

## Corrigé de l'épreuve d'analyse

*Autour de la fonction Zeta alternée de Riemann.*

Corrigé par Mohamed TARQI

**RAPPEL :** Une série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  à terme réels est dite alternée si  $(-1)^n u_n$  a un signe constant. Quitte à multiplier le terme général par  $-1$ , on pourra supposer  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|$ .

**Théorème :** (Séries alternées) Toute série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0 est convergente.

**Remarque :** Sous les hypothèses du théorème précédent deux sommes partielles consécutives  $S_n$  et  $S_{n+1}$  encadrent la somme de la série et

$$|R_n| = |S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| \leq |u_{n+1}|$$

avec  $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ .

### I. GÉNÉRALITÉS.

1. Soit  $x$  un réel fixé, posons  $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ .

- si  $x < 0$ ,  $|f_n(x)| = e^{-x \ln n}$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini.
- si  $x = 0$ ,  $|f_n(x)| = 1$  ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Dans ces deux cas, les séries  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  et  $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$  sont toutes deux divergentes puisque leur terme général ne tend pas vers 0.

- si  $x > 0$ ,  $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et converge vers 0. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} |f_n(x)|$  est une série alternée, dont le terme général tend vers 0, il est donc convergente. Donc  $F$  est définie sur  $]0, +\infty[$

*Remarque :* La série  $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$  est une série de Riemann, donc elle est convergente si et seulement si  $x > 1$ . Ainsi, la série de fonctions de terme général  $f_n$  est simplement convergente sur  $]0, +\infty[$ , et absolument convergente sur  $]1, +\infty[$ .

2. Puisque  $t \neq -1$ , alors  $g_n(t) = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$ , donc la série de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $[0, 1[$  vers la fonction  $g$  définie par :  $\forall t \in [0, 1[, g(t) = \frac{1}{1+t}$ .

La suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de fonctions intégrables sur  $[0, 1[$  et qui converge simplement vers  $g$ , d'autre part,  $\forall t \in [0, 1[, |g_n(t)| \leq \varphi(t) = \frac{2}{1+t}$  et  $\varphi$  est intégrable sur  $[0, 1[$ , puisqu'elle est continue sur  $[0, 1[$  et prolongeable par continuité en 0, donc d'après le théorème de convergence dominée, on peut écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t},$$

relation qui s'écrit encore sous la forme

$$F(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2.$$

3. Soit  $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in ]x_1, +\infty[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé, la fonction  $x \mapsto |f_n(x)| = \frac{1}{n^x}$  est décroissante sur  $[x_1, x_2]$ , donc  $\sup_{x \in [x_1, x_2]} |f_n(x)| = \frac{1}{n^{x_1}}$ .

Par conséquent la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  est normalement convergente sur  $[x_1, x_2]$  si et seulement si  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{x_1}}$

converge, c'est-à-dire si et seulement si  $x_1 > 1$ .

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1.$$

#### 4. Dérivabilité de $F$

(a) Notons  $u_x$  cette fonction,  $u_x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et

$$\forall t > 0, u'_x(t) = \frac{1 - x \ln(t)}{t^{x+1}}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

$x$	0	$e^{\frac{1}{x}}$	$+\infty$
$u'_x$		+	0
$u_x$			-
		$-\infty$	0

Donc la suite  $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$  est décroissante à partir de  $n_0(x) = E(e^{\frac{1}{x}}) + 1$ . ( $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ ).

(b) On a  $f'_n(x) = (-1)^n u_x(n)$  qui est le terme général d'une suite alternée de limite nulle pour  $x > 0$  et décroissante à partir du rang  $E(e^{\frac{1}{x}}) + 1$ .

Soit  $a > 0$  et  $n_0 = E(e^{\frac{1}{a}}) + 1$ . Pour tout  $x \geq a$ ,  $(f'_n(x))$  vérifie les hypothèses de le critère spéciale à partir du rang  $n_0$ . On a donc

$$\forall n \geq n_0, \forall x \geq a, \left| \sum_{k \geq n} f'_k(x) \right| \leq |f'_n(x)| \leq \frac{\ln(n)}{n^a}$$

Le majorant étant de limite nulle et indépendant de  $x$ , on a montré que  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$ .

Donc d'après le théorème de régularité des sommes de séries,  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$  ( $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ), et

$$\forall x > 0, F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}.$$

#### 5. Lien avec $\zeta$

Dans  $F(x)$ , on sépare les termes d'indice pair et impair. Toutes les séries écrites étant convergentes (on passe par des sommes finies et on fait tendre la borne vers l'infini), on a

$$\forall x > 1, F(x) = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^x} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^x}$$

On ajoute à la seconde somme les termes de la première pour obtenir

$$\forall x > 1, F(x) = -2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^x} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{1 - 2^{1-x}} = 1.$$

## II. PRODUIT DE CAUCHY DE LA SÉRIE ALTERNÉE PAR ELLE-MÊME.

#### 6. Étude de la convergence

(a) Si  $x > 1$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$  est absolument convergente, donc d'après le théorème de cours, la série produit de Cauchy par elle-même est une série absolument convergente sur  $]1, +\infty[$ , de somme  $[F(x)]^2$ .

(b) On a  $c_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k)^x} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x}$ . Pour  $x > 0$ , le maximum de  $k \rightarrow [k(n-k)]^x$  est atteint en  $\frac{n}{2}$  et vaut  $\left(\frac{n}{2}\right)^{2x}$

$$|c_n(x)| \geq (n-1) \frac{1}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}.$$

Si  $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ , alors la suite  $\left(\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}\right)_{n \geq 2}$  ne tend pas vers 0, donc la série  $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$  diverge.

7. Cas où  $x = 1$ .

(a) Il est clair que :

$$\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{X} + \frac{1}{n-X} \right),$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} \\ &= (-1)^n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) \\ &= (-1)^n \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \right) \\ &= 2(-1)^n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 2(-1)^n \frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

(b) On a pour tout  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} \frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} &= \frac{1}{n} \left( H_n - \frac{1}{n} \right) - \frac{H_n}{n+1} = H_n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n^2} \\ &\geq H_1 \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} = \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n-2}{2n^2(n+1)} \geq 0, \end{aligned}$$

donc la suite  $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2}$  est décroissante.

(c) Puisque  $H_n \sim \ln n$ , alors la suite  $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2}$  tend vers 0 en décroissant, donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série  $\sum_{n \geq 2} c_n(1) = \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{H_{n-1}}{n}$  converge.

### III. CALCUL DE LA SOMME D'UNE SÉRIE À L'AIDE D'UNE ÉTUDE DE ZETA AU VOISINAGE DE 1.

8. Développement asymptotique en 1

(a) Puisque  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors :

$$F(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + o(x-1) = \ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1).$$

D'autre part, on a

$$1 - 2^h = 1 - e^{h \ln 2} = -h \ln 2 - \frac{h^2 (\ln 2)^2}{2} + o(h^2)$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$1 - 2^{1-x} = (x-1) \ln 2 - \frac{(x-1)^2 (\ln 2)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

(b) D'après ce précède, on a :

$$(x-1)\zeta(x) = \frac{(x-1)F(x)}{1-2^{1-x}} = \frac{(x-1)\ln 2 + (x-1)^2 F'(1) + o((x-1)^2)}{(x-1)\ln 2 - \frac{(x-1)^2(\ln 2)^2}{2} + o((x-1)^2)}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\zeta(x) = 1$  et par suite  $a = 1$ . D'autre part, on a :

$$\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = (x-1)\zeta(x) - 1 \over x-1 = \frac{\left[ F'(1) + \frac{(\ln 2)^2}{2} \right] (x-1)^2 + o((x-1)^2)}{(x-1)^2 \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2} (x-1)^3 + o((x-1)^3)}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}$  et par suite  $b = \frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}$ . Ainsi

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1) = \frac{1}{x-1} + \frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} + o(1).$$

### 9. Développement asymptotique en 1 (bis)

(a) Si  $x \in [1, 2]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^x}$  décroît sur  $[n, n+1]$  et on a donc

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall x \in [1, 2], \forall n \geq 1, 0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

(b) Notons  $w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$ . On a

$$w'_n(x) = -\frac{\ln(n)}{n^x} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} = u_x(n+1) - u_x(n)$$

Soit  $x \geq 1$ .  $u_x$  décroît sur  $[e^{\frac{1}{x}}, +\infty[$  et donc sur  $[e, +\infty[$  (puisque  $e^{\frac{1}{x}} \leq e$ ). On en déduit que  $w'_n$  est négative sur  $[1, +\infty[$  pour  $n \geq 3$  et donc

$$\forall n \geq 3, \forall x \geq 1, 0 \leq w_n(x) \leq w_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 1} w_n$  converge normalement sur  $[1, +\infty[$ , et il est de même de la série  $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ .

(c) Par relation de Chasles, on a

$$\sum_{k=1}^n v_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x}$$

L'intégrale se calcule immédiatement et, en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient

$$\forall x > 1, v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$$

(d) Déjà faite, voir question 9.(b).

(e) Par continuité de  $v$  en  $1^+$ , on a donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \zeta(x) + \frac{1}{1-x} \right) = v(1) = \gamma.$$

D'où

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. *Application*

On sait que d'après la question 8.(b), que  $\gamma = \frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}$ , et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} = -F'(1) = \ln 2 \left( \gamma - \frac{(\ln 2)^2}{2} \right).$$

**IV. CALCUL DES  $F(2k)$  À L'AIDE DES NOMBRES DE BERNOULLI.**

11. On a  $B_1'(X) = 1$ , donc  $B_1(X) = X + a$  avec  $a \in \mathbb{R}$ , et comme  $\int_0^1 (t + a) dt = 0$ , alors  $a = -\frac{1}{2}$ , d'où  $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ .

De même  $B_2'(x) = 2x - 1$ , donc  $B_2$  est de la forme  $X^2 - X + b$  avec  $b \in \mathbb{R}$ , et la condition  $\int_0^1 B_2(t) dt = 0$ , donne  $b = \frac{1}{6}$ , d'où  $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$ .

On trouve  $b_1 = \frac{-1}{2}$  et  $b_2 = \frac{1}{6}$ .

12. Soit  $n \geq 2$ , on a  $\int_0^1 B_{n-1} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 B_n'(t) dt = \frac{1}{n} (B_n(1) - B_n(0))$  et comme  $\int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0$ , alors  $B_n(1) - B_n(0) = 0$ .

13. *Symétrie*

Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$ , on a :

- $P_0(X) = B_0(1) = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n'(X) = -(-1)^n B_n'(1 - X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1 - X) = n P_{n-1}(X)$
- $\int_0^1 P_n(t) dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1 - X) = (-1)^n \int_1^0 B_n(u) du = 0$ .

Donc par unicité  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n = B_n$ , c'est-à-dire  $B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$ .

14. *Développement en série de fourier.*

Par définition on a :  $g_k(-x) = g_k(2\pi - x)$ , donc

$$B_{2k} \left( \frac{-x}{2\pi} \right) = B_{2k} \left( \frac{2\pi - x}{2\pi} \right) = B_{2k} \left( 1 - \frac{x}{2\pi} \right) = (-1)^{2k} B_{2k} \left( \frac{x}{2\pi} \right),$$

c'est-à-dire  $g_k(-x) = g_k(x)$ .

$g_k$  est continue sur  $[0, 2\pi[$  et comme  $B_{2k}(1) = B_{2k}(0)$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} g_k(x) = B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = g_k(2\pi),$$

donc  $g_k$  est continue sur  $[0, 2\pi]$  est comme elle est périodique,  $g_k$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $g_k$  est une fonction paire, périodique, continue et  $C^1$  par morceaux, donc la série de Fourier associée à  $g_k$  converge simplement en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}$  vers  $g_k(x)$ , c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) \cos(nx),$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_{2k} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \cos(nx) dx = 2 \int_0^1 B_{2k}(t) \cos(2\pi nt) dt.$$

Pour  $n = 0$  et  $k \geq 1$ ,  $a_0(k) = 2 \int_0^1 B_{2k}(t) dt = 0$

15. *Expression des coefficients*

(a) Par des intégrations par parties successives, on obtient :

$$\begin{aligned}
a_n(k) &= 2 \int_0^1 B_{2k}(t) \cos(2\pi nt) dt \\
&= \frac{1}{\pi n} [B_{2k} \sin(2\pi nt)]_0^1 - \frac{2k}{\pi n} \int_0^1 B_{2k-1}(t) \sin(2\pi nt) dt \\
&= \frac{-2k}{\pi n} \left[ \frac{-B_{2k-1} \sin(2\pi nt)}{2\pi n} \right]_0^1 - \frac{(2k)(2k-1)}{2(\pi n)^2} \int_0^1 B_{2k-2}(t) \cos(2\pi nt) dt \\
&= \frac{k}{(n\pi)^2} (B_{2k-1}(0) - B_{2k-1}(1)) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2\pi n)^2} a_n(k-1).
\end{aligned}$$

(b) On a  $a_n(0) = 2 \int_0^1 B_0(t) \cos(2\pi nt) dt = 2 \int_0^1 \cos(2\pi nt) dt = 0$  et d'après la dernière relation :

$$a_n(1) = \frac{1}{(n\pi)^2} (B_1(1) - B_1(0)) - \frac{2 \times 1}{(2n\pi)^2} a_n(0) = \frac{1}{(n\pi)^2},$$

puisque  $B_1(1) - B_1(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  ( $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ ).

(c) Pour  $k \geq 2$ , on a  $B_{2k-1}(1) = B_{2k-1}(0)$ , donc

$$a_n(k) = -\frac{(2k)(2k-1)}{(2\pi n)^2} a_n(k-1),$$

et par conséquent :

$$a_n(k) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k-1} (n\pi)^{2k}}.$$

## 16. Conclusion

Soit  $k \geq 1$  fixé. Pour  $x = 0$ , on obtient :

$$g_k(0) = B_{2k}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k-1} (n\pi)^{2k}},$$

relation qui s'écrit encore sous la forme :

$$b_{2k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \zeta(2k).$$

## 17. Calcul effectif des $b_n$

(a)  $B_n$  étant un polynôme de degré  $n$ , donc la formule de Taylor s'écrit :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Mais on peut vérifier par récurrence que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $B_n^{(k)}(0) = n(n-1)\dots(n-k+1)B_{n-k}(0)$ , donc on obtient

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} B_{n-k}(0) X^k = \sum_{k=0}^n \mathfrak{C}_n^k b_{n-k} X^k$$

(b) La dernière relation entraîne, en tenant compte de la condition :  $B_n(1) = B_n(0)$ ,

$$B_n(0) = \sum_{k=0}^n \mathfrak{C}_n^k b_{n-k},$$

relation qui s'écrit encore :

$$b_n = b_n + \mathfrak{C}_n^1 b_{n-1} + \dots + \mathfrak{C}_n^n b_0.$$

D'où, pour tout  $n \geq 2$  :

$$b_{n-1} = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{C}_n^k b_k,$$

ou encore

$$b_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{C}_{n+1}^k b_k.$$

Cette relation de récurrence permet de calculer de proche en proche tous les  $b_n$ .

•••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc  
E-mail : medtarqi@yahoo.fr