

Exercice

1-) L'équation de la courbe (H) s'écrit $q(x, y) = 2$

et $q(x, y) = 3x^2 - 10\sqrt{3}xy + 13y^2$ est une forme quadratique de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$

dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

A est une matrice symétrique à coefficients réels donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres (théorème spectral).

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 16\lambda - 36 = (\lambda - 18)(\lambda + 2)$ d'où $\text{sp}(A) = \{ 18_{(1)}, -2_{(1)} \}$.

Soit \vec{I} est un vecteur normé de $E_{18}(A)$ et \vec{J} un vecteur normé de $E_{-2}(A)$.

On sait que deux sous-espaces propres d'une matrice symétrique à coefficients réels sont orthogonaux

donc $(\vec{I}, \vec{J}) = \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et, quitte à remplacer \vec{J} par $-\vec{J}$, on peut choisir (\vec{I}, \vec{J}) orthonormale directe.

Dans cette base, l'expression de la forme quadratique est: $18X^2 - 2Y^2$.

Donc $\boxed{\text{dans le repère } (O, \vec{I}, \vec{J}) \text{ la courbe } (H) \text{ a pour équation } 18X^2 - 2Y^2 = 2}$.

2-) Cette équation peut s'écrire $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = 1$.

$\boxed{(H) \text{ est donc une hyperbole d'axe focal } (O, \vec{I})}$ et $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ donc $\boxed{e = \frac{c}{a} = \sqrt{10}}$.

3-) $\boxed{(C) \text{ est le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1}$.

Le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) étant orthonormal, son équation dans ce repère est $\boxed{X^2 + Y^2 = 1}$.

4-) Dans le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) , $M(X, Y) \in (C) \cap (H) \Leftrightarrow \begin{cases} 9X^2 - Y^2 = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow X = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et } Y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$

D'où 4 points $\boxed{A\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), B\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right), C\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \text{ et } D\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$.

5-) $\overline{AB}\left(0, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ et $\overline{DC}\left(0, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ donc $\overline{AB} = \overline{DC}$ et, par suite, ABCD est un parallélogramme.

$\overline{BC}\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$ donc $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0$ et, par suite, $\boxed{ABCD \text{ est un rectangle}}$.

$A(ABCD) = AB \times BC = \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$ donc $\boxed{A(ABCD) = \frac{8}{5}}$.

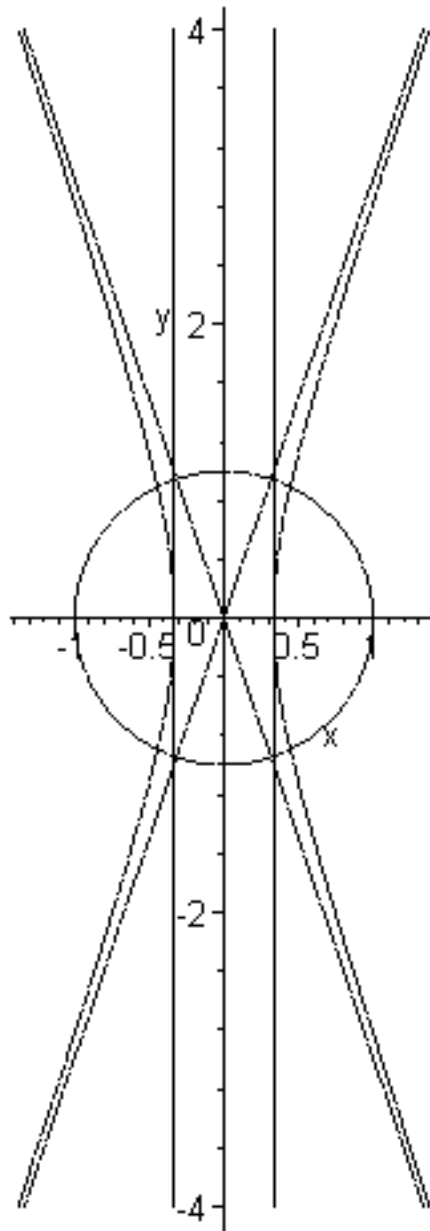
6-) Par application directe du cours,

→ les sommets de l'hyperbole sont les points $\boxed{S_1\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \text{ et } S_2\left(\frac{1}{3}, 0\right)}$.

→ les asymptotes sont les deux droites d'équation $\boxed{Y = -3X \text{ et } Y = 3X}$.

→ Les tangentes aux sommets de l'hyperbole sont les droites d'équation $\boxed{X = -\frac{1}{3} \text{ et } X = \frac{1}{3}}$.

```
7-) > with(plots):  
implicitplot({x^2+y^2=1,9*x^2-y^2=1,x=-1/3,x=1/3,y=-3*x,y=3*x},  
x=-3..3,y=-4..4,color=black,numpoints=2000);
```



Problème

A.1) $X_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

A.2) Tous les éléments de A sont des réels positifs ou nuls
et la somme des éléments de chaque colonne de A vaut 1. Donc **A est stochastique**.

A.3)

```
> with(linalg):  
X:=matrix(3,1,[1/2,1/2,0]):  
A:=matrix(3,3,[7,4,5,3,0,1,0,6,4])/10:  
for i from 1 to 2010  
  do X:=evalm(A&*X) od:  
print(X);
```

A.4) $\text{Tr}(A) = \frac{11}{10}$ et $\det(A) = 0$ donc **A n'est pas inversible**.

A.5) La somme des éléments de chaque ligne de tA vaut 1 car A est stochastique.
Par suite $1 \in \text{sp}({}^tA)$ et $(1, 1, 1) \in E_1({}^tA)$.

Donc **le vecteur non nul $(1, 1, 1)$ est vecteur propre de tA associé à la valeur propre 1**.

Note: on pouvait aussi dire $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et ${}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A.6.a) On sait que le polynôme caractéristique de M est $P_1(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$
et que le polynôme caractéristique de tM est $P_2(\lambda) = \det({}^tM - \lambda I_3)$.
Or ${}^tM - \lambda I_3 = {}^t(M - \lambda I_3) = {}^t(M - \lambda I_3)$.
Par ailleurs, on sait aussi qu'une matrice et sa transposée ont le même déterminant.
On en déduit que **M et tM ont le même polynôme caractéristique**.

A.6.b) On sait que les valeurs propres de la matrice M sont les racines de son polynôme caractéristique.
Le polynôme caractéristique $P_M(X)$ d'une matrice M de $M_3(\mathbb{R})$ est un polynôme du troisième degré
à coefficients réels de la forme: $P_M(X) = -X^3 + \text{Tr}(M) \cdot X^2 + \alpha \cdot X + \det(M)$.
Si on considère ce polynôme comme un élément de $\mathbb{C}[X]$, il est scindé
donc il admet trois racines λ_1, λ_2 et λ_3 complexes pas forcément distinctes.

La somme des racines d'un polynome $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ est $S = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

Donc $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr}(M)$.

Si $M \in M_3(\mathbb{R})$, M admet trois valeurs propres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 telles que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr}(M)$.

A.7) $\rightarrow \det(A) = 0$ donc $\det(A - 0I_3) = 0$ d'où $0 \in \text{sp}(A)$. On note $\lambda_1 = 0$.
 $\rightarrow 1$ est valeur propre de tA donc racine du polynôme caractéristique de tA
qui est aussi celui de A donc $1 \in \text{sp}(A)$. On note $\lambda_2 = 1$.
 $\rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr}(A)$ donne $\lambda_3 = 1/10$.

D'où $\text{sp}(A) = \left\{ 0, 1, \frac{1}{10} \right\}$.

A.8) $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(A)$.

$A \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 3 = 1 \\ 3 - 2 = a \\ 6a - 8 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$. Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in E_{0.1}(A)$.

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 + 5b = 0 \\ 3 + b = 0 \\ 12 + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{b = -3}$. Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in E_0(A)$.

Par suite, ces trois vecteurs associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre et maximale de \mathbb{R}^3 donc une base de \mathbb{R}^3 constituée de vecteurs propres de A.

On en déduit que A est diagonalisable.

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

A.9) $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t(\text{Com}P)$ donne $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

A.10) \rightarrow Pour $n = 0$, $PD^0P^{-1}X_0 = PI_3P^{-1}X_0 = PP^{-1}X_0 = I_3X_0 = X_0$.

\rightarrow Si, pour un naturel n donné ($n \geq 0$), $X_n = PD^nP^{-1}X_0$

alors $X_{n+1} = AX_n = PDP^{-1}.PD^nP^{-1}.X_0 = PDD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}X_0$ d'où l'hérédité.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_n = PD^nP^{-1}X_0}$.

A.11.a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (forme non valable pour $n = 0$)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \times 10^{-n} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 - 5 \times 10^{-n} \\ 2 - 5 \times 10^{-n} \\ 2 + 10 \times 10^{-n} \end{pmatrix}$.

A.11.b) Pour $n \geq 1$, $5 \times 10^{-n} \leq 1$ donc toutes les composantes de X_n sont positives.

Par ailleurs $\frac{1}{10}(6 - 5 \times 10^{-n} + 2 - 5 \times 10^{-n} + 2 + 10 \times 10^{-n}) = \frac{1}{10} \times 10 = 1$.

Comme on a vu que X_0 est stochastique, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_n \text{ est stochastique}}$.

A.12) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} x_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \times 10^{-n} \\ y_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \times 10^{-n} \\ z_n = \frac{1}{5} + 10^{-n} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{3}{5} = l_x \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{1}{5} = l_y \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{1}{5} = l_z \end{cases}$.

A.13) Les trois réels l_x, l_y et l_z sont positifs et leur somme vaut $\frac{3+1+1}{5} = 1$.

Donc le vecteur $\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$ est stochastique.

$$\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(A).$$

Par suite $\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A et, plus précisément, $\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \in E_1(A)$.

B.1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est stochastique $\Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0, a + c = 1$ et $b + d = 1$.

Par suite, $c = 1 - a$ et $d = 1 - b$.

De plus, $c \geq 0 \Leftrightarrow 1 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1$ et $d \geq 0 \Leftrightarrow 1 - b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq 1$.

Donc A est stochastique $\Leftrightarrow \exists (a, b) \in [0, 1]^2, A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix}$.

B.2) $\rightarrow X_0$ est stochastique par hypothèse.

\rightarrow Si, pour un naturel n donné ($n \geq 0$), $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ est stochastique

donc si $x_n \geq 0, y_n \geq 0$ et $x_n + y_n = 1$

alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_n + by_n \\ (1 - a)x_n + (1 - b)y_n \end{pmatrix}$ est aussi stochastique

En effet: • $ax_n + by_n \geq 0$ car a, x_n, b et y_n sont des réels positifs.

• $(1 - a)x_n + (1 - b)y_n \geq 0$ car $(1 - a), x_n, (1 - b)$ et y_n sont des réels positifs.

• $ax_n + by_n + (1 - a)x_n + (1 - b)y_n = x_n + y_n = 1$.

Par suite, si X_0 et A sont stochastiques alors $\forall n \in \mathbb{N}, X_n$ est stochastique.

B.3) $\text{Tr}(A) = a + 1 - b$ et $\begin{cases} 1 \leq a + 1 \leq 2 \\ -1 \leq -b \leq 0 \end{cases}$. Par suite, $0 \leq \text{Tr}(A) \leq 2$.

B.4.a) $\text{Tr}(A) = 0 \Leftrightarrow b = a + 1$. Or $b \in [0, 1]$ et $a + 1 \in [1, 2]$.

Donc $\text{Tr}(A) = 0 \Leftrightarrow b = 1$ et $a = 0 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, $A^2 = I_2$ d'où $\forall p \in \mathbb{N}, X_{2p} = X_0$ et $X_{2p+1} = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$ suite périodique.

B.4.b) $\text{Tr}(A) = 2 \Leftrightarrow a = b + 1$. Or $a \in [0, 1]$ et $b + 1 \in [1, 2]$.

Donc $\text{Tr}(A) = 2 \Leftrightarrow a = 1$ et $b = 0 \Leftrightarrow A = I_2$.

Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = X_0$ suite constante.

B.5) $0 < \text{Tr}(A) < 2 \Leftrightarrow 0 < a + 1 - b < 2 \Leftrightarrow$ $-1 < a - b < 1$.

B.6.a) $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AV = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ -a+b \end{pmatrix} = (a-b)V.$

Donc V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $q = a - b$.

B.6.b) $-1 < a - b < 1 \Leftrightarrow -1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1.$

B.7) ${}^tA = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

La somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 donc $1 \in \text{sp}({}^tA)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1({}^tA).$

Par suite, $1 \in \text{sp}(A)$ car A et tA ont même polynôme caractéristique.

B.8) A est une matrice carrée d'ordre 2 qui admet deux valeurs propres distinctes q et 1. En effet, $|q| < 1$ impose $q \neq 1$.

Par suite, A est diagonalisable semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

B.9) Soit U un vecteur propre associé à la valeur propre 1, comme V est un vecteur propre associé à la valeur propre q , (U, V) est une base de diagonalisation de A .

Soit (α, λ) les coordonnées de X_0 dans cette base, $X_0 = \alpha U + \lambda V = L + \lambda V$. Or $L = \alpha U \in E_1(A)$ donc $AL = L$.

Donc $\exists L \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda \in \mathbb{R}, AL = L$ et $X_0 = L + \lambda V$. On pose $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}.$

B.10) \rightarrow La propriété est vraie pour $n = 0$ d'après la question précédente.

\rightarrow Si, pour un naturel n donné ($n \geq 0$), $X_n = L + q^n \lambda V$

alors $X_{n+1} = AX_n = AL + q^n \lambda AV = L + q^n \lambda qV = L + q^{n+1} \lambda V$ d'où l'hérédité.

$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = L + q^n \lambda V.$

B.11) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = l_x + \lambda q^n$ et $y_n = l_y - \lambda q^n$.

Comme $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l_x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l_y$.

B.12) On a vu que, pour tout naturel n , X_n était stochastique.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0, y_n \geq 0$ et $x_n + y_n = 1$.

Par passage à la limite, on obtient: $l_x \geq 0, l_y \geq 0$ et $l_x + l_y = 1$.

Donc L est stochastique.

B.13) Si T vérifie $AT = T$ alors T appartient à $E_1(A)$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}, T = \alpha.L = \begin{pmatrix} \alpha l_x \\ \alpha l_y \end{pmatrix}.$

Si T est stochastique alors $\alpha(l_x + l_y) = 1$ ce qui donne $\alpha = 1$ soit $T = L$.

C.1) $A \in M_2(\mathbb{R})$ et A est non inversible donc $\text{rg}(A) < 2$.
 La matrice nulle n'est pas stochastique donc $\text{rg}(A) > 0$.
 Donc $\text{si } A \text{ est une matrice carrée d'ordre 2 stochastique et non inversible alors } \text{rg}(A) = 1$.

C.2) La matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ avec $a \in [0, 1]$ et $b \in [0, 1]$.
 Son déterminant est nul ce qui se traduit par: $a - ab - b + ab = 0$ soit $a = b$.

Donc $\exists \alpha \in [0, 1], A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$.

C.3) $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 & \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 \\ \alpha - \alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2 & \alpha - \alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$
 Donc $A^2 = A$.

C.4) On déduit de la question précédente que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = A$.
 Une récurrence immédiate donne: $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \cdot X_0$.
 En combinant ces deux résultats, on obtient: $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = AX_0$ suite stationnaire.

C.5) La relation $A^2 = A$ se traduit par $f \circ f = f$ donc f est un projecteur.

C.6) $\rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(x+y) = 0 \\ (1-\alpha)(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y = 0$
 car un au moins des deux nombres α ou $(1-\alpha)$ est non nul.
Une équation de $\text{Ker } f$ est donc $x+y=0$.

\rightarrow Comme f est un projecteur, $\text{Im } f$ est l'ensemble des invariants de f .
 $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha-1)x + \alpha y = 0 \\ (1-\alpha)x - \alpha y = 0 \end{cases}$
Une équation de $\text{Im } f$ est donc $(\alpha-1)x + \alpha y = 0$.

Note: l'examen des colonnes de A donne immédiatement
 $\text{Ker } f = \text{Vect}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\text{Im } f = \text{Vect}(\alpha \vec{i} + (1-\alpha) \vec{j})$.

C.7) f est une projection orthogonale si et seulement $\text{Im } f \perp \text{Ker } f$
 donc si et seulement si $1 \cdot \alpha - 1 \cdot (1-\alpha) = 0$ ce qui donne $2\alpha = 1$ soit $\alpha = \frac{1}{2}$.

Note: on sait qu'une projection orthogonale est un endomorphisme symétrique (pas orthogonal !)
 Sa matrice dans une base orthonormale est donc une matrice symétrique.

Cela donne immédiatement $\alpha = 1 - \alpha$ soit $\alpha = \frac{1}{2}$.

f est une projection orthogonale si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$.

C.8) $f(\vec{u}(\theta))$ a pour coordonnées $(\alpha(\cos\theta + \sin\theta), (1 - \alpha)(\cos\theta + \sin\theta))$.

Comme le repère est orthonormé,

$$\|f(\vec{u}(\theta))\|^2 = [\alpha^2 + (1 - \alpha)^2](\cos\theta + \sin\theta)^2 = (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)(\cos\theta + \sin\theta)^2.$$

Par ailleurs, $\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sin\theta \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos\theta\right)^2 = \frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta)^2$ et $(2\alpha - 1)^2 + 1 = 4\alpha^2 - 4\alpha + 2$.

Donc $\|f(\vec{u}(\theta))\|^2 = (4\alpha^2 - 4\alpha + 2) \times \frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta)^2$ soit $\|f(\vec{u}(\theta))\|^2 = [(2\alpha - 1)^2 + 1] \cdot \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$.

C.9) $\vec{i} = \vec{u}(0)$ donc $\frac{\|f(\vec{i})\|}{\|\vec{i}\|} = \sqrt{\frac{(2\alpha - 1)^2 + 1}{2}}$.

$\vec{i} + \vec{j} = \|\vec{i} + \vec{j}\| \times \vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\frac{\|f(\vec{i} + \vec{j})\|}{\|\vec{i} + \vec{j}\|} = \|f(\vec{u}(\pi/4))\| = \sqrt{(2\alpha - 1)^2 + 1}$.

C.10) → Si f est une projection orthogonale (quelconque), tout vecteur \vec{x} s'écrit sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$, $\vec{x}_1 \in \text{Im } f$, $\vec{x}_2 \in \text{Ker } f$ et $f(\vec{x}) = \vec{x}_1$.

Le théorème de Pythagore s'écrit: $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2 = \|f(\vec{x})\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2$.

Donc $\boxed{\text{si } f \text{ est une projection orthogonale alors } \forall \vec{x} \in E, \|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|}$.

Note: Dans le cas présent, $f(\vec{i})$ est un vecteur directeur de $\text{Im } f$.

$$\text{et } \|f(\vec{i})\| = \sqrt{\frac{(2\alpha - 1)^2 + 1}{2}} \leq 1 \text{ pour } \alpha \in [0, 1].$$

$$\text{Si } \vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} \text{ alors } f(\vec{x}) = af(\vec{i}) \text{ d'où } \|f(\vec{x})\| \leq a \leq \sqrt{a^2 + b^2} = \|\vec{x}\|.$$

→ Réciproquement, si $\forall \vec{x} \in E, \|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$,

Pour $\vec{x} = \vec{i} + \vec{j}$, il vient $(2\alpha - 1)^2 + 1 \leq 1$ soit $(2\alpha - 1)^2 \leq 0$ soit $2\alpha - 1 = 0$ donc $\alpha = \frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\text{si } \forall \vec{x} \in E, \|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\| \text{ alors } f \text{ est un projecteur orthogonal}}$.