

ÉNS PC 2008

Corrigé¹ de l'épreuve commune de mathématiques

Avant-propos. Une caractéristique notable – et regrettable – de ce problème est qu'il s'agit d'une redite du sujet *Maths 1* proposé dans la filière M' par l'École normale supérieure de Cachan en 1990. Les questions sont posées dans le même ordre, avec les mêmes notations et la même formulation, si l'on excepte l'ajout de quelques indications.

Une conséquence malheureuse de ce clonage est la formulation de la question **D.1**, qui demande de prouver une convergence uniforme, notion ayant disparu du programme de PC il y a quelques années.

Cette question aurait mérité une réécriture complète et non simplement une indication en passant.

Partie A

A.1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n vérifiant :

$$\forall x > 0, \quad \chi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \exp(-1/x),$$

ce qui montre que toutes les dérivées successives de χ , y compris χ elle-même, ont une limite nulle en 0.

Ainsi, la fonction χ est continue sur \mathbb{R} , de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* , et ses dérivées de tous ordres ont une limite nulle en 0, si bien que χ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

A.2. Il suffit de poser $\theta(x) = \chi(x - 1/2)\chi(2 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

A.3. Soit $x > 0$. L'encadrement $\frac{1}{2} < 2^{-j}x < 2$ équivaut à $-\frac{\ln x}{\ln 2} - 1 < j < -\frac{\ln x}{\ln 2} + 1$, si bien qu'il y a au plus deux indices j pour lesquels le terme $\theta(2^{-j}x)$ est non nul. Le nombre $\Phi(x)$ est donc bien défini, la somme étant finie.

L'équivalence ci-dessus montre aussi qu'il y a au moins un indice dans la somme pour lequel le terme est non nul, si bien que $\Phi(x)$ est strictement positif.

De plus, si l'on fixe $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in]2^{k-1}, 2^{k+1}[$, l'inégalité $2^{-j}x \leq \frac{1}{2}$ a lieu pour tout entier $j \geq k + 2$ et l'inégalité $2^{-j}x \geq 2$ a lieu pour tout entier $j \leq k - 2$.

Pour tout $x \in]2^{k-1}, 2^{k+1}[$, on a donc $\Phi(x) = \sum_{j=k-1}^{k+1} \theta(2^{-j}x)$, si bien que Φ est de classe C^∞ sur l'intervalle $]2^{k-1}, 2^{k+1}[$.

Comme l'intervalle $]0, +\infty[$ est la réunion des intervalles de la forme $]2^{k-1}, 2^{k+1}[$ pour k dans \mathbb{Z} , la fonction Φ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

A.4. La fonction $x \mapsto |x|$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* , ce qui montre par composition que φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* .

De plus, la fonction $x \mapsto \theta(|x|)$ est nulle sur $] -1/2, 1/2[$ donc φ aussi, si bien que φ est également de classe C^∞ sur cet intervalle. La fonction φ est donc de classe C^∞ sur \mathbb{R} tout entier.

Les propriétés de θ obtenues en **A.2** donnent immédiatement que $\varphi(x)$ est strictement positif pour $1/2 < |x| < 2$ et nul sinon.

Enfin, par positivité de la fonction θ , pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \theta(2^{-j}|x|) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta(2^{-j}|x|) = \Phi(|x|),$$

donc $\sum_{j=0}^{+\infty} \varphi(2^{-j}x) \leq 1$.

Pour $|x| \geq 1$ et $j \leq -1$, on a : $2^{-j}|x| \geq 2$ donc $\theta(2^{-j}x) = 0$, si bien qu'il ne reste que les indices j positifs dans la somme définissant $\Phi(x)$, ce qui donne $\sum_{j=0}^{+\infty} \varphi(2^{-j}x) = 1$.

¹Par Édouard LEBEAU, professeur de mathématiques au lycée Henri POINCARÉ de Nancy. Contact : edouardlebeau-pc@yahoo.fr

B.1. Commençons par remarquer que l'intégrale $\psi(\xi)$ est bien définie car l'intégrande est une fonction continue nulle en dehors du segment $[-2, +2]$.

Pour prouver la continuité, rappelons l'énoncé du théorème de continuité sous l'intégrale.

Théorème. Soit $F : I \times J \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de deux variables réelles, où I et J sont des intervalles réels. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue sur I ;
- il existe une fonction $G : J \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et intégrable sur J vérifiant : $\forall (x, t) \in I \times J, |F(x, t)| \leq G(x)$.

La fonction $t \mapsto \int_J F(x, t) dx$ est alors continue sur I .

La fonction $F : (x, t) \mapsto \varphi(x) \exp(ixt)$ est continue par rapport à chacune de ses variables (elle est même continue sur \mathbb{R}^2) et la majoration $|F(x, t)| \leq \varphi(x)$ permet d'appliquer le théorème ci-dessus, car la fonction φ est continue sur \mathbb{R} et intégrable car nulle en dehors d'un segment.

Soit $\xi \neq 0$. Écrivons par exemple $\psi(\xi) = \int_{-3}^3 \varphi(x) \exp(ix\xi) dx$ puis effectuons trois intégrations par parties. Les termes tout intégrés sont nuls car φ et ses dérivées s'annulent en 3 et en -3 .

Il reste $\psi(\xi) = \frac{1}{i\xi^3} \int_{-3}^3 \varphi'''(x) e^{ix\xi} dx$, puis

$$|\xi^3 \psi(\xi)| \leq \int_{-3}^3 |\varphi'''(x)| dx,$$

et cette inégalité est bien sûr vraie aussi pour $\xi = 0$.

Ainsi, la fonction $\xi \mapsto \xi \psi(\xi)$ étant dominée par $\xi \mapsto \frac{1}{\xi^2}$, elle est intégrable sur $[1, +\infty[$ et sur $] -\infty, -1]$, donc sur \mathbb{R} .

B.2. Comme à la question **A.3**, on montre que pour x fixé, seul un nombre fini de termes de la somme définissant $L(x)$ sont non nuls, si bien que cette somme est bien définie.

L'expression de $L(x + 2\pi)$ est la même que celle de $L(x)$ où k est remplacé par $k + 1$. Un décalage d'indice montre que ces deux sommes sont égales. La fonction L est donc 2π -périodique.

Ensuite, de la même façon, pour tout x dans le segment $[0, 4\pi]$, on montre que le terme d'indice k est nul pour tout entier k non compris entre $-2N - 2$ et $2N$, si bien que L est définie par une somme finie sur cet intervalle, qui est donc de classe C^∞ .

Par 2π -périodicité, la fonction L est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme on l'a vu, sur le segment $[0, 2\pi]$, la somme définissant la fonction L est finie, si bien que l'on peut permuter les symboles de somme et d'intégrale par simple linéarité de l'intégrale.

On effectue ensuite le changement de variable $u = \frac{(2\pi)^{-1}x + k}{N}$ dans l'intégrale qui est le terme d'indice k de la somme, :

$$\begin{aligned} \widehat{L}(n) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \left(\frac{(2\pi)^{-1}x + k}{N} \right) \exp(i((2\pi)^{-1}x + k)t - inx) dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} N \int_{k/N}^{(k+1)/N} \varphi(u) \exp(iNtu - i2\pi nNu + i2\pi kn) du \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} N \int_{k/N}^{(k+1)/N} \varphi(u) \exp(iNtu - i2\pi nNu) du. \end{aligned}$$

L'intégrande ne dépendant plus de k , on peut maintenant appliquer la relation de Chasles sur les sommes finies :

$$\sum_{k=-r}^r N \int_{k/N}^{(k+1)/N} \varphi(u) \exp(iNtu - i2\pi nNu) du = \int_{-r/N}^{(r+1)/N} \varphi(u) \exp(iNtu - i2\pi nNu) du.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, il vient :

$$\widehat{L}(n) = N \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \exp(iNtu - i2\pi nNu) du = N\psi(Nt - 2\pi nN).$$

Remarquons maintenant que la fonction L , étant de classe C^∞ , vérifie bien les hypothèses du théorème de convergence normale (de classe C^1 par morceaux, continue, périodique), si bien qu'elle est égale à la somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{L}(n) \exp(inx).$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k/N) \exp(ikt) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} N \psi(Nt - 2\pi nN).$$

Il n'y a alors plus qu'à poser $k = -n$ dans la dernière somme pour obtenir l'identité attendue.

B.3. Là encore, pour n fixé, la fonction ψ_n est définie en fait par une somme finie², ce qui garantit sa continuité.

L'intégrale $\int_0^{2\pi} |h(t)\psi_n(t)| dt$ est donc bien définie.

Remarquons maintenant l'égalité $\psi_n(t) = 2^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(2^n(t + 2k\pi))$.

Soit λ un majorant de $\xi^3 \psi(\xi)$. Pour $t \in [0, 2\pi]$ et $k \geq 1$, on a la majoration suivante : $|\psi(2^n(t + 2k\pi))| \leq \frac{\lambda}{2^{3n} 8\pi^3 k^3}$.

Pour $t \in [0, 2\pi]$ et $k \leq -2$, on a la majoration suivante : $|\psi(2^n(t + 2k\pi))| \leq \frac{\lambda}{2^{3n} 8\pi^3 (1-k)^3}$.

Comme h est bornée sur $[0, 2\pi]$, on en déduit que les séries $\sum_{k \geq 1} 2^n \psi(2^n(t + 2k\pi))h(t)$ et $\sum_{k \leq -2} 2^n \psi(2^n(t + 2k\pi))h(t)$ convergent normalement sur $[0, 2\pi]$, ce qui permet l'intégration terme à terme :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |h(t)\psi_n(t)| dt &= 2^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\int_0^{2\pi} |h(t)\psi(2^n(t + 2k\pi))| dt}_{\text{posons } u=(t+2k\pi)2^n} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi 2^n k}^{2\pi 2^n (k+1)} \underbrace{\left| h\left(\frac{u}{2^n} - 2k\pi\right) \right|}_{=|h(u/2^n)|} |\psi(u)| du = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(u/2^n)\psi(u)| du \\ &\leq \frac{M}{2^{n\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^\alpha |\psi(u)| du. \end{aligned}$$

Pour justifier les dernières étapes, signalons que $u \mapsto |u|^\alpha \psi(u)$ est intégrable sur \mathbb{R} par le même argument qu'en **B.1** et qu'on rassemble toutes les intégrales par un passage à la limite après avoir appliqué la relation de Chasles dans une somme finie comme en **B.2**.

C.1. Il suffit d'effectuer le changement de variable $t \mapsto u = x - t$, puis de remarquer que l'intégrale d'une fonction 2π -périodique sur un intervalle de longueur 2π ne dépend pas du choix de cet intervalle.

C.2. Comme on l'a déjà signalé, la fonction ψ_n est définie par une somme finie. Plus précisément, le nombre $\varphi(2^{-n}k)$ est nul pour tout indice k ne vérifiant pas l'encadrement $2^{n-1} < |k| < 2^{n+1}$. La linéarité de l'intégrale donne alors pour tout $x \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} (f * \psi_n)(x) &= \sum_{2^{n-1} < |k| < 2^{n+1}} \frac{\varphi(2^{-n}k)}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(ik(x-t)) dt \\ &= \sum_{2^{n-1} < |k| < 2^{n+1}} \varphi(2^{-n}k) \widehat{f}(k) \exp(ikx). \end{aligned}$$

Cette égalité montre au passage que $f * \psi_n$ est un élément de $E_{2^{n+1}}$.

C.3. Rappelons que $\widehat{e}_k(m)$ vaut 1 pour $k = m$ et 0 sinon. L'égalité $f * \psi_n = \sum_{2^{n-1} < |k| < 2^{n+1}} \varphi(2^{-n}k) \widehat{f}(k) e_k$ et la

linéarité de l'application $g \mapsto \widehat{g}(k)$ montrent que $\widehat{f * \psi_n}(k)$ vaut $\varphi(2^{-n}k) \widehat{f}(k)$ pour tout indice k vérifiant l'encadrement $2^{n-1} < |k| < 2^{n+1}$ et 0 pour les autres indices. Comme $\varphi(2^{-n}k)$ est nul pour ces mêmes autres indices, l'égalité $\widehat{f * \psi_n}(k) = \varphi(2^{-n}k) \widehat{f}(k)$ est en fait valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$.

²On peut être surpris que cette indication arrive seulement maintenant.

Comme $\widehat{f * \psi_n}(0)$ est nul pour tout $n \in \mathbb{N}$, il reste $\widehat{f_r}(0) = \widehat{f}(0)$.

Pour $k \neq 0$, on obtient :

$$\widehat{f_r}(k) = \sum_{n=0}^r \varphi(2^{-n}k) \widehat{f}(k), \quad \text{puis}$$

$$\left| \widehat{f_r}(k) \right| \leq \left| \widehat{f}(k) \right| \sum_{n=0}^r \varphi(2^{-n}k) \leq \left| \widehat{f}(k) \right| \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(2^{-n}k) \leq \left| \widehat{f}(k) \right|.$$

La dernière inégalité est une conséquence de **A.4**.

Comme f et \widehat{f} sont continues et 2π -périodiques, on peut leur appliquer la formule de Parseval :

$$\|f_r\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f_r}(k) \right|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(k) \right|^2 = \|f\|_2^2.$$

Soient maintenant deux entiers naturels N et r avec $2^r \geq N$. Soit $f \in E_N$. Rappelons que pour montrer que deux fonctions continues et 2π -périodiques sont égales, il suffit de montrer qu'elles ont les mêmes coefficients de Fourier.

On a déjà remarqué l'égalité $\widehat{f_r}(0) = \widehat{f}(0)$.

Soit maintenant un indice k non nul. Comme on l'a vu plus haut, on a :

$$\widehat{f_r}(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^r \varphi(2^{-n}k)}_{S_k} \widehat{f}(k).$$

Pour $|k| \geq N$, on a $\widehat{f}(k) = 0$ donc $\widehat{f_r}(k) = 0 = \widehat{f}(k)$.

Il reste à montrer que S_k vaut 1 pour $|k| < N$.

Comme $|k|$ est supérieur ou égal à 1, il suffit, d'après **A.4**, de montrer que $\sum_{n=0}^r \varphi(2^{-n}k)$ vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(2^{-n}k)$.

Or, pour tout $n \geq r+1$, on a $2^{-n}|k| \leq 2^{-r-1}N \leq 1/2$ car $N \leq 2^r$, donc $\varphi(2^{-n}k) = 0$.

On a alors montré que f et f_r sont égales car $\widehat{f}(k) = \widehat{f_r}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Soit maintenant $f \in E$. Soit $r \in \mathbb{N}$ Soit $N = 2^r$. Notons $S_N f = \sum_{|j| \leq N} \widehat{f}(j) e_j$ la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de f . Comme $S_N f$ est dans E_N , on a l'égalité $(S_N f)_r = S_N f$.

L'inégalité triangulaire donne alors :

$$\|f_r - f\|_2 = \|(f_r - (S_N f)_r) + S_N f - f\|_2 \leq \|f_r - (S_N f)_r\|_2 + \|S_N f - f\|_2 \leq 2\|f - S_N f\|_2,$$

car $\|f_r - (S_N f)_r\|_2 = \|(f - S_N f)_r\|_2 \leq \|f - S_N f\|_2$.

Le théorème de Parseval donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n f\|_2 = 0$, donc $\lim_{r \rightarrow +\infty} \|f - S_{2^r} f\|_2 = 0$ puis $\lim_{r \rightarrow +\infty} \|f_r - f\|_2 = 0$.

D.1 et D.2. Soient $f \in \Lambda^\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 2\pi]$.

On a : $(f * \psi_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) \psi_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x-t) - f(x)) \psi_n(t) dt$ car $\widehat{\psi_n}(0) = 0$. On en déduit :

$$\begin{aligned} |(f * \psi_n)(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |\psi_n(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f\|_\alpha |t|^\alpha |\psi_n(t)| dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\alpha}{2\pi} 2^{-n\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^\alpha |\psi(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est une application de **B.3**.

En posant $H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^\alpha |\psi(\xi)| d\xi$, on a alors $\|f * \psi_n\|_\infty \leq H \|f\|_\alpha 2^{-n\alpha}$.

La série $\sum_{n \geq 0} 2^{-n\alpha}$ converge car $0 < 2^{-\alpha} < 1$ donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f * \psi_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

Ainsi, la suite de fonctions $(f_r)_{r \geq 0}$ converge simplement vers une fonction g , qui est continue par convergence normale, et se prolonge par périodicité en un élément de E , noté encore g .

Montrer que la suite $(f_r)_{r \geq 0}$ converge uniformément vers g revient à montrer que $\|g - f_r\|_\infty$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$. Dans le cadre du programme actuel, on dirait plutôt que les f_r approchent g uniformément. Pour démontrer ce fait, nous allons commencer par démontrer l'inégalité demandée à la question suivante (eh oui!).

Soient r et p dans \mathbb{N} . On a :

$$\begin{aligned} f_{r+p} - f_r &= \sum_{n=r+1}^{r+p} f * \psi_n && \text{donc} \\ \|f_{r+p} - f_r\|_\infty &\leq \sum_{n=r+1}^{r+p} \|f * \psi_n\|_\infty \leq \mathbf{H} \|f\|_\alpha \sum_{n=r+1}^{r+p} 2^{-\alpha n} \\ &\leq \mathbf{H} \|f\|_\alpha \sum_{n=r+1}^{+\infty} 2^{-\alpha n} = \mathbf{H} \|f\|_\alpha \frac{2^{-\alpha(r+1)}}{1 - 2^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, on a : $|f_{r+p}(x) - f_r(x)| \leq \mathbf{H} \|f\|_\alpha \frac{2^{-\alpha(r+1)}}{1 - 2^{-\alpha}}$. En faisant tendre p vers $+\infty$, il vient :
 $|g(x) - f_r(x)| \leq \mathbf{H} \|f\|_\alpha \frac{2^{-\alpha(r+1)}}{1 - 2^{-\alpha}}$.

On en déduit la majoration $\|g - f_r\|_\infty \leq \mathbf{H} \|f\|_\alpha \frac{2^{-\alpha(r+1)}}{1 - 2^{-\alpha}}$, qui entraîne en particulier que $\|g - f_r\|_\infty$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$.

Remarquons maintenant l'inégalité $\|g - f_r\|_2 \leq \|g - f_r\|_\infty$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, puis, par inégalité triangulaire :

$$\|g - f\|_2 \leq \|g - f_r\|_2 + \|f_r - f\|_2 \leq \|g - f_r\|_\infty + \|f_r - f\|_2.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $\|g - f\|_2 = 0$, donc $g = f$.

Comme f et g sont égales, nous avons bien démontré la première inégalité de la question **D.2** et nous avons prouvé que $\|f - f_r\|_\infty$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$, si bien que la suite $(f_r)_{r \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Soit maintenant un entier $N \geq 2$. Il existe un unique $r \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $2^r \leq N < 2^{r+1}$. Comme f_{r-1} est dans E_{2^r} , qui est inclus dans E_N , on a :

$$d(f, E_N) \leq \|f - f_{r-1}\|_\infty \leq \frac{\mathbf{H}}{1 - 2^{-\alpha}} \|f\|_\alpha (2^r)^{-\alpha} \leq \frac{\mathbf{H} 2^\alpha}{1 - 2^{-\alpha}} \|f\|_\alpha N^{-\alpha}.$$

Une constante C répondant à la question est $C = \frac{\mathbf{H} 2^\alpha}{1 - 2^{-\alpha}}$.
