

Banque PT 2006 — épreuve C

Partie I

Question I.1

$$K_0 = \int_0^1 dt = 1 ; K_1 = \int_0^1 (1 - t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} ;$$
$$K_2 = \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

Question I.2

On écrit $(1 - t^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k}$ donc $K_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

On obtient bien une somme de fractions.

Question I.3

On obtient $I_0 = \frac{\pi}{2} ; I_1 = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1 ;$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

De même $J_0 = \frac{\pi}{2} ; J_1 = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1 ;$

$$J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Question I.4

Posant $t = \sin x$ (donc $dt = \cos x dx$), l'intégrale K_n devient :

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \cos x (1 - \sin^2 x)^n dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx = J_{2n+1}.$$

On peut aussi poser $t = \cos x$ (donc $dt = -\sin x dx$), et

$$K_n = - \int_{\pi/2}^0 \sin x (1 - \cos^2 x)^n dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = I_{2n+1}.$$

Remarque : le changement de variable $y = \pi/2 - x$ transforme

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = - \int_{\pi/2}^0 \sin^n(\pi/2 - y) dy = \int_0^{\pi/2} \cos^n y dy = J_n.$$

On a donc, pour tout entier n , égalité entre I_n et J_n .

Question I.5

Une intégration par parties permet de transformer I_n pour $n \geq 2$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^{n-1} x dx = \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x (n-1) \cos x \sin^{n-2} x dx$$
$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

et on en déduit que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ donc $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Question I.6

Soit $p \geq 0$, on écrit alors :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 3.1}{(2p)(2p-2) \cdots 2} I_0 = \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 3.1}{2^p p!} \frac{\pi}{2}.$$

Mais $(2p-1)(2p-3) \cdots 3.1 = \frac{(2p)!}{(2p)(2p-2) \cdots 2} = \frac{(2p)!}{2^p p!}$ donc $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$.

De même, on écrit

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2) \cdots 2}{(2p+1)(2p-1) \cdots 3} I_1 = \frac{2^p p!}{(2p+1)(2p-1) \cdots 3},$$

et le calcul précédent montre $(2p+1)(2p-1) \cdots 3 = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}$ donc $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Question I.7

Pour $x \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \sin x \leq 1$, donc, en multipliant par $\sin^{2p} x$ (qui est positif), on trouve $0 \leq \sin^{2p+1} x \leq \sin^{2p} x$. Mais si on avait multiplié par $\sin^{2p-1} x$, on aurait trouvé $0 \leq \sin^{2p} x \leq \sin^{2p-1} x$, donc finalement on a bien montré que $0 \leq \sin^{2p+1} x \leq \sin^{2p} x \leq \sin^{2p-1} x$.

En intégrant sur $[0, \pi/2]$, on en déduit aussitôt que $0 \leq I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$.

Question I.8

Pour $p \geq 1$, $\frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$.

Or en divisant l'inégalité du I.7 par I_{2p+1} , on obtient $1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = 1 + \frac{1}{2p}$, et on en déduit que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1.$$

Question I.9

D'après les calculs du I.6, on a aussi $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{(2p)!(2p+1)!}{2^{4p}(p!)^4} \frac{\pi}{2} = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \right)^2 \frac{(2p+1)\pi}{2}$.

Question I.10

Comme $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$ est de limite égale à 1, on en déduit que $\left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \right)^2 \sim \frac{2}{(2p+1)\pi} \sim \frac{1}{p\pi}$ ou encore que $\frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \right)^2 = \frac{1}{p} \left(\frac{(2p)(2p-2) \cdots 4.2}{(2p-1)(2p-3) \cdots 3.1} \right)^2$ est de limite égale à π .

Question I.11

On vient de montrer que $\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \sim \sqrt{p\pi}$.

I.11.a Rappelant les résultats du I.6, on obtient $I_{2p} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{p\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$.

I.11.b De même, on trouve $I_{2p+1} \sim \frac{\sqrt{p\pi}}{2p+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$.

I.11.c Que n soit pair ou impair on a trouvé dans tous les cas : $I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n/2}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie II

Question II.1

On a bien sûr $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)(n+1)^n \sqrt{n+1}}{n^n \sqrt{n}} \frac{1}{e(n+1)} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}$.

Question II.2

II.2.a On se rappelle que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

II.2.b On en déduit que

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc que $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{1}{12n^2}$.

Question II.3

Posons $v_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$: comme $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$, $(\sum v_n)$ est une série à termes positifs au moins à partir d'un certain rang. En outre, comme $(\sum \frac{1}{n^2})$ converge, la série $(\sum v_n)$ converge également.

Question II.4

Or $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$ donc la $(n-1)$ -ème somme partielle de cette série s'écrit $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} v_k = \ln u_n - \ln u_1 = \ln u_n + 1$ car $u_1 = 1/e$.

Comme $(\sum v_n)$ converge, on peut poser $S = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1}$, et on déduit du calcul précédent que la suite $(\ln u_n)$ converge de limite $S - 1$ donc que la suite (u_n) converge de limite $\ell = e^{S-1}$.

Question II.5

Par définition même de u_n , on dispose alors de $n! \sim \frac{1}{\ell} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Question II.6

En utilisant cet équivalent, on trouve que

$$\frac{4^p (p!)^2}{(2p)!} \sim 2^{2p} \frac{p \cdot p^{2p}}{\ell^2 e^{2p}} \frac{\ell e^{2p}}{\sqrt{2p} 2^{2p} p^{2p}} = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{p}{2}},$$

alors que I.10 fournissait $\frac{4^p (p!)^2}{(2p)!} \sim \sqrt{p\pi}$. Comparant ces deux résultats, il vient $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Finalement on a retrouvé la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Partie III

Question III.1

La somme d'une série entière peut se dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence. On écrit donc, pour $x \in]0, R[$:

$$\begin{aligned}a(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\a'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\xa'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \\xa''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n \\x^2 a''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n\end{aligned}$$

L'équation différentielle fournit donc les relations :

$$\forall n \geq 0, \quad 16n(n-1)a_n - 16(n+1)na_{n+1} + 16na_n - 8(n+1)a_{n+1} - a_n = 0.$$

Cette équation se réécrit $\forall n \geq 0, \quad (16n^2 - 1)a_n = 8(2n^2 + 3n + 1)a_{n+1}$ ou encore, pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{16(n-1)^2 - 1}{8(2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1)} a_{n-1} = \frac{(4n-3)(4n-5)}{8n(2n-1)} a_{n-1}.$$

Question III.2

Observons qu'on a $\frac{a_n}{a_{n-1}} \sim \frac{16n^2}{16n^2} = 1$ donc le rayon de convergence de la série entière obtenue est $R = 1$.

Question III.3

Puisque $a_0 = 1$, on a :

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{(4n-3)(4n-5)}{4 \cdot (2n)(2n-1)} \frac{(4n-7)(4n-9)}{4 \cdot (2n-2)(2n-3)} \cdots \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 3} \frac{1 \cdot (-1)}{4 \cdot 2 \cdot 1} \\&= - \frac{(4n-3)(4n-5)(4n-7) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}{4^n (2n)!} = - \frac{(4n-2)!}{4^n (2n)! (4n-2)(4n-4)(4n-6) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2} \\&= - \frac{(4n-2)!}{4^n (2n)! 2^{n-1} (2n-1)!} = - \frac{1}{4n-1} \frac{(4n)!}{2^{3n} (2n)!^2}.\end{aligned}$$

Question III.4

À l'aide de la formule de Stirling, on trouve après simplification $a_n \sim -\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.