

X ULC Maths A 2013

1. Opérateurs sur les fonctions à support fini

1a

L'ensemble V est un sous ensemble de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui est non vide puisqu'il contient l'élément nul de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Soient f et g , deux éléments de V et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors le support de $\lambda f + g$ est inclus dans l'union des supports de f et de g . Il est donc fini et on a bien

$$\forall (f, g, \lambda) \in V^2 \times \mathbb{C}, \quad \lambda f + g \in V$$

ce qui montre que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

1b

Soient f et g , deux éléments de V et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout entier relatif k , on a

$$E(\lambda f + g)(k) = (\lambda f + g)(k+1) = \lambda f(k+1) + g(k+1) = (\lambda E(f) + E(g))(k)$$

Donc E est bien une application linéaire. De plus, le support de $E(f)$ est en bijection avec le support de f (par l'application $\sigma : k \rightarrow k+1$). Par conséquent, ces deux supports sont simultanément finis, ce qui montre que V est stable par E .

2

On a déjà montré que E était un endomorphisme de V . Il reste à montrer qu'il est inversible. On définit pour cela l'application $G : V \rightarrow V$ telle que, pour tout élément f de V , on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad G(f)(k) = f(k-1)$$

On remarque que G est lui aussi un endomorphisme de V et qu'il vérifie $F \circ G = G \circ F = Id_V$. On a donc montré que E est inversible.

3a

Montrons que la famille $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est libre : soient $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille finie de $\mathbb{C}$ indexée par $I \subset \mathbb{Z}$ telle que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$$

En évaluant l'identité précédente en $k \in I$, on montre que $\lambda_k = 0$ et ce, pour tout $k \in I$, ce qui montre que la famille $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est libre.

Montrons que la famille $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est génératrice. Soit $f \in V$ alors le support de f est fini et $f = \sum_{i \in \text{Supp}(f)} f(i) v_i$. La famille engendre donc bien V .

Finalement, on conclut que la famille $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une base de V .

3b

Soit $i \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier relatif k , on a

$$E(v_i)(k) = v_i(k+1) = v_{i-1}(k)$$

On en déduit que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $E(v_i) = v_{i-1}$.

4

Les endomorphismes $H \circ E$ et $E \circ H + 2E$ sont égaux si et seulement s'ils coïncident sur la base des $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Soit $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$H \circ E(v_i) = \lambda(i-1) v_{i-1}$$

et

$$E \circ H(v_i) + 2E(v_i) = (\lambda(i) + 2) v_{i-1}$$

Ainsi, il y a égalité si et seulement si

$$(1) \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \lambda(i-1) = \lambda(i) + 2$$

Par suite, s'il y a égalité, alors pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda(i) = \lambda(0) + \sum_{k=1}^i (\lambda(k) - \lambda(k-1)) = \lambda(0) - 2i$$

et

$$\lambda(-i) = \lambda(0) + \sum_{k=1}^i (\lambda(-k) - \lambda(-k+1)) = \lambda(0) + 2i$$

Donc, le cas $i = 0$ étant évident,

$$H \circ E = E \circ H + 2E \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i) = \lambda(0) - 2i)$$

Réciproquement, si pour tout entier relatif i , on a $\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$ alors la relation (1) est vérifiée. On conclut que, $H \circ E = E \circ H + 2E$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$$

5

Les endomorphismes $E \circ F$ et $F \circ E + H$ sont égaux si et seulement s'ils coïncident sur la base des $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Soit $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$E \circ F(v_i) = \mu(i) v_i$$

et

$$(F \circ E + H)(v_i) = (\mu(i-1) + \lambda(i)) v_i = (\mu(i-1) + \lambda(0) - 2i) v_i$$

Ainsi, il y a égalité si et seulement si,

$$(2) \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0) - 2i$$

Par suite, s'il y a égalité, alors pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mu(i) &= \mu(0) + \sum_{k=1}^i (\mu(k) - \mu(k-1)) = \mu(0) + \sum_{k=1}^i (\lambda(0) - 2k) \\ &= \mu(0) + i\lambda(0) - 2 \frac{i(i+1)}{2} = \mu(0) + i(\lambda(0) - 1) - i^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu(-i) &= \mu(0) + \sum_{k=1}^i (\mu(-k) - \mu(-k+1)) = \mu(0) - \sum_{k=1}^i (\lambda(0) + 2k) \\ &= \mu(0) - i\lambda(0) - 2 \frac{i(i+1)}{2} = \mu(0) - i(\lambda(0) - 1) - i^2 \end{aligned}$$

Donc, le cas $i = 0$ étant évident,

$$E \circ F = F \circ E + H \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(0) + i(\lambda(0) - 1) - i^2)$$

Réciproquement, si pour tout entier relatif i , on a $\mu(i) = \mu(0) + i(\lambda(0) - 1) - i^2$, alors la relation (2) est vérifiée. On conclut que $E \circ F = F \circ E + H$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mu(i) = \mu(0) + i(\lambda(0) - 1) - i^2$$

6.a

Soit $f \in V$, S son support et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors on a $f = \sum_{k \in S} f(k) v_k$, ce qui implique, par récurrence rapide, que

$$H^n(f) = \sum_{k \in S} f(k) \lambda(k)^n v_k \in \text{Vect}\{v_k, k \in S\}$$

Ainsi, pour tout $f \in V$, on a

$$\text{Vect}\{H^n(f), n \in \mathbb{N}\} \subset \text{Vect}\{v_k, k \in S\}$$

Comme S est fini, le sous-espace vectoriel $\text{Vect}\{H^n(f), n \in \mathbb{N}\}$ est de dimension finie car c'est un sous-espace de $\text{Vect}\{v_k, k \in S\}$ qui est de dimension finie.

6.b

Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par H et non réduit à $\{0\}$. Montrons qu'il contient un des v_i .

Soit $f \in W \setminus \{0\}$. Le sous-espace vectoriel $W' = \text{Vect}\{H^n(f), n \in \mathbb{N}\}$ est donc stable par H , de dimension finie non nulle et inclus dans W . Il est de plus inclus dans le sous-espace vectoriel $\text{Vect}\{v_k, k \in \text{Supp}(f)\}$ sur lequel H est diagonalisable

Par suite l'endomorphisme $H|_{W'}$ est diagonalisable sur W' . Comme le corps de base est $\mathbb{C}$, $H|_{W'}$ possède un vecteur propre que l'on note g . Ainsi, g est aussi vecteur propre de H .

Il reste à montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $g = v_{k_0}$. Si on note λ la valeur propre associée à g alors

$$H(g) = \lambda g = \sum_{k \in \text{Supp}(g)} \lambda g(k) v_k = \sum_{k \in \text{Supp}(g)} g(k) (\lambda(0) - 2k) v_k$$

Par conséquent, comme g ne s'annule pas sur $\text{Supp}(g)$, on a

$$\forall k \in \text{Supp}(g), \quad \lambda = \lambda(0) - 2k$$

Le support de g a donc au plus un élément. Comme $g \neq 0$, on en déduit que son support est un singleton et que g est colinéaire à un des v_i . Finalement, il existe i tel que $v_i \in W$.

Dans la suite de la partie I, on a

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \lambda(i) = -2i \quad \text{et} \quad \mu(i) = 1 - i - i^2$$

7.a

Montrons que l'endomorphisme F est injectif : soit $f \in \text{Ker } F$ telle que $f \neq 0$. Comme $f = \sum_{k \in \text{Supp}(f)} f(k) v_k$, on a

$$F(f) = \sum_{k \in \text{Supp}(f)} f(k) (1 - k - k^2) v_k = 0$$

Comme la famille $(v_k)_{k \in \text{Supp}(f)}$ est libre, on en déduit que

$$\forall k \in \text{Supp}(f), \quad f(k) (1 - k - k^2) = 0$$

ce qui est absurde car le polynôme $1 - X - X^2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$ et car $f(k) \neq 0$ si k est dans le support de f . On en déduit que le sous-espace vectoriel $\text{Ker } F$ est réduit à $\{0\}$ et que l'endomorphisme F est injectif.

Montrons maintenant que l'endomorphisme F est surjectif. Pour tout entier relatif n , on a

$$v_{n+1} = F\left(\frac{1}{1 - n - n^2} v_n\right) \in \text{Im } F$$

ce qui montre que F est surjectif. Ainsi, $F \in \text{Gl}(V)$.

7.b

Si E était d'ordre fini $r > 0$ alors on aurait $E^r(v_0) = v_0$ i.e. $v_{-r} = v_0$ ce qui est absurde. Par suite, E n'est pas d'ordre fini.

Si F était d'ordre fini $r > 0$ alors on aurait $F^r(v_0) = v_0$ i.e. $\prod_{k=0}^{r-1} \mu(k) v_r = v_0$ ce qui est absurde. Par suite, F n'est pas d'ordre fini.

7.c

Soit $f \in \text{Ker } H$. Comme $f = \sum_{k \in \text{Supp}(f)} f(k) v_k$, on a

$$H(f) = \sum_{k \in \text{Supp}(f)} f(k) (-2k) v_k = 0$$

Comme la famille $(v_k)_{k \in \text{Supp}(f)}$ est libre, on en déduit que $\text{Supp}(f) \subset \{0\}$ et donc $f \in \text{Vect } v_0$ i.e. $\text{Ker } H \subset \text{Vect } v_0$. Réciproquement, $v_0 \in \text{Ker } H$ donc

$$\text{Ker } H = \text{Vect } v_0.$$

Supposons qu'il existe $r \geq 1$ tel que $H^r = \text{Id}_V$ alors on aurait $H^r(v_0) = 0 = v_0$ ce qui est absurde. Par conséquent, H n'est pas d'ordre fini dans le groupe $\text{GL}(V)$.

8.a

L'application $\Phi_E : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[E]$, $P \mapsto P(E)$ est surjective par définition et est un morphisme d'algèbres.

De plus, si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \text{Ker } \Phi_E$ alors

$$\Phi_E(P)(v_0) = \sum_{k=0}^d a_k E^k(v_0) = \sum_{k=0}^d a_k v_{-k} = 0$$

Comme la famille $(v_{-k})_{k \in \llbracket 0, d \rrbracket}$ est libre, on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, \quad a_k = 0$$

i.e. $P = 0$. Par suite, Φ_E est un isomorphisme d'algèbres donc $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[E]$ sont isomorphes.

8.b

L'application $\Phi_F : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[F]$, $P \mapsto P(F)$ est surjective par définition et est un morphisme d'algèbres.

De plus, si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \text{Ker } \Phi_F$ alors

$$\Phi_F(P)(v_0) = \sum_{k=0}^d a_k F^k(v_0) = \sum_{k=0}^d a_k \prod_{i=0}^{k-1} \mu(i) v_k = 0$$

Comme la famille $(v_k)_{k \in \llbracket 0, d \rrbracket}$ est libre, on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, \quad a_k \prod_{i=0}^{k-1} \mu(i) = 0$$

Le polynôme $1 - X - X^2$ n'ayant pas de racines dans $\mathbb{Z}$, on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, \quad a_k = 0$$

i.e. $P = 0$. Par suite, Φ_F est un isomorphisme d'algèbres donc $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[F]$ sont isomorphes.

8.c

L'application $\Phi_H : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[H]$, $P \mapsto P(H)$ est surjective par définition et est un morphisme d'algèbres.

De plus, si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \text{Ker } \Phi_H$ alors, comme pour tout $i \in \mathbb{Z}$, v_i est un vecteur propre de H associé à la valeur propre $-2i$, on en déduit que

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \Phi_H(P)(v_i) = 0 = P(-2i)v_i$$

donc

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad P(-2i) = 0$$

i.e. le polynôme P admet une infinité de racines, ce qui prouve que $P = 0$.

Par suite, Φ_H est un isomorphisme d'algèbres donc $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[H]$ sont isomorphes.

2. Intermède

9

Par définition, $\mathbb{U}_\ell = \{q^r, r \in \mathbb{Z}\}$. Montrons que l'on a aussi $\mathbb{U}_\ell = \{(q^2)^r, r \in \mathbb{Z}\}$.
On a immédiatement $\{(q^2)^r, r \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{U}_\ell$. Réciproquement, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ell = 2p + 1$. Alors $q^\ell = q^{2p+1} = 1$ donc $q = q^{-2p} = (q^2)^{-p}$. Ainsi, $q \in \{(q^2)^r, r \in \mathbb{Z}\}$ puis $\mathbb{U}_\ell \subset \{(q^2)^r, r \in \mathbb{Z}\}$.
Finalement, $\mathbb{U}_\ell = \{(q^2)^r, r \in \mathbb{Z}\}$ et q^2 est une racine primitive ℓ -ième de l'unité.

10.a

Pour tout entier $i \in \llbracket 1, \ell - 1 \rrbracket$, on a $G_a(v_i) = v_{i+1}$ et $G_a(e_\ell) = av_1$. Par conséquent,

$$G_a^\ell(v_1) = G_a^{\ell-1}(v_2) = \dots = G_a(v_\ell) = av_1$$

et, pour tout entier $i \in \llbracket 2, \ell \rrbracket$,

$$G_a^\ell(v_i) = G_a^\ell(G_a^{i-1}(v_1)) = G_a^{i-1}(G_a^\ell(v_1)) = G_a^{i-1}(av_1) = av_i$$

On en déduit que, $G_a^\ell = aId_{W_\ell}$.

Ainsi, G_a est annulé par le polynôme $X^\ell - a$ qui est scindé à racines simples (ses racines sont les racines ℓ -ièmes de a). Par conséquent, G_a est diagonalisable.

10.b

Le polynôme $X^\ell - a$ est en fait le polynôme minimal de G_a . En effet, si $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ est un polynôme annulateur de degré p avec $p < \ell$, alors on a

$$P(G_a)(v_0) = \sum_{k=0}^p a_k v_k = 0$$

Comme la famille $\{v_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket\}$ est libre, cela implique $P = 0$. Le polynôme minimal de G_a est donc de degré au moins ℓ . On en déduit que le polynôme $X^\ell - a$ est le polynôme minimal de G_a . Par conséquent, les valeurs propres de G_a sont donc exactement les racines ℓ -ième de a i.e. $b\mathbb{U}_\ell$.

Cherchons maintenant à décrire les espaces propres : soit $k \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$, $\lambda_k = bq^k$ et $f \in W_\ell$ de coordonnées $(f(0), \dots, f(\ell - 1))$ dans la base $\{v_i, i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket\}$. On a

$$\begin{aligned} f \in E_{\lambda_k} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(i) = \lambda_k f(i+1) & \forall i \in \llbracket 0, \ell - 2 \rrbracket \\ af(\ell - 1) = \lambda_k f(0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \llbracket 0, \ell - 2 \rrbracket, f(i) = \lambda_k^{\ell-1-i} f(\ell - 1) = a\lambda_k^{-1-i} f(\ell - 1) \\ af(\ell - 1) = \lambda_k f(0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket, f(i) = \lambda_k^{\ell-1-i} f(\ell - 1) = a(bq^k)^{-1-i} f(\ell - 1) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_{bq^k} = Vect \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} (bq^k)^{-i} v_i \right)$$

11

Soit $i \in \mathbb{Z}$ et $(p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ tel que $i = p\ell + r$ alors

$$P_a \circ P_a(v_i) = P_a(a^p v_r) = a^p v_r = P_a(v_i)$$

Les endomorphismes $P_a \circ P_a$ et P_a coïncident donc sur la base $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ donc $P_a \circ P_a = P_a$ i.e. P_a est un projecteur. Par définition, $Im P_a \subset Vect\{v_r, r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket\} = W_\ell$ et

$$\forall r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket, \quad v_r = P_a(v_r) \in Im P_a$$

donc $Im P_a = Vect\{v_r, r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket\} = W_\ell$

3. Opérateurs quantiques

12

Les endomorphismes $H \circ E$ et $q^2 E \circ H$ sont égaux si et seulement s'ils coïncident sur la base des $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Soit $i \in \mathbb{Z}$,

$$H \circ E(v_i) = \lambda(i-1)v_{i-1} \quad \text{et} \quad q^2 E \circ H(v_i) = q^2 \lambda(i)v_{i-1}$$

Ainsi, il y a égalité si et seulement si

$$(3) \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i-1) = q^2 \lambda(i)$$

On suppose maintenant que cette relation est vérifiée.

Si la fonction λ s'annule sur $\mathbb{Z}$, alors elle est identiquement nulle et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$.

Sinon, pour tout entier naturel $i \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lambda(i) = \lambda(0) \times \prod_{k=1}^i \frac{\lambda(k)}{\lambda(k-1)} = \lambda(0)q^{-2i}$$

et

$$\lambda(-i) = \lambda(0) \times \prod_{k=1}^i \frac{\lambda(-k)}{\lambda(-k+1)} = \lambda(0)q^{2i}$$

Le cas $i = 0$ étant trivial, on a

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$$

Réciproquement, si pour tout entier relatif i , on a $\lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$, alors la relation (3) est vérifiée.

Par conséquent, $H \circ E = q^2 E \circ H$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$$

13

Soit $K \in \mathcal{L}(V)$ tel que, pour tout entier relatif i , $K(v_i) = \lambda(0)^{-1}q^{2i}v_i$ alors

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad K \circ H(v_i) = K(\lambda(0)q^{-2i}v_i) = v_i \quad \text{et} \quad H \circ K(v_i) = H(\lambda(0)^{-1}q^{2i}v_i) = v_i$$

Ainsi, $K = H^{-1}$ donc $H \in GL(V)$.

14

Les endomorphismes $E \circ F$ et $F \circ E + H + H^{-1}$ sont égaux si et seulement s'ils coïncident sur la base des $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Soit $i \in \mathbb{Z}$,

$$E \circ F(v_i) = \mu(i)v_i \quad \text{et} \quad (F \circ E + H + H^{-1})(v_i) = (\mu(i-1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i})v_i$$

Ainsi,

$$E \circ F = F \circ E + H + H^{-1} \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i})$$

15.a

Soit $i \in \mathbb{Z}$ alors

$$\lambda(i+\ell) = \lambda(0)q^{-2(i+\ell)} = \lambda(0)q^{-2i} = \lambda(i)$$

Donc ℓ est une période de λ i.e. λ est périodique sur $\mathbb{Z}$ et sa période divise ℓ .

Soit $i \in \mathbb{Z}$ alors

$$\begin{aligned} \mu(i+\ell) &= \mu(i) + \sum_{k=0}^{\ell-1} (\mu(i+k+1) - \mu(i+k)) = \mu(i) + \lambda(0) \sum_{k=0}^{\ell-1} q^{-2k} - \lambda(0)^{-1} \sum_{k=0}^{\ell-1} q^{2k} \\ &= \mu(i) + \lambda(0) \frac{1-q^{-2\ell}}{1-q^{-2}} - \lambda(0)^{-1} \frac{1-q^{2\ell}}{1-q^2} = \mu(i) \end{aligned}$$

Donc ℓ est une période de μ i.e. μ est périodique sur $\mathbb{Z}$ et sa période divise ℓ .

15.b

Soit T une période de λ alors $\lambda(T) = \lambda(0)$ i.e. $q^{-2T} = 1$ donc ℓ divise $2T$. Comme ℓ est impair, on en déduit que ℓ divise T . La période de λ est donc ℓ .

15.c

Soit T une période de μ alors pour tout $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$, $\mu(T + i) = \mu(i)$ i.e. $\sum_{k=i}^{T+i-1} (\mu(k+1) - \mu(k)) = 0$. Donc

$$\forall i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket, \quad \lambda(0)q^{-2i} \frac{1 - q^{-2T}}{1 - q^{-2}} = \lambda(0)^{-1} q^{2i} \frac{1 - q^{2T}}{1 - q^2}$$

Si $q^{2T} \neq 1$ alors pour tout $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$, on a

$$q^{4i} = \lambda(0)^2 \frac{1 - q^{-2T}}{1 - q^{-2}} \frac{1 - q^2}{1 - q^{2T}}$$

Le membre de droite ne dépend pas de i . On a donc nécessairement $q^4 = 1$, ce qui est impossible car q est d'ordre ℓ impair. Par conséquent, $q^{2T} = 1$ et donc $T \equiv 0[\ell]$ car q^2 est d'ordre ℓ . La période de μ est donc ℓ .

16.a

D'après la question 14, on a

$$\begin{aligned} C &= (q - q^{-1})E \circ F + q^{-1}H + qH^{-1} \\ &= (q - q^{-1})(F \circ E + H + H^{-1}) + q^{-1}H + qH^{-1} \\ &= (q - q^{-1})F \circ E + qH + q^{-1}H^{-1} \end{aligned}$$

16.b

Soit $i \in \mathbb{Z}$ alors

$$C(v_i) = (q - q^{-1})\mu(i - 1)v_i + q\lambda(0)q^{-2i}v_i - q^{-1}\lambda(0)^{-1}q^{2i}v_i \in Vect(v_i)$$

donc v_i est un vecteur propre de H .

16.c

Soit $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $i \mapsto (q - q^{-1})\mu(i - 1) + \lambda(0)q^{1-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i-1}$. Montrons que α est constante ce qui prouvera que C est une homothétie de V de rapport $\alpha(1)$. Soit $i \in \mathbb{Z}$, alors on a

$$\begin{aligned} \alpha(i + 1) &= (q - q^{-1})(\mu(i - 1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i}) + \lambda(0)q^{-1-2i} + \lambda(0)^{-1}q^{2i+1} \\ &= (q - q^{-1})\mu(i - 1) + \lambda(0)((q - q^{-1})q^{-2i} + q^{-1-2i}) - \lambda(0)^{-1}((q - q^{-1})q^{2i} + q^{2i+1}) \\ &= (q - q^{-1})\mu(i - 1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i} \\ &= \alpha(i) \end{aligned}$$

Par conséquent, α est constante à $\alpha(1) = (q - q^{-1})\mu(0) + \lambda(0)q^{-1} - \lambda(0)^{-1}q$. Les endomorphismes C et $\alpha(1)Id_V$ coïncident donc sur la base $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ce qui prouve que C est une homothétie de rapport

$$R(\lambda(0), \mu(0), q) = (q - q^{-1})\mu(0) + \lambda(0)q^{-1} - \lambda(0)^{-1}q$$

16.d

L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mu \mapsto (q - q^{-1})\mu + \lambda(0)q^{-1} + \lambda(0)^{-1}q$ est une fonction affine de coefficient directeur $q - q^{-1}$ non nul car $q^2 \neq 1$. Par conséquent, c'est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

16.e

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ alors on a

$$\begin{aligned} z_0 &= R(z, \mu(0), q) \Leftrightarrow z_0 = (q - q^{-1})\mu(0) + zq^{-1} + z^{-1}q \\ &\Leftrightarrow z^2q^{-1} + ((q - q^{-1}) - z_0)\mu(0)z + q = 0 \end{aligned}$$

Le polynôme $z^2q^{-1} + ((q - q^{-1}) - z_0)\mu(0)z + q$ est de degré 2 car $q \neq 0$. Il admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. De plus, comme 0 n'est pas racine, les racines sont en fait dans $\mathbb{C}^*$. L'application $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto R(z, \mu(0), q)$ est donc surjective.

De plus, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, si $((q - q^{-1}) - z_0)^2 \mu(0)^2 - 4 \neq 0$ (ce qui est le cas pour tous les complexes sauf deux) alors z_0 a deux antécédents. Ainsi, l'application $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto R(z, \mu(0), q)$ est non bijective.

4. Opérateurs quantiques modulaires

17.a

Soit $\phi \in \mathcal{L}(V)$ commutant avec P_a alors, comme P_a est un projecteur, on a

$$P_a \circ \phi \circ P_a = P_a \circ P_a \circ \phi = P_a \circ \phi$$

Par conséquent, ϕ est compatible avec P_a .

17.b

Soit $i \in \mathbb{Z}$ et $(p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ tels que $i = p\ell + r$. Alors on a

$$P_a \circ H \circ P_a(v_i) = P_a(\lambda(0)q^{-2i}a^p v_r) = \lambda(0)q^{-2i}a^p v_r$$

et

$$P_a \circ H(v_i) = P_a(\lambda(0)q^{-2i}v_i) \lambda(0)q^{-2i}a^p v_r$$

donc H est compatible avec P_a car les endomorphismes $P_a \circ H \circ P_a$ et $P_a \circ H$ coïncident donc sur la base $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

De même, si on considère $i \in \mathbb{Z}$ et $(p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ tels que $i = p\ell + r$, alors

$$P_a \circ H^{-1} \circ P_a(v_i) = P_a(\lambda(0)^{-1}q^{2i}a^p v_r) = \lambda(0)^{-1}q^{2i}a^p v_r$$

et

$$P_a \circ H^{-1}(v_i) = P_a(\lambda(0)^{-1}q^{2i}v_i) \lambda(0)^{-1}q^{2i}a^p v_r$$

Donc H^{-1} est compatible avec P_a car les endomorphismes $P_a \circ H^{-1} \circ P_a$ et $P_a \circ H^{-1}$ coïncident donc sur la base $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

18

L'ensemble $\mathcal{U}_q$ est inclus dans $\mathcal{L}(V)$ et contient $0_{\mathcal{L}(V)}$ et Id_V .

Soient $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{U}_q$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors

$$P_a \circ (\phi_1 + \lambda\phi_2) \circ P_a = P_a \circ \phi_1 \circ P_a + \lambda P_a \circ \phi_2 \circ P_a = P_a \circ \phi_1 + \lambda P_a \circ \phi_2 = P_a \circ (\phi_1 + \lambda\phi_2)$$

et

$$P_a \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ P_a = P_a \circ \phi_1 \circ P_a \circ \phi_2 \circ P_a = P_a \circ \phi_1 \circ P_a \circ \phi_2 = P_a \circ \phi_1 \circ \phi_2$$

Par suite, $\mathcal{U}_q$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$.

19

Soient $i \in \mathbb{Z}$ et $(p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ tels que $i = p\ell + r$ alors

$$P_a \circ E \circ P_a(v_i) = P_a(a^p v_{r-1}) = \begin{cases} a^p v_{r-1} & \text{si } r \neq 0 \\ a^{p-1} v_{\ell-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$P_a \circ E(v_i) = P_a(v_{i-1}) = \begin{cases} a^p v_{r-1} & \text{si } r \neq 0 \\ a^{p-1} v_{\ell-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

donc E est compatible avec P_a car les endomorphismes $P_a \circ E \circ P_a$ et $P_a \circ E$ coïncident sur la base $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Soient $i \in \mathbb{Z}$ et $(p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ tels que $i = p\ell + r$ alors

$$P_a \circ F \circ P_a(v_i) = P_a(\mu(i)a^p v_{r+1}) = \begin{cases} \mu(r)a^p v_{r-1} & \text{si } r \neq \ell - 1 \\ \mu(r)a^{p+1} v_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$P_a \circ F(v_i) = P_a(\mu(i)v_{i+1}) = \begin{cases} \mu(i)a^p v_{r-1} & \text{si } r \neq \ell - 1 \\ \mu(i)a^{p+1} v_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme μ est ℓ périodique, F est compatible avec P_a car les endomorphismes $P_a \circ F \circ P_a$ et $P_a \circ F$ coïncident sur la base $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

20.a

Soit $\phi \in \mathcal{U}_q$. L'endomorphisme $\Psi_a(\phi) : W_\ell \rightarrow W_\ell$, $x \mapsto P_a \circ \phi(x)$ vérifie

$$\forall x \in W_\ell, \quad \Psi_a(\phi) \circ P_a(x) = P_a \circ \phi(x)$$

Soit $\Psi \in \mathcal{L}(W_\ell)$ tel que pour tout $x \in W_\ell$, $\Psi_a(\phi) \circ P_a(x) = P_a \circ \phi(x)$ alors

$$\forall x \in W_\ell, \quad \Psi(x) = \Psi \circ P_a(x) = P_a \circ \phi(x) = \Psi_a(\phi) \circ P_a(x) = \Psi_a(\phi)(x)$$

donc $\Psi = \Psi_a(\phi)$. Ainsi, $\Psi_a(\phi)$ est l'unique endomorphisme de W_ℓ tel que

$$\forall x \in W_\ell, \quad \Psi_a(\phi) \circ P_a(x) = P_a \circ \phi(x)$$

De plus, soient $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{U}_q^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors

$$\forall x \in W_\ell, \quad P_a \circ (\phi_1 + \lambda \phi_2)(x) = P_a \circ \phi_1(x) + \lambda P_a \circ \phi_2(x)$$

donc $\Psi_a(\phi_1 + \lambda \phi_2) = \Psi_a(\phi_1) + \lambda \Psi_a(\phi_2)$ et

$$\forall x \in W_\ell, \quad P_a \circ \phi_1 \circ \phi_2(x) = P_a \circ \phi_1 \circ P_a \circ \phi_2(x) = P_a \circ \phi_1(\Psi_a(\phi_2(x))) = \Psi_a(\phi_1)(\Psi_a(\phi_2(x)))$$

soit $\Psi_a(\phi_1 \circ \phi_2) = \Psi_a(\phi_1) \circ \Psi_a(\phi_2)$.

Par suite, Ψ_a est un morphisme d'algèbres.

20.b

Soit $\phi \in \mathcal{U}_q$ alors

$$\begin{aligned} \phi \in \text{Ker } \Psi_a &\Leftrightarrow (\forall x \in W_\ell, P_a \circ \phi(x) = 0) \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket, P_a \circ \phi(v_i) = 0) \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket, \phi(v_i) \in \text{Ker } P_a) \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $(p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ tel que $i = p\ell + r$,

$$P_a \circ \phi(v_i) = P_a \circ \phi \circ P_a(v_i) = P_a \circ \phi \circ P_a(v_r)$$

donc $\text{Im}(\phi) = \text{Vect}\{\phi(v_i), i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket\}$. Ainsi,

$$\phi \in \text{Ker } \Psi_a \Leftrightarrow \text{Im}(\phi) \subset \text{Ker } P_a$$

Comme P_a est un projecteur,

$$\begin{aligned} \text{Ker } P_a &= \text{Im}(Id_V - P_a) \\ &= \text{Vect}\{(Id_V - P_a)(v_{p\ell+r}), (p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket\} \\ &= \text{Vect}\{v_i - a^p v_r, (p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket\} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\phi \in \text{Ker } \Psi_a \Leftrightarrow \text{Im}(\phi) \subset \text{Vect}\{v_i - a^p v_r, (p, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket\}$$

21.a

Par définition,

$$\Psi_a(E)(v_0) = P_a \circ E(v_0) = P_a(v_{-1}) = a^{-1}v_{\ell-1}$$

21.b

Soit $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$, alors $\Psi_a(E^\ell)(v_i) = P_a(v_{i-\ell}) = a^{-1}v_i$, donc $\Psi_a(E^\ell) = a^{-1}Id_{W_\ell}$.

21.c

Comme $\Psi_a(E^\ell) = a^{-1}Id_{W_\ell}$, on a

$$\mathbb{C}[\Psi_a(E)] = \text{Vect}\{\Psi_a(E^k), k \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket\}$$

Montrons que la famille $(\Psi_a(E^k))_{k \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket}$ est libre, ce qui prouvera que $\mathbb{C}[\Psi_a(E)]$ est de dimension ℓ .

Soit $(c_k)_{k \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket}$, une famille telle que $\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k \Psi_a(E^k) = 0$ alors $\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k \Psi_a(E^k)(v_0) = 0$. Or, pour tout $k \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$,

$$\Psi_a(E^k)(v_0) = P_a \circ (v_{-k}) = \begin{cases} a^{-1}v_{\ell-k} & \text{si } k \neq 0 \\ v_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $c_0 v_0 + \sum_{k=1}^{\ell-1} c_k a^{-1}v_{\ell-k} = 0$. La liberté de la famille $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et la non nullité de a implique donc que la famille $(c_k)_{k \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket}$ est nulle.

Par conséquent, $\mathbb{C}[\Psi_a(E)]$ est de dimension ℓ .

21.d

Soit $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ alors

$$\Psi_a(E)(v_i) = P_a \circ (v_{i-1}) = \begin{cases} v_{i-1} & \text{si } i \neq 0 \\ a^{-1}v_{\ell-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent, $\Psi_a(E) = G_a^{-1}$. Les valeurs propres de $\Psi_a(E)$ sont donc les racines ℓ -ième de a^{-1} et pour tout $k \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$, l'espace propre associé à $\mu_k = b^{-1}q^{-k}$ est $Vect\left(\sum_{j=0}^{\ell-1} (bq^k)^{-i} v_i\right)$.

22.a

Soit $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ alors $\Psi_a \circ H(v_i) = P_a(\lambda(i)v_i) = \lambda(i)v_i$. Ainsi, par le même raisonnement qu'à la question 6.b, si $f \in W \setminus \{0\}$ alors le sous-espace vectoriel $W' = Vect\{H^n(f), n \in \mathbb{N}\}$ est non réduit à $\{0\}$, stable par H , de dimension finie non nulle et inclus dans W . Il est de plus inclus dans le sous-espace vectoriel $Vect\{v_k, k \in Supp(f)\}$ sur lequel $\Psi_a \circ H$ est diagonalisable.

Par suite $\Psi_a \circ H|_{W'}$ est diagonalisable. Comme le corps de base est $\mathbb{C}$, $\Psi_a \circ H|_{W'}$ possède un vecteur propre g . Ainsi, il existe un vecteur propre de $\Psi_a \circ H$, g , appartenant à W' et donc à W .

Il reste à montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $g = v_{k_0}$. Si on note λ la valeur propre associée à g alors

$$\Psi_a \circ H(g) = \lambda g = \lambda \sum_{k \in Supp(g)} g(k)v_k = \sum_{k \in Supp(g)} g(k)\lambda(0)q^{-2k}v_k$$

Par conséquent,

$$\forall k \in Supp(g), \quad \lambda = \lambda(0)q^{-2k}$$

donc le support de g a au plus un élément car $\lambda(0) \neq 0$. Comme g est non nulle, le support de g est un singleton $\{k_0\}$ ce qui implique que $v_{k_0} \in Vect(g)$ et par conséquent que v_{k_0} est un élément de W .

22.b

Si W est stable par $\Psi_a(E)$ et contient v_i , $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ alors W contient tous les $(v_i)_{i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket}$ donc contient W_ℓ . Par suite, $W = W_\ell$.

23

Soit $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ alors

$$\Psi_a(F)(v_i) = P_a \circ (\mu(i)v_{i+1}) = \begin{cases} \mu(i)v_{i+1} & \text{si } i \neq \ell - 1 \\ a\mu(\ell - 1)v_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice de $\Psi_a(F)$ dans la base $(v_i)_{i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket}$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \mu(\ell - 1) \\ \mu(0) & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \mu(1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu(\ell - 2) & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\Psi_a(F)^\ell = \prod_{k=0}^{\ell-1} \mu(k) Id_V$. Or, $\Psi_a(F)$ est nilpotent si et seulement si $\Psi_a(F)^\ell = 0$ donc si et seulement si

$$\prod_{k=0}^{\ell-1} \mu(k) = 0$$

Comme

$$\forall i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket, \quad (q - q^{-1})\mu(i) = R(\lambda(0), \mu(0), q) - \lambda(0)q^{-1-2i} + \lambda(0)^{-1}q^{2i+1}$$

l'endomorphisme $\Psi_a(F)$ est nilpotent si et seulement si $R(\lambda(0), \mu(0), q) \in \{\lambda(0)q^{-1-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i+1}, i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket\}$