

e3a PSIB 2007 un corrigé

Exercice 1.

Partie A. Utilisation de méthodes algébriques.

- 1.a. M n'étant pas inversible, il existe $Y \in F$ non nul tel que $MY \neq 0$ (l'endomorphisme canoniquement associé à M n'est pas nul et on peut trouver un élément non nul de son noyau). Soit $r = \max\{|y_i|/ i \in [1..n]\}$ (r existe car la partie est finie non vide). Comme $Y \neq 0$, on a $r > 0$. L'élément $X = \frac{1}{r}Y$ vérifie $MX = 0$ et

$$\max\{|x_i|/ i \in [1..n]\} = \frac{1}{r} \max\{|y_i|/ i \in [1..n]\} = 1$$

- 1.b. Soit X choisi comme à la question précédente et i tel que $|x_i| = 1$ (un tel i existe car un maximum est atteint). La nullité de la ligne i de MX s'écrit

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j = 0$$

On isole le terme d'indice i et on passe au module. L'inégalité triangulaire donne alors

$$|m_{i,i}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |m_{i,j}| \cdot |x_j|$$

Enfin, toutes les coordonnées de X ont un module plus petit que 1 et donc

$$|m_{i,i}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |m_{i,j}|$$

2. On va faire une récurrence sur la taille n des matrices. On note donc provisoirement N_n la matrice proposée (on devrait même écrire $N_n(a_1, \dots, a_n)$ ce que l'on ne fera pas pour alléger les notations). On veut prouver que la proposition

$$\det(N - \lambda I_n) = (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n)$$

est vraie pour tout $n \geq 1$.

- Pour $n = 2$, le déterminant est $\begin{vmatrix} -\lambda & -a_2 \\ 1 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$ et le résultat est vérifié.
- Supposons le résultat vérifié pour un $n \geq 2$. Un développement par rapport à la première ligne de $N_{n+1} - \lambda I_{n+1}$ donne

$$\det(N_{n+1} - \lambda I_{n+1}) = -\lambda \det(N_n - \lambda I_n) + (-1)^{n+1} a_{n+1} D_n$$

où D_n est un déterminant triangulaire possédant des 1 sur la diagonale. Ainsi,

$$\det(N_{n+1} - \lambda I_{n+1}) = (-1)^{n+1} \lambda (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) + (-1)^{n+1} a_{n+1}$$

On retrouve alors le résultat au rang $n + 1$ ce qui clôt la récurrence.

3. z étant racine de P , $N - zI_n$ n'est pas inversible. Il existe donc un i tel que

$$|n_{i,i} - z| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |n_{i,j}|$$

Distinguons trois cas

- Si $i = 1$, l'inégalité précédente s'écrit

$$|z| \leq |a_n|$$

- Si $i \in [2..n - 1]$, l'inégalité précédente s'écrit

$$|z| \leq 1 + |a_{n+1-i}|$$

- Si $i \in [2..n - 1]$, l'inégalité précédente s'écrit

$$|-a_1 - z| \leq 1$$

et la seconde forme de l'inégalité triangulaire indique que

$$|z| \leq 1 + |a_1|$$

Dans tous les cas, on a bien

$$|z| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$$

Partie B. Utilisation de méthodes analytiques.

- 1.a.** Toutes les fonction $t \mapsto \frac{|a_i|}{t^i}$ décroissent sur $\mathbb{R}^{+*}$ et l'un d'entre elle est même strictement décroissante (car l'un des $|a_i|$ est non nul). On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Remarque : on peut aussi dériver et montrer que $\forall t, g'(t) > 0$, l'argument de non nullité de l'un des a_i étant encore essentiel pour obtenir l'ingéalité stricte.

- 1.b.** On remarque tout d'abord que

$$\forall x > 0, Q(x) = x^n g(x)$$

Les points d'annulation de Q et g sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont donc les mêmes.

g tend vers 1 en $+\infty$ et vers $-\infty$ en 0 (là encore on se sert de la non nullité de l'un des a_i). On a donc $g(\mathbb{R}^{+*}) =]-\infty, 1[$. Comme g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans son image $]-\infty, 1[$. 0, qui est dans cet ensemble, admet donc un unique antécédent t_0 .

- 2.** On sait que $z^n = -a_1 z^{n-1} - \dots - a_n$. On passe au module et on utilise l'inégalité triangulaire pour obtenir :

$$|z|^n \leq \sum_{i=1}^n |a_i| |z|^{n-i}$$

c'est à dire

$$Q(|z|) \leq 0$$

En utilisant la relation entre Q et g , on obtient $g(|z|) \leq 0$. Comme $Q(\alpha) \geq 0$ on a de même $g(\alpha) \geq 0$ et ainsi

$$g(|z|) \leq 0 = g(t_0) \leq g(\alpha)$$

Par croissance de g sur $\mathbb{R}^{+*}$, on conclut que

$$|z| \leq t_0 \leq \alpha$$

- 3.** Soit $\alpha > 1$; on a (en majorant grossièrement et en reconnaissant le somme des termes d'une suite géométrique) :

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \alpha^{n-i} \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| \sum_{i=1}^n \alpha^{n-i} = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$$

En choisissant $\alpha = 1 + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \alpha^{n-i} \leq \alpha^n - 1$$

et donc $Q(\alpha) \geq 1 > 0$. On en déduit que

$$|z| \leq t_0 \leq \alpha = 1 + \max_{1 \leq k \leq n}$$

Comme $Q(t_0) = 0$ et $Q(\alpha) > 0$, $\alpha \neq t_0$ et l'inégalité est stricte.

Exercice 2.

Partie A.

1. ϕ est continue sur le segment $[0, T]$ et donc bornée sur ce segment. Par ailleurs, ϕ est T -périodique et donc $\phi(\mathbb{R}) = \phi([0, T])$. ϕ est finalement bornée sur $\mathbb{R}$.
2. La périodicité de ϕ s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x + T) = \phi(x)$$

En dérivant cette relation (ce que l'on peut faire si ϕ est dérivable) on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x + T) = \phi'(x)$$

et ϕ' est donc T -périodique.

3. On vérifie le critère des sous-groupes.
 - P_ϕ est inclus dans $\mathbb{R}$ et non vide (il contient 0).
 - Soient $t, t' \in P_\phi$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x + (t + t')) = \phi((x + t) + t') = \phi(x + t) = \phi(x)$$

et $t + t' \in P_\phi$.

- Soit $t \in \mathbb{R}$; on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x - t) = \phi(x - t + t) = \phi(x)$$

et donc $-t \in P_\phi$.

P_ϕ est donc un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Partie B.

1. G n'étant pas réduit à $\{0\}$, il contient un élément $m \neq 0$. Comme c'est un groupe, il contient aussi $-m$. Il contient donc $|m|$ qui vaut m ou $-m$ et $|m| > 0$. On a ainsi

$$G \cap]0, \infty[\neq \emptyset$$

2.a.

- i. a est le plus petit majorant de $G \cap]0, \infty[$. $2a > a$ n'est donc pas un tel majorant et

$$\exists t_1 \in G \cap]0, \infty[/ t_1 < 2a$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que $a \notin G$. On a donc t_1 qui est un élément de $G \cap]0, \infty[$ différent de a . Comme a minore l'ensemble, on a donc $a < t_1$. Comme on a construit t_1 , on peut alors construire

$$t_2 \in G \cap]0, \infty[/ t_2 < t_1$$

et on a $a \leq t_2 < t_1 < 2a$. $t_1 - t_2$ est alors un élément de $G \cap]0, \infty[$ (G est un groupe et la différence de deux éléments de G est dans G et $t_1 - t_2 > 0$ par construction). On a donc $a \leq t_1 - t_2$ et ceci est faux.

On a ainsi montré que si $a > 0$ alors $a \in G$.

- ii. Une récurrence simple montre alors, G étant un groupe, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $na \in G$ puis (stabilité de G par passage au symétrique) que

$$a\mathbb{Z} \subset G$$

Réciproquement, soit $y \in G$. Soit $y = qa + r$ la division euclidienne de y par a ($q = E(y/a)$ et $r \in [0, a[$). $r = y - qa$ est la différence de deux éléments de G et est donc dans G . Par définition de a , G n'a pas d'éléments dans $]0, a[$ et on a donc $r = 0$. Ainsi, $y = qa \in a\mathbb{Z}$. On a finalement

$$a\mathbb{Z} = G$$

- 2.b.** Soit $r > 0$; par définition de la borne inférieure (ici nulle), il existe $t_1 \in G \cap]0, +\infty[$ tel que $t_1 < r$ puis, de même, $t_2 \in G \cap]0, \infty[$ tel que $t_2 < t_1$. $t_1 - t_2$ est alors un élément de G contenu dans $]0, r[$.

Soient $x < y$ deux réels et $r = y - x$; avec ce qui précède, on trouve un élément b de G tel que $b \in]0, r[$. Comme $\frac{y-x}{b} \geq 1$, il existe un entier q entre x/b et y/b . L'élément qb est dans G et est entre x et y .

On vient de montrer que

$$\forall x < y, [x, y] \cap G \neq \emptyset$$

et G est donc dense dans $\mathbb{R}$.

Partie C.

- Si y est T -périodique alors y' et y'' le sont et $f = y'' - 2y'$ l'est encore.
En contraposant ce résultat, (E_f) n'admet pas de solution périodique si f n'est pas périodique.
- (E_0) est linéaire du second ordre et à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$. Les solutions sont $1 + i$ et $1 - i$. D'après le cours, l'ensemble des solutions est

$$Vect(x \mapsto e^x \cos(x), x \mapsto e^x \sin(x))$$

Soit y une solution périodique de (E_0) . Il existe des constantes c et d telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^x(c \cos(x) + d \sin(x))$$

Par ailleurs, y est bornée (question 1.1) et les suites $(y(2n\pi))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y(2n\pi + \pi/2))_{n \in \mathbb{N}}$ le sont donc aussi. Ceci impose $c = d = 0$ et y est la fonction nulle.

La réciproque est immédiate et la fonction nulle est donc la seule solution périodique de (E_0) .

- On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$. En remplaçant dans l'équation, on constate qu'il suffit que $\begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$. Il suffit donc de choisir $\alpha = 1/5$ et $\beta = -2/5$. La solution générale de (E_c) est donc

$$\left(x \mapsto \frac{\cos(x) - 2\sin(x)}{5} \right) + Vect(x \mapsto e^x \cos(x), x \mapsto e^x \sin(x))$$

La solution particulière trouvée $y_0 : x \mapsto \frac{\cos(x) - 2\sin(x)}{5}$ est 2π -périodique.

Soit y_1 est une (autre) solution périodique. Il existe des constantes c et d telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = y_0(x) + e^x(c \cos(x) + d \sin(x))$$

Comme à la question précédente, le caractère borné de y_1 impose $c = d = 0$ et donc $y_1 = y_0$. y_0 est ainsi l'unique solution périodique de (E_c) .

Remarque : $y_1 - y_0$ est solution de (E_0) mais n'a pas de raison d'être périodique. On ne peut donc directement conclure $y_1 = y_0$ avec la question précédente.

Partie D.

1.a.

i. On a z deux fois dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = y'(x+T) \text{ et } z''(x) = y''(x+T)$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, z''(x) - 2z'(x) + 2z(x) = f(x+T) = f(x)$$

et z est donc solution de (E_f) .

ii. Si y est T -périodique alors y' l'est aussi et $y(0) = y(T)$, $y'(0) = y'(T)$. Réciproquement, si ces relations ont lieu alors y et z sont deux solutions de (E_f) qui ont même valeur et même valeur de dérivée en 0. Par théorème de Cauchy-Lipschitz cas linéaire, y et z sont égales. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(x) = y(x+T)$$

et y est T -périodique.

1.b. Soit g une solution particulière de (E_f) . En notant $\phi_1(t) = e^t \cos(t)$ et $\phi_2(t) = e^t \sin(t)$, on sait que la solution générale de (E_f) s'écrit

$$y_{c,d} : t \mapsto g(t) + c\phi_1(t) + d\phi_2(t)$$

On veut prouver l'existence de constantes c et d telles que $y_{c,d}$ vérifient les conditions de 1.a.ii. En remplaçant, $y_{c,d}$ par son expression, on tombe sur un système vérifié par (c, d) dont la matrice est

$$M = \begin{pmatrix} 1 - e^T \cos(T) & -e^T \sin(T) \\ 1 - e^T \cos(T) + e^T \sin(T) & 1 - e^T \sin(T) - e^T \cos(T) \end{pmatrix}$$

Le calcul donne $\det(M) = 1 - 2e^T \cos(T) + e^{2T} = (e^T - 1)^2 + 2e^T(1 - \cos(T))$. Comme $T > 0$, ce déterminant est non nul et le système admet une solution convenable. Il y a donc bien une solution périodique.

Remarque : le raisonnement permet de prouver aussi l'unicité.

2.a. Soit $x \in \mathbb{R}$. P_f étant dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de P_f qui converge vers x . Comme $t_n \in P_f$, $f(0) = f(t_n)$, un passage à la limite donne (f étant continue) $f(0) = f(x)$. Ceci a lieu pour tout x et f est donc constante.

$x \mapsto \frac{f(0)}{2}$ est solution particulière de (E_f) et la solution générale de (E_f) est alors

$$\left(x \mapsto \frac{f(0)}{2} \right) + \text{Vect}(x \mapsto e^x \cos(x), x \mapsto e^x \sin(x))$$

Comme en partie C, la seule solution bornée est $x \mapsto \frac{f(0)}{2}$ et c'est donc la seule solution périodique envisageable. Réciproquement, c'en est bien une (on a d'ailleurs l'existence par D.1).

2.b. D'après la question C.1, T_1 et T_2 sont des périodes de f et sont donc dans P_f .

Il existe donc des entiers non nuls q_1 et q_2 tels que $T_1 = aq_1$ et $T_2 = aq_2$. $T = aq_1q_2$ est alors une période commune à y_1 et y_2 .

$y_1 - y_2$ est alors aussi T -périodique. Mais c'est une solution de (E_0) et la partie C donne $y_1 = y_2$.

Partie E.

1. Comme $f(-\pi) = f(\pi)$, f est bien définie. Elle est en outre continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, elle est égale à son développement en série Fourier et ce dernier est normalement convergent sur $\mathbb{R}$. f étant paire, les coefficients de Fourier "en sinus" sont nuls et ceux en cosinus valent

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} ; \forall n \geq 1, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \frac{(-1)^n 4}{n^2}$$

D'après les remarques initiales, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

2. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |u_n(x)| \leq \frac{4(n^2 + 2n + 2)}{n^2(n^4 + 4)}$$

Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. $\sum(u_n)$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (et donc a fortiori simplement convergente) et S est bien définie.

On a u_n qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'_n(x) = \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4 + 4)} (-2n^2 \cos(nx) - n(2 - n^2) \sin(nx))$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, u''_n(x) = \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4 + 4)} (-n^2(2 - n^2) \cos(nx) + 2n^3 \sin(nx))$$

Comme pour (u_n) , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |u'_n(x)| \leq \frac{4(n^2 + 2n + 2)n}{n^2(n^4 + 4)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |u''_n(x)| \leq \frac{4(n^2 + 2n + 2)n^2}{n^2(n^4 + 4)}$$

Les majorants sont indépendants de x et termes généraux de séries convergente (dominés par $1/n^2$). $\sum(u'_n)$ et $\sum(u''_n)$ sont donc aussi normalement convergents sur $\mathbb{R}$. Le théorème de régularité sur les sommes de séries de fonctions indique que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \text{ et } S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u''_n(x)$$

3. On en déduit que

$$S''(x) - 2S'(x) + 2S(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2(n^4 + 4)} (n^4 + 4) \cos(nx) \right) = f(x)$$

S est 2π -périodique et solution de (E_f) . D'après la partie D, c'est l'unique solution périodique de (E_f) .

4. On a en particulier

$$\forall x \in [-\pi, \pi], S''(x) - 2S'(x) + 2S(x) = x^2$$

En cherchant une solution particulière polynomiale de degré 2, on trouve que $x \mapsto \frac{(x+1)^2}{2}$ convient. Il existe donc des constantes c et d telles que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], S(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + ce^x \cos(x) + de^x \sin(x)$$

Comme $S(\pi) = S(-\pi)$ on a

$$\frac{(\pi+1)^2}{2} - ce^\pi = \frac{(-\pi+1)^2}{2} - ce^{-\pi}$$

c'est à dire $c = \frac{\pi}{\text{sh}(\pi)}$. En exploitant $S'(\pi) = S'(-\pi)$, on obtient $d = 0$ (calcul fait au brouillon et non repris). On a donc

$$\forall x \in [-\pi, \pi], S(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{\pi}{\text{sh}(\pi)} e^x \cos(x)$$

En particulier, la valeur $x = 0$ donne

$$\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n(2-n^2)}{n^2(n^4+4)} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{\operatorname{sh}(\pi)}$$

et on obtient la relation de l'énoncé.