

Mines 2006 -PSI première épreuve : corrigé

Partie I.

1. Soit $f_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et il y a donc des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et $+\infty$.

- Au voisinage de 0, $f_{\alpha,\beta}(t) \sim t^{\alpha-1}$ est intégrable si et seulement si $\alpha > 0$.
- Au voisinage de $+\infty$, $f_{\alpha,\beta}(t) = o(1/t^2)$ (par croissances comparées et car $z > 0$) et est donc intégrable.

Finalement, $f_{\alpha,\beta} \in L^1(\mathbb{R}^+)$ si et seulement si $\alpha > 0$.

2. Soit $g_{\alpha,\beta} : t \mapsto (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$. C'est une fonction continue sur $] -1, 0[$ et il y a donc des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et -1 .

- Au voisinage de 0, $g_{\alpha,\beta}(t) \sim (-t)^{\alpha-1}$ est intégrable si et seulement si $\alpha > 0$.
- Au voisinage de -1 , $g_{\alpha,\beta}(t) \sim (1+t)^{\beta-1}e^z$ est intégrable si et seulement si $\beta > 0$.

Finalement, $g_{\alpha,\beta} \in L^1(]-1, 0[)$ si et seulement si $\beta > 0$.

3. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres. On note $f : (z, t) \mapsto t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta}e^{-zt}$.

- $\forall z > 0, t \mapsto f(z, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\alpha > 0$.
- $\forall z > 0, t \mapsto \partial_1 f(z, t) = -t^\alpha(1+t)^\beta e^{-zt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall t > 0, z \mapsto \partial_1 f(z, t) = -t^\alpha(1+t)^\beta e^{-zt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour tout $a > 0$, on a

$$\forall z > 0, \forall t > 0, |\partial_1 f(z, t)| \leq e^{-at} t^\alpha (1+t)^\beta$$

Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ d'après la question 1.

Le théorème s'applique et indique que $I_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ avec

$$\forall z > 0, I_1'(z) = \int_0^{+\infty} -t^\alpha(1+t)^\beta e^{-zt} dt = -K(z)$$

On procède de même pour I_2 . On note cette fois $f : (z, t) \mapsto t^\alpha(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$.

- $\forall z > 0, t \mapsto f(z, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\alpha > 0 > -1$.
- $\forall z > 0, t \mapsto \partial_1 f(z, t) = -t^{\alpha+1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall t > 0, z \mapsto \partial_1 f(z, t) = -t^{\alpha+1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour tout $a > 0$, on a

$$\forall z > 0, \forall t > 0, |\partial_1 f(z, t)| \leq e^{-at} t^{\alpha+1} (1+t)^{\beta-1}$$

Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ d'après la question 1.

Le théorème s'applique et indique que $I_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ avec

$$\forall z > 0, I_2'(z) = \int_0^{+\infty} -t^{\alpha+1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt} dt$$

Par ailleurs, on a

$$\forall z > 0, I_2(z) - K(z) = \int_0^{+\infty} t^\alpha(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}(1-(1+t)) dt$$

et on obtient bien

$$I_2' = I_2 - K$$

4. Une intégration par parties donne, pour $0 < a < b$

$$z \int_a^b t^\alpha(1+t)^\beta e^{-zt} dt = \left[-e^{-zt} t^\alpha(1+t)^\beta \right]_a^b + \int_a^b (\alpha t^{\alpha-1}(1+t)^\beta + \beta t^\alpha(1+t)^{\beta-1}) e^{-zt} dt$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers l'infini, tous les termes admettent une limite et on obtient

$$zK(z) = \int_0^{+\infty} (\alpha t^{\alpha-1}(1+t)^\beta + \beta t^\alpha(1+t)^{\beta-1}) e^{-zt} dt = \alpha I_1(z) + \beta I_2(z)$$

5. En combinant les questions précédentes, on obtient

$$\forall z > 0, I'(z) = A(z)I(z) \text{ avec } A(z) = \begin{pmatrix} -\alpha/z & -\beta/z \\ -\alpha/z & 1 - \beta/z \end{pmatrix}$$

6. $K = \frac{1}{z}(\alpha I_1 + \beta I_2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$(*) : zK' + K = -\alpha K + \beta(-K + I_2)$$

Cette identité montre que K est de classe $\mathcal{C}^2$ avec

$$zK'' + 2K' = -\alpha K' - \beta K' + \beta(I_2 - K)$$

(*) donne une expression de βI_2 que l'on peut utiliser ci-dessus. Tout calcul fait, on obtient

$$zK'' + (2 + \alpha + \beta - z)K' - (\alpha + 1)K = 0$$

7. On pourrait reprendre les mêmes arguments (si ce n'est que l'on intègre entre -1 et 0) pour justifier les dérivations sous l'intégrale et montrer que

$$J_1'(z) = - \int_{-1}^0 (-t)^\alpha(1+t)^\beta e^{-zt} dt = -L$$

$$J_2'(z) = \int_{-1}^0 (-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta-1} e^{-zt} dt = \int_{-1}^0 (-t)^\alpha(-t-1+1)(1+t)^{\beta-1} e^{-zt} dt = J_2(z) - L(z)$$

On opère de même une intégration par partie pour obtenir

$$zL = \alpha J_1 + \beta J_2$$

Le reste découlant de ces relations, on obtient encore que J vérifie (S) et que L vérifie la même équation différentielle que K .

Partie II.

8. La fonction $h : u \mapsto (1 + u)^{\beta-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. L'inégalité des accroissements finis indique que

$$\forall t > 0, \forall z \geq 1, \left| f\left(\frac{t}{z}\right) - f(0) \right| \leq \frac{t}{z} \max_{u \in [0, t/z]} |f'(u)|$$

On a $f'(u) = (\beta - 1)(1 + u)^{\beta-2}$.

- Si $\beta \geq 2$, f' croît sur $\mathbb{R}^+$ et est positive. Le maximum précédent est atteint en $t/z \leq t$ et est plus petit que $f'(t) = (\beta - 1)(1 + t)^{\beta-2}$.
- Si $\beta \in [1, 2]$, f' décroît sur $\mathbb{R}^+$ et est positive. Le maximum précédent est atteint en 0 et vaut $\beta - 1$.
- Si $\beta \in]0, 1]$, f' croît sur $\mathbb{R}^+$ et est négative. Le maximum précédent est atteint en 0 et vaut $1 - \beta$.

Les cas 2 et 3 amènent au même résultat (au signe près et cela est réglé par l'emploi d'une valeur absolue) et on a finalement

$$\forall t > 0, \forall z \geq 1, \left| \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{\beta-1} - 1 \right| \leq \begin{cases} \frac{t}{z} |\beta - 1| (1 + t)^{\beta-2} & \text{si } \beta \geq 2 \\ \frac{t}{z} |\beta - 1| & \text{si } 0 < \beta \leq 2 \end{cases}$$

9. Le changement de variable $u = zt$ donne

$$H(z) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} (1 + t)^{\beta-1} e^{-zt} dt = \frac{1}{z^\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{\beta-1} e^{-u} du$$

On a donc (on peut majorer en faisant passer les valeurs absolues dans l'intégrale car on travaille avec des fonctions intégrables)

$$|H(z) - \Gamma(\alpha)z^{-\alpha}| \leq \frac{1}{z^\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} \left| \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{\beta-1} - 1 \right| e^{-u} du$$

- Si $\beta \geq 2$ le terme sous l'intégrale est majoré par $u^{\alpha-1} e^{-u} \frac{u}{z} |\beta - 1| (1 + u)^{\beta-2}$. Cette fonction de u est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on a donc

$$|H(z) - \Gamma(\alpha)z^{-\alpha}| \leq \frac{1}{z^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} |\beta - 1| (1 + u)^{\beta-2} du = o(z^{-\alpha})$$

- Si $\beta \leq 2$ le terme sous l'intégrale est majoré par $u^{\alpha-1} e^{-u} \frac{u}{z} |\beta - 1|$. Cette fonction de u est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on a donc

$$|H(z) - \Gamma(\alpha)z^{-\alpha}| \leq \frac{1}{z^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} |\beta - 1| du = o(z^{-\alpha})$$

On obtient dans tous les cas $H(z) - \Gamma(\alpha)z^{-\alpha} = o(z^{-\alpha})$ et donc

$$H(z) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} (1 + t)^{\beta-1} e^{-zt} dt \sim \Gamma(\alpha)z^{-\alpha}$$

10. Le changement de variable $u = z(1 + t)$ donne

$$\int_{-1}^{-1/2} (-t)^{\alpha-1} (1 + t)^{\beta-1} e^{-zt} dt = \frac{e^z}{z^\beta} \int_0^{\frac{z}{2}} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{\alpha-1} u^{\beta-1} e^{-u} du$$

11. On pourra conclure immédiatement si l'on montre que

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{z}{2}} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{\alpha-1} u^{\beta-1} e^{-u} du = \Gamma(\beta)$$

Pour cela, on forme la différence et on montre qu'elle est de limite nulle. Cette différence vaut $A(z) + B(z)$ avec

$$A(z) = \int_0^{\frac{z}{2}} \left(\left(1 - \frac{u}{z}\right)^{\alpha-1} - 1 \right) u^{\beta-1} e^{-u} du$$

$$B(z) = - \int_{z/2}^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u} du$$

L'intégrabilité de $u \mapsto u^{\beta-1} e^{-u}$ au voisinage de l'infini donne immédiatement $B(z) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow +\infty$.

La fonction $h : v \mapsto (1-v)^{\alpha-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1/2]$. Sa dérivée est bornée sur ce segment par une constante M et l'ingalité des accroissements finis donne

$$\forall t \in [0, 1/2], |(1-t)^{\alpha-1} - 1| \leq Mt$$

Quand $u \in [0, z/2]$, $u/z \in [0, 1/2]$ et on a donc

$$|A(z)| \leq \int_0^{\frac{z}{2}} M \frac{u}{z} u^{\beta-1} e^{-u} du$$

Comme $u \mapsto u^{\beta} e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ on peut même écrire

$$|A(z)| \leq \frac{M}{z} \int_0^{+\infty} u^{\beta} e^{-u} du$$

ce qui prouve que $A(z) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 0$.

On a prouvé que

$$\int_{-1}^{-1/2} (-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt} dt \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} e^z z^{-\beta} \Gamma(\beta)$$

12. Si $t \in [-1/2, 0]$, $-zt \in [0, z/2]$ et donc

$$0 \leq \int_{-1/2}^0 (-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt} dt \leq e^{z/2} \int_{-1/2}^0 (-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} dt$$

ce terme est négligeable devant $e^z z^{-\beta}$ quand $z \rightarrow +\infty$. On obtient donc le même équivalent en ajoutant cette intégrale et celle de la question précédente (si $f \sim g$ et $h = o(g)$ alors $f + h \sim g$).

On a donc

$$\int_{-1}^0 (-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt} dt \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} e^z z^{-\beta} \Gamma(\beta)$$

13. Les questions précédentes donnent

$$I_1(z) J_2(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) e^z z^{-\alpha-\beta}$$

$$-I_2(z) J_1(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1) e^z z^{-\alpha-\beta-2}$$

Le second terme étant négligeable devant le premier, la somme des deux équivaut au premier et donc

$$W(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) e^z z^{-\alpha-\beta}$$

14. On connaît I'_1, I'_2 (resp. J'_1, J'_2) en fonction de I_1, I_2 (resp. J_1, J_2). On peut donc exprimer $W' = I'_1 J_2 + I_1 J'_2 - I'_2 J_1 - I_2 J'_1$ en fonction de I_1, I_2, J_1, J_2 . Tout calcul (au brouillon) fait on obtient

$$\forall z > 0, W'(z) = \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{z}\right) W(z)$$

15. En résolvant l'équation précédente, on obtient l'existence d'une constante a telle que

$$\forall z > 0, W(z) = a \frac{e^z}{z^{\alpha+\beta}}$$

En regardant la limite de $z^{\alpha+\beta} e^{-z} W(z)$ en l'infini, on obtient $a = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$. On a donc

$$\forall z > 0, W(z) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \frac{e^z}{z^{\alpha+\beta}}$$

16. W étant non nulle, les solutions I et J sont indépendantes. L'ensemble des solutions de (S) étant un espace vectoriel de dimension 2 (puisque $z \mapsto A(z)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$), il est égal à $Vect(I, J)$. La forme générale d'une solution de (S) sur $\mathbb{R}^{+*}$ est donc

$$z \mapsto \begin{pmatrix} aI_1(z) + bJ_1(z) \\ aI_2(z) + bJ_2(z) \end{pmatrix}$$

Partie III.

17. En développant par la formule du binôme (et comme chaque intégrale écrite existe)

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt} dt = \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{k} \int_0^{+\infty} t^{k+\alpha-1} e^{-zt} dt$$

Par ailleurs, le changement de variable $u = zt$ donne (pour $z \neq 0$)

$$\forall j > 0, \int_0^{+\infty} t^j e^{-zt} dt = \frac{1}{z^{j+1}} \Gamma(j+1)$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt} dt = z^{1-\beta-\alpha} P(z) \text{ avec } P(z) = \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{k} \Gamma(k+\alpha) z^{\beta-1-k} \in \mathbb{R}_{\beta-1}[X]$$

Le coefficient de $X^{\beta-1}$ dans P vaut $\Gamma(\alpha) \neq 0$ et P est donc de degré $\beta-1$.

18. Si a est un entier négatif alors (u_k) est nulle à partir d'un certain rang et le rayon de convergence cherché est infini. Sinon, pour tout $x \neq 0$, $u_k x^k$ est non nul et

$$\frac{|u_{k+1} x^{k+1}|}{|u_k x^k|} = |x| \frac{|a+k|}{|(k+1)(b+k)|} \rightarrow 0$$

Par règle de D'Alembert, $\sum (u_k x^k)$ converge absolument. On a donc encore un rayon de convergence infini.

19. On sait que

$$\forall u \in \mathbb{R}, e^u = \sum_{k \geq 0} \frac{u^k}{k!}$$

On en déduit donc que

$$\int_{-1}^0 (-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt} dt = \int_{-1}^0 \left(\sum_{k \geq 0} (-t)^{\alpha-1+k} (1+t)^{\beta-1} \frac{z^k}{k!} \right) dt = \int_{-1}^0 \sum_{k \geq 0} h_k(t) dt$$

On veut intervertir la somme et l'intégrale. On va pour cela utiliser un théorème de cours dont nous commençons par vérifier les hypothèses.

- Pour tout k , h_k est intégrable sur $] -1, 0[$ (les puissances sont > -1 puisque $\alpha, \beta > 0$).
- $\sum (h_k)$ converge simplement sur $] -1, 0[$ et la somme est continue sur $] -1, 0[$ (c'est $t \mapsto (-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt}$).
- Le changement de variable $u = -t$ et les formules rappelées par l'énoncé donnent

$$\int_{-1}^0 |h_k| = \int_0^1 u^{\alpha-1+k} (1-u)^{\beta-1} du \frac{z^k}{k!} = \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)} \frac{z^k}{k!}$$

En itérant la relation $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ ceci devient

$$\int_{-1}^0 |h_k| = \int_0^1 u^{\alpha-1+k} (1-u)^{\beta-1} du \frac{z^k}{k!} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{(\alpha, k) z^k}{k! (\alpha+\beta, k)}$$

On a vu plus haut que ceci est le terme général d'une série convergente.

L'interversion est licite. Le calcul précédent (h_k est positive !) donne alors

$$\int_{-1}^0 (-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} F(\alpha, \alpha+\beta, z)$$

20. Pour les séries entières, la dérivation sous le signe somme est licite. Avec les notations de l'énoncé, on a donc (après regroupement)

$$xy''(x) + (b-x)y'(x) - ay(x) = \sum_{k \geq 0} ((k+1)(k+b)u_{k+1} - (a+k)u_k) x^k$$

Par ailleurs, on vu plus haut que $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{a+k}{(k+1)(b+k)}$ et les termes ci-dessus sont donc nuls :

$$xy''(x) + (b-x)y'(x) - ay(x) = 0$$

21. Soit $y(z) = z^{1-b} f(z)$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si y l'est et, dans ce cas, le calcul (fait au brouillon) montre que

$$xy''(x) + (b-x)y'(x) - ay(x) = x^{1-b} (xf''(x) + (2-b-x)y'(x) - (a+1)y(x))$$

D'après la question 20 ceci est nul si $f(z) = F(a+1, 2-b, z)$.