# Centrale-Supélec 2013

**Fonctions de plusieurs variables (épreuve I)**

---

## ■ Partie I

I.A] Comme les fonctions $f$ et $g$ sont de classe $C^1$, les fonctions $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont également de classe $C^1$ par composition de telles fonctions. Comme $\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, on a :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Par combinaisons linéaires de ces équations, on en tire aussitôt :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \cos(\theta)\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \sin(\theta)\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta).$$

On obtient évidemment des formules analogues avec les fonctions $g$ et $\tilde{g}$ et les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$ deviennent alors :

$$\cos(\theta)\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = \sin(\theta)\,\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\,\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta).$$

$$\sin(\theta)\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = -\cos(\theta)\,\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\sin(\theta)}{r}\,\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta).$$

Par combinaisons linéaires de ces équations, on en déduit :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta) \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\,\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r,\theta).$$

---

I.B] La fonction $\varphi_\alpha : t \longrightarrow t^\alpha$ satisfait l'équation $t^2 f''(t) + t f'(t) - n^2 f(t) = 0$ pour $t > 0$ si et seulement si on a $\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0$, soit $\alpha = \pm n$.
Si $n \neq 0$, le cours sur les équations différentielles linéaires du second ordre démontre que l'espace des solutions de l'équation précédente sur $\mathbb{R}_+^*$ est formé des fonctions du type :

$$y(t) = \alpha\, t^n + \beta\, t^{-n} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Si $n = 0$, l'équation équivaut à $t f''(t) + f'(t) = (t f'(t))' = 0$, d'où les solutions :

$$y(t) = \alpha \ln(t) + \beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

---

I.C] On pose maintenant pour $r > 0$ :

$$c_{n\,f}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad c_{n\,g}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Pour dériver $c_{n\,f}$, on s'assure des hypothèses du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. On remarque à cet effet que :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\tilde{f}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\right) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\,e^{-in\theta} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)\,e^{-in\theta}.$$

• cette fonction est continue par rapport à chacune de ses variables $r > 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$.

• cette fonction est dominée par une constante (qui est bien intégrable sur $[-\pi, \pi]$) sur tout domaine $\{(x = r\cos(\theta),\, y = r\sin(\theta)) \,/\, 0 < a \le r \le b,\ -\pi \le \theta \le \pi\}$ puisqu'on a alors :

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\left(\tilde{f}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\right)\right| = \frac{1}{r}\left|\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\right| \le \frac{1}{a}\max\left\{\left|\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)\right|,\ a \le r \le b,\ -\pi \le \theta \le \pi\right\}$$

(ce dernier maximum existe bien car c'est celui d'une fonction continue sur un compact).

On en déduit que $c_{n\,f}$ est de classe $C^1$ sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$\frac{\mathrm{d}c_{n\,f}}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi r}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\frac{\mathrm{d}c_{n\,f}}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{1}{2\pi r}\left[\tilde{g}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{in}{2\pi r}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Le crochet est nul par $2\pi$-périodicité de $\theta \longrightarrow \tilde{g}(r,\theta)\,e^{-in\theta}$, d'où :

$$\frac{\mathrm{d}c_{n\,f}}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{in}{2\pi r}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{in}{r}\,c_{n\,g}(r).$$

De même, on obtient $\frac{\mathrm{d}c_{n\,g}}{\mathrm{d}r}(r) = -\frac{in}{r}\,c_{n\,f}(r)$, d'où en dérivant $r\,\frac{\mathrm{d}c_{n\,f}}{\mathrm{d}r}(r) = i\,n\,c_{n\,g}(r)$ :

$$r\,\frac{d^2\,c_{n\,f}}{\mathrm{d}r^2}(r) + \frac{\mathrm{d}c_{n\,f}}{\mathrm{d}r}(r) = i\,n\,\frac{\mathrm{d}c_{n\,g}}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{n^2}{r}\,c_{n\,f}(r).$$

Il en résulte que $c_{n\,f}$ vérifie bien l'équation $r^2 f''(r) + r\,f'(r) - n^2 f(r) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$c_{n\,f}(r) = \alpha_n\,r^n + \beta_n\,r^{-n}\ (\text{si } n \ne 0) \qquad ; \qquad c_{0\,f}(r) = \alpha_0\ln(r) + \beta_0.$$

D'autre part, la fonction continue $\tilde{f}$ étant continue sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1, elle y est bornée par un réel $M$ et l'inégalité de la moyenne donne pour $0 < r \le 1$ :

$$\left|c_{n\,f}(r)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{f}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\right|\mathrm{d}\theta \le M.$$

Ainsi, $c_{n\,f}$ est bornée au voisinage de 0, ce qui implique qu'on a :

$$c_{n\,f}(r) = \alpha_n\,r^n\ (\text{si } n > 0) \qquad ; \qquad c_{n\,f}(r) = \beta_n\,r^{-n}\ (\text{si } n < 0) \qquad ; \qquad c_{0\,f}(r) = \beta_0.$$

Finalement, il existe une suite réelle $(a_n)$ telle que $c_{n\,f}(r) = a_n\,r^{|n|}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $r > 0$.

Comme $f$ est de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $\theta \longrightarrow \tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est de classe $C^1$ et $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$, et le théorème de Dirichlet assure qu'elle est somme de sa série de Fourier avec convergence normale de celle-ci :

$$\forall\, r > 0,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n\, r^{|n|}\, e^{i n\theta}.$$

---

I.D] Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$, la formule suivante montre que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ l'est aussi :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

On a justifié dans la question I.C.1 la formule suivante :

$$\frac{\mathrm{d}c_{n\,f}}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\, e^{-i n\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

L'inégalité de la moyenne montre alors que $c_{n\,f}'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Rappelons maintenant qu'on a $c_{n\,f}(r) = a_n\, r^{|n|}$, et donc $c_{n\,f}'(r) = |n|\, a_n\, r^{|n|-1}$.
Comme $c_{n\,f}'$ est bornée, on en déduit que $a_n = 0$ pour $|n| \geq 2$ et d'après I.C, il reste :

$$\forall\, r > 0,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(r,\theta) = a_0 + \left(a_1\, e^{i\theta} + a_{-1}\, e^{-i\theta}\right) \quad \text{ou} \quad a_0 + b\, r\cos(\theta) + c\, r\sin(\theta).$$

Avec cette dernière forme, on a $f(x, y) = a_0 + b\,x + c\,y$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien constantes.

---

## ■ Partie II

II.A] Si $f(x, y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f$, alors on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)\right)^2 = 4\,a\,c - b^2.$$

Ainsi, $f$ vérifie la relation (1) si et seulement si $4\,a\,c - b^2 = 1$.

---

II.B] La question peut être prise de deux façons :

- par le théorème de Cauchy-Lipschitz non linéaire appliqué à l'équation différentielle :

$$u' = -\frac{1+u^2}{2\,t\,u}$$

  sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ : pour tout couple $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, il existe une solution maximale de cette équation différentielle, définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}_+^*$.
- par résolution directe de cette équation, qui devient linéaire en posant $z = u^2$:

$$t\,z'(t) + z = (t\,z(t))' = -1.$$

  Ses solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont $z(t) = \frac{C-t}{t}$ où $C$ désigne une constante réelle.

  La condition de Cauchy donne $C = t_0\left(u_0^2 + 1\right) > 0$.

  Sur l'intervalle $]0, C[$, la fonction $z$ est strictement positive et on obtient alors :

$$u(t) = \sqrt{\frac{t_0\left(u_0^2+1\right) - t}{t}}\,.$$

---

II.C] Si $t \longrightarrow P(t) = p_n\, t^n + \ \dots\ + p_1\, t + p_0$ est une solution polynôme de degré $n$, on a :

$$P(t)\,(P(t) + 2\,t\,P'(t)) = -1.$$

Il est impossible d'avoir $n = 0$, car alors on aurait $p_0^2 = -1$.

On a donc $n \geq 1$, et l'égalité des coefficients dominants donne $(2\,n + 1)\,p_n^2 = 0$, ce qui est également impossible puisque le coefficient dominant $p_n$ est non nul.

Donc l'équation n'a pas de solution polynôme.

---

II.D] On a $\Omega(J) = \{(x,\ y) \,/\, x\,y \in J\}$ et c'est un ouvert non vide en tant qu'image réciproque de l'intervalle ouvert non vide $J$ par la fonction continue $(x,\ y) \longrightarrow x\,y$.

Comme $w$ est de classe $C^2$ sur $J$, la fonction $W : (x,\ y) \longrightarrow w(x\,y)$ est $C^2$ sur $\Omega(J)$ et on a :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,\ y) = y^2\, w''(x\,y), \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(x,\ y) = x^2\, w''(x\,y).$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}(x,\ y) = w'(x\,y) + x\,y\,w''(x\,y).$$

On en déduit que $W$ vérifie (1) sur l'ouvert $\Omega(J)$ si et seulement si on a sur cet ouvert :

$$x^2\, y^2 (w''(x\,y))^2 - (w'(x\,y) + x\,y\,w''(x\,y))^2 = -w'(x\,y)\,(w'(x\,y) + 2\,x\,y\,w''(x\,y)) = 1.$$

Ce qui équivaut (en posant $t = x\,y$) à dire que $w'$ vérifie l'équation différentielle II.1 sur $J$ :

$$w'(t)\,(w'(t) + 2\,t\,w''(t)) = -1.$$

II.D] On a $\Omega(J) = \{(x,\ y) \,/\, x\,y \in J\}$ et c'est un ouvert non vide en tant qu'image réciproque de l'intervalle ouvert non vide $J$ par la fonction continue $(x,\ y) \longrightarrow x\,y$.

Si $t \longrightarrow w(t) = \lambda\,t + \mu$ est affine, on a $W(x,\ y) = w(x\,y) = \lambda\,x\,y + \mu$ et $W \in \mathcal{P}_2$.

Inversement, supposons que $W$ (en fait sa restriction à $\Omega(J)$) soit élément de $\mathcal{P}_2$ :

$$\forall\ (x,\ y) \in \Omega(J), \quad W(x,\ y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f.$$

Pour tout $t \in J$ et tout $x > 0$, le couple $(x,\ t/x)$ appartient à $\Omega(J)$ et on a :

$$\forall\ t \in J,\ \forall\ x > 0, \quad w(t) = W\left(x,\ \frac{t}{x}\right) = a\,x^2 + b\,t + c\,\frac{t^2}{x^2} + d\,x + e\,\frac{t}{x} + f.$$

Cette fonction ne dépend que de la variable $t$ si et seulement si $a = c = d = e = 0$, et la fonction $t \longrightarrow w(t) = b\,t + f$ est alors affine.

---

II.E] Immédiat.

II.F] On sait que $w'$ vérifie (II.1) si et seulement s'il existe $C > 0$ telle que :

$$w'(t) = \sqrt{\frac{C - t}{t}} \qquad (0 < t < C).$$

Les primitives $w$ de cette fonction ne sont pas en général affines, et ce qui précède montre que les restrictions des solutions $W$ de (1) à $\Omega(]0,\ C[)$ n'appartiennent pas en général à $\mathcal{P}_2$.

En exploitant II.E, on peut translater cet ouvert $\Omega(]0,\ C[)$ afin qu'il contienne $(x_0,\ y_0) \in \mathbb{R}^2$, et les translations n'affectant évidemment pas l'appartenance de $W$ à $\mathcal{P}_2$, il en résulte que l'équation (1) possède sur cet ouvert translaté contenant $(x_0,\ y_0)$ une infinité de solutions qui ne coïncident pas avec des éléments de $\mathcal{P}_2$.

---

## Partie III

III.A] Une fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ réalise un difféomorphisme de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si c'est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $F$ et $F^{-1}$ soient $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
D'après le théorème d'inversion globale, si $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, elle réalise un difféomorphisme de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si :
- sa différentielle (ou sa jacobienne) est inversible en tout point de $\mathbb{R}^2$.
- elle est injective et $F\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$ (autrement dit bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$).

---

III.B] En posant $\varphi(t) = F(t\,q + (1-t)\,p)$, on voit que $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $[0, 1]$, d'où :

$$F(q) - F(p) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or on a par dérivation :

$$\varphi'(t) = (q_1 - p_1)\,\frac{\partial F}{\partial x}\,(t\,q + (1-t)\,p) + (q_2 - p_2)\,\frac{\partial F}{\partial y}\,(t\,q + (1-t)\,p)$$

Il en résulte que $\varphi'(t) = \mathrm{d}F_{t\,q+(1-t)\,p}(q-p)$, ce qui donne la formule voulue.

En exploitant ce résultat, il vient :

$$\langle F(q) - F(p),\, q - p\rangle = \left\langle \int_0^1 \mathrm{d}F_{t\,q+(1-t)\,p}(q-p)\,\mathrm{d}t,\, q - p\right\rangle$$

Par linéarité de l'intégrale, puis par application de l'hypothèse faite sur $\mathrm{d}F$, on en tire :

$$\ldots = \int_0^1 \left\langle \mathrm{d}F_{t\,q+(1-t)\,p}(q-p),\, q-p\right\rangle \mathrm{d}t \;\geq \alpha \int_0^1 \|q-p\|^2\,\mathrm{d}t \;=\; \alpha\,\|q-p\|^2.$$

---

III.C] Si $G(p) = \|F(p) - a\|^2$, on a (ce qui pourrait également se faire plus directement par composition des différentielles) :

$$\begin{aligned} G(p+h) - G(p) &= \|F(p+h) - a\|^2 - \|F(p) - a\|^2 \\ &= \left\|F(p) - a + \mathrm{d}F_p(h) + o(\|h\|)\right\|^2 - \|F(p) - a\|^2. \\ &= 2\left\langle F(p) - a,\, \mathrm{d}F_p(h) + o(\|h\|)\right\rangle + \left\|\mathrm{d}F_p(h) + o(\|h\|)\right\|^2 \end{aligned}$$

Il en résulte facilement que :

$$G(p+h) - G(p) = 2\left\langle F(p) - a,\, \mathrm{d}F_p(h)\right\rangle + o(\|h\|).$$

Ainsi, on a $\mathrm{d}G_p(h) = 2\left\langle F(p) - a,\, \mathrm{d}F_p(h)\right\rangle$.

Par ailleurs, on a $G(p) = \|F(p) - a\| \geq \|F(p) - F(0)\| - \|F(0) - a\| \geq \alpha\,\|p\|^2 - \|F(0) - a\|$.
Il en résulte que $G(p)$ tend vers $+\infty$ quand $\|p\|$ tend vers $+\infty$.

La fonction $G$ admet donc un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ car :
• Comme $G(p)$ tend vers $+\infty$ quand $\|p\|$ tend vers $+\infty$, il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall\, p \in \mathbb{R}^2,\;\; \|p\| > R \quad\Longrightarrow\quad G(p) > G(0).$$

• Sur la boule fermée bornée $B_f(0, R)$ qui est compacte, $G$ admet un minimum, atteint en un point $p_0$, et qui vérifie évidemment $G(p_0) \leq G(0)$ puisque 0 appartient à cette boule.
Ainsi, on a $G(p_0) \leq G(0) < G(p)$ si $\|p\| > R$.
Finalement, $G$ a un minimum global en $p_0$, en ce point, sa dfférentielle est donc nulle, et d'après la forme de cette différentielle, ceci implique :

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^2, \quad \left\langle F(p_0) - a,\, \mathrm{d}F_{p_0}(h) \right\rangle = 0.$$

Or la différentielle $\mathrm{d}F_p$ est toujours inversible car l'égalité $\mathrm{d}F_p(h) = 0$ implique l'égalité $0 = \left\langle \mathrm{d}F_p(h), h \right\rangle \geq \alpha\, \|h\|^2$, et donc $h = 0$. Ainsi, lorsque $h$ varie, $\mathrm{d}F_{p_0}(h)$ peut être n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^2$, ce qui implique $F(p_0) = a$.

---

III.D] On vient d'établir que la différentielle $\mathrm{d}F_p$ est toujours inversible et :
- $F$ est injective car $F(q) = F(p)$ implique $0 = \langle F(q) - F(p), q - p\rangle \geq \alpha\, \|p - q\|^2$ et $p = q$.
- $F$ est surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puisque, pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, il existe $p_0$ tel que $F(p_0) = a$.

D'après le théorème d'inversion globale, $F$ est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

---

## ■ Partie IV

IV.A] On pose ici :

$$F(x, y) = u(x, y), v(x, y)) = \left(x + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),\, y + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).$$

La matrice jacobienne $JF(x, y)$ vérifie donc :

$$JF(x, y) - I_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x, y) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique réelle, et elle est définie positive puisque ses valeurs propres réelles (qu'on note $\lambda_1(x, y)$ et $\lambda_2(x, y)$) vérifient :

$$\lambda_1\,\lambda_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$$

(en effet, comme $r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$, l'inégalité $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0$ implique $t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$).

On en déduit que :

$$\left\langle \mathrm{d}F_p(h), h \right\rangle = {}^t h\, JF(x, y)\, h = \|h\|^2 + {}^t h\,(JF(x, y) - I_2)\, h \geq \|h\|^2.$$

Les résultats de la partie III montrent alors que $F$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

---

IV.B] En définissant $H$ sur $\mathbb{R}^2$ par $H(x, y) = \left(x - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),\, -y + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$, l'objectif est de résoudre $G \circ F(x, y) = H(x, y)$, ce qui équivaut à poser $G = H \circ F^{-1}$.
Les fonctions $\varphi$ et $\psi$ recherchées sont donc les fonctions-composantes de $G = H \circ F^{-1}$:

$$\varphi(u(x, y), v(x, y)) = x - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad ; \quad \psi(u(x, y), v(x, y)) = -y + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Par dérivation par rapport à $x$, puis $y$, il vient :

$$(1+r)\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + s\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = +1-r.$$

$$s\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + (1+t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = -s.$$

$$(1+r)\,\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) + s\,\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) = +s.$$

$$s\,\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) + (1+t)\,\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) = -1+t.$$

Par combinaisons linéaires, on en déduit que :

$$(2+r+t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = t-r \quad ; \quad (2+r+t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = -2\,s.$$

$$(2+r+t)\,\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) = 2\,s \quad ; \quad (2+r+t)\,\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) = t-r.$$

Les fonctions $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sont bornées car on a, compte tenu de $r > 0$, $t > 0$ et $r\,t - s^2 = 1$ :

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\right| = \frac{|t-r|}{2+r+t} \leq \frac{r+t}{2+r+t} \leq 1 \quad ; \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right| = \frac{2\,|s|}{2+r+t} \leq \frac{2\sqrt{r\,t}}{2+r+t} \leq 1.$$

(l'inégalité $2\,a\,b \leq a^2 + b^2$ implique en effet $2\sqrt{r\,t} \leq r + t$).

De plus, les formules précédentes montrent que $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial v}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\partial\psi}{\partial u}$ : ces deux fonctions vérifient donc les équations de Cauchy-Riemann, et les résultats de I.D peuvent donc leur être appliqués, et ils démontrent que $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sont constantes (qu'on note $\alpha$ et $\beta$), d'où :

$$\alpha(1+r) + \beta\,s = 1-r \quad ; \quad \alpha\,s + \beta(1+t) = -s.$$

$$-\beta\,(1+r) + \alpha\,s = s \quad ; \quad -\beta\,s + \alpha(1+t) = -1+t$$

et ces systèmes à coefficients constants déterminent bien $r$, $s$, $t$ comme des constantes.

---

IV.C] Intégrons les relations suivantes, où $r$, $s$, $t$ sont donc des constantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = r \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = s \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = t.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r\,x + \varphi(y) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = t\,y + \psi(x).$$

Et compte tenu de l'expression de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, on obtient $\varphi'(y) = s$ et $\psi'(x) = s$, d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r\,x + s\,y + c \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = s\,x + t\,y + d.$$

D'où l'appartenance de $f$ à $\mathcal{P}_2$ :

$$f(x,y) = r\,\frac{x^2}{2} + s\,x\,y + t\,\frac{y^2}{2} + c\,x + d\,y + e.$$

---