$ .  
D'après le g), ce terme tend vers zéro.

### Deuxième partie

- On distingue 3 cas et on note L la limite :  
Si  $\beta > 0$  ou si  $\beta = 0$ ,  $L = 0$  (calcul direct), si  $\beta < 0$ ,  $L = 0$  par croissance comparée.
- On applique la définition de la limite avec  $\varepsilon = 1$ , en s'assurant que le dénominateur ne s'annule pas (soit  $t_0 > 1$ ) et on utilise le 1).
- Clair d'après le 2.
- $t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha} \frac{1}{(\ln(t))^\beta}$  est continue et positive sur  $]t_0, +\infty[$  et est majorée par une fonction dont l'intégrale converge en  $+\infty$  car  $h+1 > 1$ .
- D'après le 3) si  $n > E(t_0) + 1$ , alors  $0 < \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{(\ln(n))^\beta} < \frac{1}{n^{h+1}}$ . Le critère de convergence des séries de Riemann assure la convergence de la série par majoration.

### Troisième partie

- Comme  $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ ,  $(v_n)$  est donc convergente vers 0.
- Vérification facile.
- On fait un développement asymptotique à l'ordre 2. On pose  $v_n = 1 - \frac{a_n}{b_n}$ .

$$a_n = \left( 1 + \frac{2}{n \ln(n)} - \frac{1}{n^2} \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n^2} \frac{1}{(\ln(n))^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \frac{1}{(\ln(n))^2}\right) \right)$$

$$\frac{1}{b_n} = \left( 1 - \frac{2}{n \ln(n)} + \frac{2}{n^2} \frac{1}{\ln(n)} + \frac{4}{n^2} \frac{1}{(\ln(n))^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \frac{1}{(\ln(n))^2}\right) \right)$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \left( 1 + \frac{1}{n^2} \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n^2} \frac{1}{(\ln(n))^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \frac{1}{(\ln(n))^2}\right) \right)$$

$$v_n - \frac{1}{n^2} \frac{1}{\ln(n)} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{(\ln(n))^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \frac{1}{(\ln(n))^2}\right) = \frac{1}{n^2} \frac{1}{(\ln(n))^2} (1 + \Phi(n)) \text{ avec}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(n) = 0$ . Ceci assure donc l'existence de b en utilisant qu'une suite convergente est bornée. On a aussi trouvé  $a = 1$ .

$$v_n = \left( v_n - \frac{1}{n^2} \frac{1}{\ln(n)} \right) + \frac{1}{n^2} \frac{1}{\ln(n)}.$$

$\left( \sum (v_n - \frac{1}{n^2} \frac{1}{\ln(n)}) \right)$  est convergente car absolument convergente par majoration (en utilisant I 2e)

$\left( \sum \frac{1}{n^2} \frac{1}{\ln(n)} \right)$  est convergente en utilisant I 1 e)

$(\sum v_n)$  est convergente par somme de 2 séries convergentes.