

BANQUE PT, MATHS A, 2011.

 – ALGÈBRE

(Corrigé Marc REZZOUK, mrezzouk@free.fr)

1 - Partie A

1. $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

On a alors $\det(A \times A^{-1}) = \det(I_2) = 1 = \det(A) \times \det(A^{-1})$ donc $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

2. On trouve

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; A_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -3 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Supposons que A est inversible d'inverse dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$.

Alors $\det(A) \times \det(A^{-1}) = 1$ donc, les deux déterminants étant des entiers, $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Réciproquement, supposons que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Comme $\det(A) \neq 0$, A est inversible.

Par exemple en inversant un système, on trouve que

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Comme $\frac{1}{\det(A)} \in \{-1, 1\}$, on a bien $A^{-1} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$.

4. $A_4 \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$ ssi $5 - bc = 1 \Leftrightarrow bc = 4$.

Il vient $(b, c) \in \{(1, 4), (-1, -4), (4, 1), (-4, -1), (2, 2), (-2, -2)\}$.

2 - Partie B

1. **Solution n**

◦

1 : $A \times A^{p-1} = I_2$ donc A est inversible, d'inverse A^{p-1} .

Solution n

◦

2 : $\det(A^p) = (\det(A))^p = 1$ donc $\det(A) \neq 0$.

On a $(\det(A))^p = 1$ et $\det(A) \in \mathbb{Z}$ donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

2. D'après A.3), $A^{-1} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$.

D'autre part, $(A^{-1})^p = (A^p)^{-1} = I_2$ donc $A^2 \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.

3. Soit $i \in \{1, 2\}$. Soit X_i un vecteur propre associé à λ_i .

On a $A^p X_i = \lambda_i^p X_i = X_i$ donc, puisque $X_i \neq 0$, $\lambda_i^p = 1$.

En particulier $|\lambda_i| = 1$.

4. Le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé (dans $\mathbb{C}[X]$) donc A est trigonalisable et en particulier $\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2$.

5. Il vient $|\text{tr } A| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 2$. Comme $\text{tr } A \in \mathbb{Z}$, il vient $\text{tr } A \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

6. On trouve $C^2 = I_2$ et $D^3 = I_2$ donc ces matrices appartiennent à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.

7. $\chi_A = X^2 - \text{tr } A \cdot X + \det A$.

8. Comme $\text{tr } A \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $\det A \in \{-1, 1\}$, on obtient 10 polynômes caractéristiques possibles.

Parmi eux, 4 ont des racines réelles différentes de -1 ou 1 donc ne peuvent provenir d'une matrice de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.

Voici les résultats, $j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

χ_A	$x^2 - 1$	$x^2 + x - 1$	$x^2 + 1$	$x^2 + x + 1$	$x^2 - x - 1$
v.p.	$-1, 1$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$	$-i, i$	j, j^2	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$
		à rejeter			à rejeter

χ_A	$(x+1)^2$	$x^2 - 2x - 1$	$x^2 + 2x - 1$	$x^2 - x + 1$	$(x-1)^2$
v.p.	-1	$1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$	$-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}$	$-j, -j^2$	1
		à rejeter	à rejeter		

On rejette les polynômes dont certaines racines sont en module > 1 .

9. Dans les 6 cas restants,

il y a 4 cas où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc la matrice A correspondante est diagonalisable.

Il reste les cas $\chi_A = (x \pm 1)^2$.

Traisons par exemple le cas $\chi_A = (x - 1)^2$.

Si A n'est pas diagonalisable alors A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$ par trigonalisation.

Mais alors A^p est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 1 & p\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (par exemple avec la formule de binôme de Newton ou bien directement par récurrence) ce qui contredit $A^p = I_2$.

Ainsi A est diagonalisable (et en fait **égale** à I_2)

On fait exactement de même dans l'autre cas ($A = -I_2$) et finalement toutes les matrices sont diagonalisables.

On cherche alors dans chaque cas le premier entier q non nul tel que $A^q = I_2$ en raisonnant sur sa matrice diagonalisée et on obtient

χ_A	$x^2 - 1$	$x^2 + 1$	$x^2 + x + 1$	$(x+1)^2$	$x^2 - x + 1$	$(x-1)^2$
v.p.	$-1, 1$	$-i, i$	j, j^2	-1	$-j, -j^2$	1
entier $q = h(A)$	2	4	3	2	6	1

Notons également que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = I_2 \Leftrightarrow p$ multiple de $h(A)$.

10. On cherche un entier multiple des entiers q précédents et le plus petit possible, c'est le plus petit commun multiple de 1, 2, 3, 4, 6 à savoir 12.

On a pour tout $A \in \mathcal{C}_2(A)$, $A^{12} = I_2$ (et 12 est le plus petit entier possible vérifiant cette propriété).

3 - Partie C

1. Voir cours.

2. Le procédé de Gram-Schmidt permet d'obtenir à partir de la base canonique $(X^i)_{0 \leq i \leq 3}$ une base orthonormale vérifiant la première condition (avec les Vect).

L'unicité qui provient de la deuxième condition ne figure plus au programme. Montrons-là.

La vecteur π_i est un vecteur directeur unitaire de la droite, supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}_{i-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_i[X]$. Il y en a deux possibles. On sait qu'un tel vecteur a vérifie $\varphi(a, X^i) \neq 0$ (car $X^i \notin \mathbb{R}_{i-1}[X]$), le vecteur π_i est donc l'unique vecteur qui vérifie $\varphi(\pi_i, X^i) > 0$ (c'est soit a soit $-a$).

En réalité, on montre les formules de Gram-Schmidt donne directement π_i ,

$$\pi_i = \frac{1}{\|\mathbf{P}_i\|} \mathbf{P}_i \text{ avec } \mathbf{P}_i = \mathbf{X}^i - \sum_{k=0}^{i-1} \varphi(\mathbf{X}^i, \pi_k) \pi_k.$$

(en effet $\varphi(\mathbf{P}_i, \mathbf{X}^i) = \|\mathbf{X}^i\|^2 - \sum_{k=0}^{i-1} [\varphi(\mathbf{X}^i, \pi_k)]^2 = \|\mathbf{P}_i\|^2 > 0$ par Pythagore).

On trouve (il vaut mieux normaliser tout à la fin),

$$\pi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \pi_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \mathbf{X}, \pi_2 = \frac{3}{4} \sqrt{10} \left(\mathbf{X}^2 - \frac{1}{3} \right), \pi_3 = \frac{5}{4} \sqrt{14} \left(\mathbf{X}^3 - \frac{3}{5} \mathbf{X} \right).$$

3. 3.a La famille $(\pi_i)_{0 \leq i \leq 3}$ est une base de $\mathbf{E}$ donc $\mathbf{P}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\mathbf{P} = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \pi_i.$$

3.b La base précédente étant orthonormale, $\|\mathbf{P}\|^2 = \sum_{i=0}^3 \alpha_i^2$ et par hypothèse $\|\mathbf{P}\|^2 = 1$.

3.c **i.** Il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.

II. Il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(x)| &= \left| \sum_{i=0}^3 \alpha_i \pi_i(x) \right| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^3 \alpha_i^2} \sqrt{\sum_{i=0}^3 \pi_i^2(x)} \text{ d'après c.i.} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=0}^3 \pi_i^2(x)} \text{ d'après b.} \end{aligned}$$

iii. Soit $N_i = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |\pi_i(x)|$. On trouve sans difficulté (pour π_3 , on dresse un tableau de variation),

$$N_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, N_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}, N_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}, N_3 = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Il vient pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|\mathbf{P}(x)| \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}.$$

En conclusion, $\sup_{x \in [-1, 1]} |\mathbf{P}(x)| \leq 2\sqrt{2}$.