A : Préliminaires

1. • **$\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.**
   - La fonction nulle sur I est dans $\mathcal{P}$.
   - Toute combinaison linéaire de fonctions polynômiales sur I est une fonction polynômiale sur I.
   • **$\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.**
   - La fonction nulle sur I est dans $\mathcal{D}$.
   - Soit $f, g \in \mathcal{D}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f + \lambda g$ est développable en série entière de rayons $R \geq \min(R_f, R_g)$ où R_f et R_g les rayons de convergence respectifs des séries de Taylor de f et g.

2. • **$u(f)$ et $v(f)$ sont de classe C^∞.**
   - On va montrer que si $h \in \mathcal{E}$, alors $\varphi : x \longmapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x.sin(t))dt$ est de classe C^∞ sur I.
   Pour celà on va utiliser le théorème de Leibniz.
   - $\forall x \in I$, $t \longmapsto h(x.sin(t))$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x,t) \longmapsto \frac{\partial^n}{\partial x^n}(h(x.sin(t)) = (sin(t))^n h^{(n)}(x.sin(t))$ est continue sur $I \times [0, \frac{\pi}{2}]$.
   I est un segment, ces hypothèses suffisent pour conclure que h est de classe C^∞ sur I.
   En prennant $h = f$ (resp $h = f'$) , on obtient $u(f)$ (resp $v(f)$) est de classe C^∞ sur I.
   - u et v étant linéaires, on vient de montrer que se sont des endomorphismes de $\mathcal{E}$.

3. • **$\mathcal{P}$ est stable par u et v.**
   $\mathcal{P} = Vect(f_n : x \longmapsto x^n \ / \ n \in \mathbb{N})$, il suffit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(f_n), v(f_n) \in \mathcal{P}$.
   - $u(f_n)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x.sin(t))^n dt = \frac{2}{\pi} W_n x^n$.
   - $v(f_n)(x) = \delta_{n,0} + \frac{\pi}{2} nxu(f_{n-1})(x) = \begin{cases} 1, & si\ n = 0 \\ nW_{n-1}x^n \ , & si\ n \geq 1 \end{cases}$.
   Ceci montre que $\mathcal{P}$ est stable par u et v.

4. • **Une relation simple entre W_{n+2} et W_n.**
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} - W_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)(sin(t))^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t)\left(-\frac{(sin(t))^{n+1}}{n+1}\right)' dt = \left[-\frac{cos(t)(sin(t))^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+2}(t)dt = -\frac{1}{n+1} Wn + 2$, ce qui donne
   $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
   - • **$U_n = (n+1)W_n W_{n+1}$ est constante.**
   Avec l'égalité précédente, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_n W_{n+1} = U_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 = W_0 W_1 = \frac{\pi}{2}$.

5. • **La suite $(W_n)_n$ est strictement décroissante.**
   - $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq sin(t) \leq 1$, donc la suite $n \longmapsto sin^n(t)$ est strictement décroissante, ce qui entraire la stricte décroissance de $(W_n)_n$.
   • **Limite et équivant de W_n.**
   - $(W_n)_n$ est décroissante minorée par 0, donc admet une limite l et par passage à la limite dans l'égalité $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ donne $l = 0$.
   On peut encore le montrer en utilisant le théorème de la convergence dominée.
   Pour celà on pose $f_n(t) = (sin(t))^n$, alors
   -$(f_n)_n$ converge simplent sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ vers la fonction nulle .
   - $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $|f_n(t)| \leq 1$ et $t \longmapsto 1$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
   On conclut par le théorème de la convergence dominée que $\lim W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 0$.

   - W_n est une intégrale d'une fonction continue positive, donc strictement positive. La décroissance de $(W_n)_n$ et l'égalité $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, entraine l'encadrement
   $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq \frac{W_n}{W_n} = 1$, donc $W_{n+1} \sim W_n$ et par suite

$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1} \sim nW_n^2$, ce qui donne $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

B : Étude de la continuité de u et v

6. • **Continuité de u de $(\mathcal{E}, M)$ dans $(\mathcal{E}, M)$.**
   - La continuité de f sur le segment I assure que f est bornée et atteint sa borne supérieure, ce qui entraine la définition de M.
   - Soit $f \in \mathcal{E}$. $\forall x \in I$, $|u(f)(x)| = |\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x.sin(t))dt| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M(f) = M(f)$
   et par passage au sup, on obtient $M(u(f)) \leq M(f)$, ce qui assure la continuité de u de $(\mathcal{E}, M)$ dans $(\mathcal{E}, M)$.
7. • **Non continuité de v de $(\mathcal{E}, M)$ dans $(\mathcal{E}, M)$.**
   - Si $f_n(x) = x^n$, alors $v(f_n)(x) = nW_{n-1}x^n$, donc $M(v(f)) = nW_{n-1}a^n$ et $M(f) = a^n$, donc $\frac{M(v(f_n))}{M(f_n)} = nW_{n-1} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}} \longrightarrow +\infty$, donc le rapport ne peut être borné et v n'est donc pas continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans $(\mathcal{E}, M)$.
8. • **N est une norme sur $\mathcal{E}$.**
   - Soit $f \in \mathcal{E}$ tel que $N(f) = 0$, alors $M(f) = 0$, donc $f = 0$.
   - L'homogénité et la sous-additivité de M entrainent ceux de N.
   N est donc une norme sur $\mathcal{E}$.
   • **v est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$.**
   Soit $f \in \mathcal{E}$, $\forall x \in I$, $|v(f)(x)| \leq M(f) + a\frac{\pi}{2}M(f') \leq \max(1, \frac{a\pi}{2}).(M(f) + M(f')) = K.N(f)$ où $K = \max(1, \frac{a\pi}{2})$ et par passage au sup, on aura
   $M(v(f)) \leq K.N(f)$, ce qui assure la continuité de v de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$.
   • **Équivalence de M et N.**
   - Si M et N sont équivalentes, alors N sera dominée par M, et par suite la continuité de v de $(\mathcal{E}, N)$dans $(\mathcal{E}, M)$ entraine la continuité de v de $(\mathcal{E}, M)$ dans $(\mathcal{E}, M)$, ce qui est contradictoire avec la question 7.
9. Soit $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$.
   • **Existence de p.**
   f' est continue sur le segment I, le théorème de Weistrass assure l'existence d'un polynome Q tel que $M(f' - Q) \leq \varepsilon$.
   Soit $p(x) = f(0) + \int_0^x Q(t)dt$, alors $p(0) = f(0)$ et $p' = Q$, ce qui répond à la question.
   • **$\mathcal{P}$ est dense dans $(\mathcal{E}, N)$.**
   - On vient de montrer que $\forall f \in \mathcal{E}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p \in \mathcal{P}$ tel que $f(0) = p(0)$ et $M(f' - p') \leq \varepsilon$.
   $\forall x \in I$, $|f(x) - p(x)| = |\int_0^x (f'(t) - p'(t))dt| \leq aM(f' - p') \leq a\varepsilon$ et le passage au sup donne $M(f - p) \leq a\varepsilon$, donc $N(f - p) \leq (a+1)\varepsilon$, ce qui assure la densité de $\mathcal{P}$ dans $(\mathcal{E}, N)$.

C :Étude de l'inversibilité de u et v.

10. • **Restriction de uov et vou à $\mathcal{P}$.**
    Soit $n \in \mathbb{N}$.
    Un calcul simple aboutit à $(uov)(f_n)(x) = x^n = f_n(x)$ et $(vou)(f_n)(x) = x^n = f_n(x)$ et vu que
    $\mathcal{P} = Vect(f_n \,/\, n \in \mathbb{N})$, alors $(uov)|_{\mathcal{P}} = (vou)|_{\mathcal{P}} = id_{\mathcal{P}}$.
11. • **Calcul de $(uov)(f)$ pour $f \in \mathcal{E}$.**
    Soit $f \in \mathcal{E}$, $\mathcal{P}$ étant dense dans $(\mathcal{E}, N)$, donc il existe une suite $(p_n)_n$ de $\mathcal{P}$ tel que $N(p_n - f) \longrightarrow 0$.
    $uov : (\mathcal{E}, N) \longrightarrow (\mathcal{E}, M)$ est continue comme composée d'applications continues $v : (\mathcal{E}, N) \longrightarrow (\mathcal{E}, M)$ et $u : (\mathcal{E}, M) \longrightarrow (\mathcal{E}, M)$, donc $\exists K > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M((uov)(p_n - f)) \leq K.N(p_n - f)$, et par suite $(uov)(p_n)$ tend vers $(uov)(f)$ pour la norme M, de plus M est dominée par N, donc p_n tend vers f pour la norme M, ceci montre que $(uov)(p_n) = p_n$ converge vers $(uov)(f)$ et f pour la norme M et par unicité de la limite $(uov)(f) = f$, c'est à dire $uov = id_{\mathcal{E}}$.
    • **0 n'est pas valeur propre de v.**
    Si $0 \in Sp(v)$, alors $Ker(v) \neq \{0\}$, or $Ker(v) \subset Ker(uov)$, donc $Ker(uov) \neq \{0\}$, ce qui contredit que $uov = id$.
12. • **Calcul de** $(vou)(f)$. -On va montrer que u est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, N)$.
    Soit $x \in I$, $f \in \mathcal{E}$, $(u(f))'(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)f'(xsin(t))dt$, donc $|(u(f))'(x)| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |sin(t)||f'(xsin(t))|dt \leq M(f')$ et par passage au sup, on obtient $M((u(f))') \leq M(f')$.
    Avec l'inégalité $M(u(f)) \leq M(f)$ établie dans la question 6, on aura $N(u(f)) = M(u(f)) + M((u(f))') \leq$

$M(f)+M(f')=N(f)$, donc u est continue de $(\mathcal{E},N)$ dans $(\mathcal{E},N)$ ce qui rend vou continue de $(\mathcal{E},N)$ dans $(\mathcal{E},M)$, d'où l'existence de $K>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $M((vou)(p_n-f))\leq KN(p_n-f)$, donc $p_n=(vou)(p_n)$ converge vers $(vou)(f)$ pour la norme M, or p_n converge vers f pour la norme M, ce qui entraine par unicité de la limite que $(vou)(f)=f$.
- On conclut donc que $uov=vou=id_{\mathcal{E}}$, c'est à dire u et v sont inversibles et l'un est l'inverse de l'autre.

13. • **Relation entre $v(f)$ et $u(f')$.**
- Soit $f\in\mathcal{E}$, $\forall x\in I$, $v(f)(x)=f(0)+\dfrac{\pi}{2}xu(f')(x)$, c'est à dite : $v(f)=f(0)+\dfrac{\pi}{2}id_I.u(f')$.
- Le changement $z=tan(t)$ aboutit à $sin^2(t)=\dfrac{z^2}{1+z^2}$, $arctan'(x.sin(t))=\dfrac{1}{1+x^2sin^2(t)}=\dfrac{1+z^2}{1+(1+x^2)z^2}$ et $dt=\dfrac{dz}{1+z^2}$, donc
$u(arctan')(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{dz}{1+(1+x^2)z^2}=\dfrac{2}{\pi\sqrt{1+x^2}}\Big[arctan(z\sqrt{1+x^2})\Big]_0^{+\infty}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=argsh'(x)$.
En composant par v, on aura $arctan'(x)=v(argsh')(x)$, c'est à dire $\dfrac{1}{1+x^2}=1+\dfrac{\pi}{2}x.u(argsh'')(x)$, d'où $u(argsh'')(x)=\dfrac{-2x}{\pi(1+x^2)}$.

14. • **f et $u(f)$ ont même parité.**
- Soit $f\in\mathcal{E}$, $\varepsilon=\pm1$ tel que $\forall x\in I$, $f(-x)=\varepsilon f(x)$, alors $u(f)(-x)=\varepsilon u(f)(x)$.
- Réciproquement si $u(f)(-x)=\varepsilon u(f)(x)$, alors en composant par v, on obtient $f(-x)=\varepsilon f(x)$.
On conclut que f et $u(f)$ ont même parité.
- On applique le résultats précédent à $v(f)$, on obtient que $v(f)$ est paire (resp impaire) si, et seulement si, $(uov)(f)=f$ est paire (resp impaire).

D :Étude des valeurs et vecteurs propres de u et v.

15. • **Le spectre de v est l'inverse de celui de u.**
- $\lambda\in Sp(v)$ si, et seulement si, $\exists f\in\mathcal{E}$ non nul tel que $v(f)=\lambda f$ si, et seulement si, $f=(uov)(f)=\lambda u(f)$ si, et seulement si, $u(f)=\dfrac{1}{\lambda}f$ si, et seulement si, $\dfrac{1}{\lambda}\in Sp(u)$.
- Le vecteur propre de v associé à une valeur propre λ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\dfrac{1}{\lambda}$.

16. • **Stabilité de $\mathcal{D}$ par u et v.**
- Soit $f\in\mathcal{D}$, alors il existe une suite $(a_n)_n$ de $\mathbb{C}$ et $\alpha\in]0,a[$ tel que $\forall x\in]-\alpha,\alpha[$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, donc
$\forall t\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $xsin(t)\in]-\alpha,\alpha[$ et par suite $f(xsin(t))=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nsin^n(t)x^n$, ce qui entraine
$u(f)(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nsin^n(t)x^ndt$.
Posons $f_n(t)=a_nsin^n(t)x^n$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $t\longmapsto a_nsin^n(t)x^n$ est continue sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, de plus $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $\forall x\in]-\alpha,\alpha[$, $|a_nsin^n(t)x^n|\leq|a_nx^n|$ et la série $\sum a_nx^n$ converge absolument sur $]-\alpha,\alpha[$, donc la série $\sum a_nsin^n(t)x^n$ converge normalement sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$.
Ces hypothèses nous permettent de permuter l'intégrale et la série, ce qui entraine
$\forall x\in]-\alpha,\alpha[$, $u(f)(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nW_nx^n$, ce qui assure que $u(f)\in\mathcal{D}$.
- Soit $f\in\mathcal{D}$, alors $f'\in\mathcal{D}$ et la relation $v(f)(x)=f(0)+xu(f')(x)$ montre que $v(f)\in\mathcal{D}$, donc $\mathcal{D}$ est stable par v.

17. • **Un vecteur propre de u est dans $\mathcal{P}$.**
- f est de classe C^∞, donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est continue sur le segment I, ce qui assure l'existence de m_n.
- Soit f est un vecteur propre de u associé à λ, donc $\forall x\in I$, $u(f)(x)=\lambda f(x)$ et en dérivant n fois en prennant en considération la question 2, on obtient
$\forall x\in I$, $\lambda f^{(n)}(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n(t)f^{(n)}(xsin(t))dt$, donc $\forall x\in I$, $|\lambda f^{(n)}(x)|\leq\dfrac{2}{\pi}m_n.W_n$.
- L'endomorphisme u étant inversible, donc $\lambda\neq0$ et par suite $\forall x\in I$, $|f^{(n)}(x)|\leq\dfrac{2}{\pi\lambda}m_nW_n$.
- Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x\in I$ tel que $f^{(n)}(x)\neq0$, alors $m_n\neq0$.
Le passage au sup dans l'inégalité précédente entraine que $m_n\leq\dfrac{2}{\pi\lambda}m_nW_n$ et donc $1\leq\dfrac{2}{\pi\lambda}W_n$ et en

tendant n vers $+\infty$, on aura la contradiction $1 \leq 0$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in I$, $f^{(n_0)}(x) = 0$, ce qui signifie que f est une fonction polyômiale de degré $\leq n_0 - 1$.

18. • **Valeurs propres et vecteurs propres de u et v.**

- Soit $\lambda \in Sp(u)$ et $f = \sum a_k x^k \in \mathcal{P}$ de degré n, un vecteur propre associé, alors $u(f)(x) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n} a_k W_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k$, donc $\forall k \in [[0, n]]$, $(\lambda - \dfrac{2}{\pi}W_k)a_k = 0$.

$a_n \neq 0$, donc $\lambda = \dfrac{2}{\pi}W_n$ et par suite $\forall k \in [0, n-1]$, $\dfrac{2}{\pi}(W_n - W_k)a_k = 0$ et puisque $W_n \neq W_k$, on obient $a_k = 0$, donc $f(x) = a_n x^n = a_n f_n(x)$.

Réciproquement $u(f_n)(x) = \dfrac{2}{\pi}W_n f_n(x)$.

On conclusion, $Sp(u) = \{\lambda_n = \dfrac{2}{\pi}W_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ et $f_n : x \longmapsto x^n$ est le vecteur propre associé à λ_n.

- D'après la question 15, les valeurs propres de v sont les inverses de celles de u, c'est à dire $Sp(v) = \{\dfrac{\pi}{2W_n} \ / \ n \in \mathbb{N}\} = \{1, nW_{n-1} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $f_n : x \longmapsto x^n$ est le vecteur propre associé à la valeur propre $\dfrac{\pi}{2W_n}$.

19. • **$\mathcal{E}$ ne peut admettre une base de vecteurs propres de u.**

- Si $\mathcal{E}$ admet une base de vecteurs propres de u, donc c'est aussi de v d'après 15, alors tout élément $f \in \mathcal{E}$ s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{P}$, donc $f \in P$ et par suite $\mathcal{E} = \mathcal{P}$, ce qui est clairement absurde.

• **$Sp(u)$ n'est pas un fermé de $\mathbb{C}$.**

- Si l'ensemble des valeurs propres de u est une partie fermée de $\mathbb{C}$, alors la limite 0 de la suite $(\dfrac{2}{\pi}W_n)_n$ est aussi une valeur propre de u, ce qui contredit que u est inversible.

• **$Sp(v)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.**

- Soit $(u_n)_n$ une suite de $Sp(v) = \{\lambda_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ convergente vers $l \in \mathbb{R}$, la suite $(\lambda_n)_n$ tend vers $+\infty$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0 \ \lambda_n \geq l$, donc $\{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \subset \{\lambda_0, ..., \lambda_{n_0}\}$ qui est fermé comme ensemble fini, donc $l \in \{\lambda_0, ..., \lambda_{n_0}\} \subset Sp(v)$.

On conclut que $Sp(v)$ est un fermé.

- Une deuxième idée consiste à écrire $\mathbb{C} \setminus Sp(v) = \mathbb{C} \setminus]1, +\infty[\cup \bigcup_{n=0}^{+\infty}]\lambda_n, \lambda_{n+1}[$, qui est un ouvert de $\mathbb{C}$ comme réunion dénombrable d'ouverts, donc $Sp(v)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.