Epreuve de Maths II Concours Centrale -Supélec 2008 filière MP

Partie I

I.A. 1) La matrice A est triangulaire supérieure. ses coefficients diagonaux sont non nuls

$$\begin{cases} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + ...a_{1,n}u_n = w_1 \\ \quad a_{2,2}u_2 + ...a_{2,n}u_n = w_2 \\ \\ \quad a_{n,n}u_n = w_n \end{cases}$$

donc $u_n = \dfrac{w_n}{a_{n,n}}$, puis

$$\forall k \in [[1, n-1]], a_{n-k,n-k}u_{n-k} + ...a_{n-k,n}u_n = w_{n-k}$$

donc

$$\boxed{u_{n-k} = \frac{1}{a_{n-k,n-k}}(w_{n-k} - \sum_{i=n-k+1}^{n} a_{n-k,i}u_i)}$$

Algorithme:

```
u[n]:=w[n]/a[n,n];
for k from 1 to n-1 do u[n-k]:=1/a[n-k,n-k]*(w[n-k]-sum(a[n-k,i]*u[i],i=n-k+1..n])
od;
```

I.A. 2) il faut pour le calcul de $u[n-k]$ lorsque $k \in [[0..n-1]]$,k additions , k multiplications et 1 division

donc en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ additions et multiplications et n divisions

I.B.1) soit $q \in [[1, n]]$. $L_q(MA)$ est la ligne q de la matrice $P = MA$,c'est donc le vecteur

$$\begin{aligned} L_q(MA) &= (\sum_{j=1}^{n} m_{q,j}a_{j,1}, ..., \sum_{j=1}^{n} m_{q,j}a_{j,n}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_{q,j}(a_{j,1}, ..., a_{j,n}) \end{aligned}$$

donc

$$L_q(MA) = \sum_{j=1}^{n} m_{q,j}L_j(A)$$

I.B.2) a) On voit que la relation qui définit A en fonction de P est $A = F(k, \beta)^{-1}P$ correspond à $L_i = L'_i - \beta L_k$ ce qui caractérise $F(k, -\beta)$

1.B.2.b) $D_q(P) = \det \Delta_q(F(k, \beta)A)$ or puisque les k premières lignes lignes de P sont identiques à celle de A les matrices mineures $\Delta_q(P)$ pour$1 \leq q \leq k$ sont identiques à $\Delta_q(A)$ et les déterminants sont donc égaux

I.B.2.c) à l'aide de la question IB1 $L'_q = L_q(F(k, \beta)A) = \sum_{j=1}^{n} m_{q,j}L_j(A)$ donc:
si $q \leq k$, $m_{q,j} = \delta_{q,j}$ et si $q \in [[k+1, n]]$, $m_{q,q} = 1, m_{q,k} = \beta_q$ les autres sont nuls
donc

$$F(k, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \beta_{k+1} & 1 & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & \beta_n & & & 1 \end{pmatrix}$$

toutes les places vide sont nulles.

I.B.3.a)

$$\begin{aligned} MF(k,\beta) &= [C'_1,...,C'_n]=[C_1,..,C_n]\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \beta_{k+1} & 1 & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & \beta_n & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= [C_1,..,C_{k-1},C_k+\sum_{j=k+1}^{n}\beta_j C_j, C_{k+1},..,C_n] \end{aligned}$$

donc si $i\neq k, C'_i=C_i$ et $C'_k=C_k+\sum_{j=k+1}^{n}\beta_j C_j$

I.B.3.b) Soit $q\in[[1,n-1]]$. On note

$$P_q=F(1,\beta_1).....F(q,\beta_q)=\Pi_{k=1}^{q}F(k,\beta_k)$$

avec $\forall k\in[[1,q]],\beta_k={}^t(\beta_{k+1,k},....,\beta_{n,k})$

Montrons par récurrence finie sur q que (en notant $P_q=[C_1^q,....,C_n^q]$)

$$\forall j\in[[q+1,n]], C_j^q=e_j \text{ et } \forall j\in[[1,q]], C_j^q=b_j={}^t(0,..,0,1,\beta_{j+1,j},...,\beta_{n,j})$$

soit encore en notant matriciellement

$$P_q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \beta_{2,1} & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & & \ddots & & & \\ & \ddots & & 1 & \ddots & & \\ & & & \beta_{q+1,q} & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & & \beta_{n,q} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$q=1$: on a donc

$$P_1=F(1,\beta_1)=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \beta_{2,1} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \\ \beta_{n,1} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

donc la proposition est vraie au rang 1

supposons la proposition vérifiée au rang q

on a $P_{q+1}=P_qF(q+1,\beta_{q+1})$ admet pour colonnes si $i\neq q+1, C'_i=C_i$ et

$$C'_{q+1}=C_{q+1}+\sum_{j=q+1}^{n}\beta_{j,q+1}C_j$$

(on a noté C'_i la colonne i de P_{q+1} et C_i la colonne i de P_q

l'hypothèse de récurrence nous dit que $\forall j\in[[q+1,n]]$, $C_j=e_j$ donc

$$C'_{q+1}=e_{q+1}+\sum_{j=q+1}^{n}\beta_{j,q+1}e_j=b_{q+1}$$

on en déduit que la propriété est vérifiée au rang $q+1$

On en déduit que la matrice P_q est triangulaire inférieure ($P_q \in \mathcal{TI}_n$)
En particulier pour $q = n-1$:

$$\begin{aligned} P_{n-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \beta_{2,1} & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & & \ddots & & & \\ & \ddots & & 1 & \ddots & & \\ & & & \beta_{q+1,q} & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & 1 & 0 \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & & \beta_{n,q} & & \beta_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= [b_1, .., b_{n-1}, e_n] \end{aligned}$$

(Remarque : le vecteur β_n n'est pas défini , il faut donc supposer $q \leq n-1$)
I.C.1) $\Delta_1(A) = (a_{1,1})$ est inversible donc $a_{1,1} \neq 0$. On a $A_1 = A$
$A_2 = F(1, -\beta_1)A_1$ admet pour lignes $L'_1 = L_1$ et $\forall i \geq 2, L'_i = L_i - \beta_{i,1}L_1$ avec les notations précédentes (L_i sont les lignes de A)
pour que la première colonne de A_2 soit proportionnelle à e_1 il faut et il suffit que

$$\forall i \geq 2, a_{i,1} - \beta_{i,1}a_{1,1} = 0$$

Donc $\boxed{\beta_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}}$. enparticulier la première ligne de A_2 est égale à la première ligne de A_1
I.C.2) a) pour $k = 2$,en posant $F_1 = F(1, -\beta_1)$ définie à la question précedente, on a bien $A_2 = F_1A_1$ est une matrice telle que $\forall i \in [[2, n]], a^2_{i,1} = 0$ par construction de β_1
Soit $k \in [[2, n]]$. Supposons construites les matrices $F_1, .., F_{k-1}$,$A_1, .., A_{k-1}, A_k$ vérifiant pour tous $j \in [[2, k]]$,$A_j = F_{j-1}A_{k-1}$ et A_k est une matrice telle que les coefficients d'indices (i, j) avec $j \in [[1, k-1]]$ et $i \in [[j+1, n]]$ sont nuls et $\forall m \in [[1, n]]$ $D_m(A_k) \neq 0$
On pose alors $F_k = F(k, -\beta_k)$ ou $\beta_k, =^t (\beta_{k+1,k}, ..., \beta_{n,k})$ et $A_{k+1} = F_kA_k$
d'après la question IB2) les lignes des A_{k+1} sont $L'_i = L_i$ pour $i \leq k$ et $L'_i = L_i - \beta_{i,k}L_k$ pour $i \geq k+1$

Or la matrice A_k se présente ainsi $A_k = \begin{pmatrix} a^k_{1,1} & * & & & * & * \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & & a^k_{k-1,k-1} & & \\ & \vdots & & 0 & a^k_{k,k} & * \\ \vdots & \vdots & & & a^k_{k+1,k} & \\ 0 & & & 0 & a^k_{n,k} & * \end{pmatrix}$

On doit donc calculer $\beta_k, =^t (\beta_{k+1,k}, ...\beta_{n,k})$ de telle sorte que

$$\begin{aligned} \forall i \quad &\in \quad [[k+1, n]],\ a^k_{i,k} - \beta_{i,k}a^k_{k,k} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \beta_{i,k} = \frac{a^k_{i,k}}{a^k_{k,k}} \end{aligned}$$

ceci suppose $a^k_{k,k} \neq 0$ ce qui est donné dans l'hypothèses de récurrence puisque

$$D_k(A_k) = \Pi^k_{j=1}a^k_{j,j} \neq 0$$

La matrice A_{k+1} est bien de la forme voulue , et de plus d'après la question IB2 b)

$$\forall m \in [[1, n]], D_m(A_{k+1}) = D_m(A_k) \neq 0$$

Ainsi par récurrence finie on aura bien obtenu une suite de matrices $F_1, .., F_{n-1}$,$A_1, .., A_{n-1}, A_n$ vérifiant les conditions demandées

I.C.2.b) On remarque au cours de notre construction que les lignes L'_i de A_{k+1} vérifient $L'_i = L_i$ pour $i \leq k$

I.C.2.c) Le nombre de multiplications nécéssaires pour passer de A_k à A_{k+1} est donc égal au nombre de multiplications nécéssaires pour effectuer les $n-k$ transformations $L'_i = L_i + \beta_{i,k} L_k$ pour $i \geq k+1$

soit $N_k = (n-k)^2$ multiplications (en tenant compte du fait que les $k+1$ premiers coefficients de L'_k sont nuls)

I.C.3) a) Posons $P = F_{n-1}.F_{n-2}......F_1$ on obtient ainsi

$$A_n = F_{n-1}A_{n-1} = F_{n-1}F_{n-2}A_{n-2} = .. = PA_1$$

par construction la matrice A_n est triangulaire supérieure et d'après la question IB3) la matrice P est triangulaire inférieure inversible , de plus $A_1 = A$ donc on obtient $A = P^{-1}A_n$

d'autre part

$$P^{-1} = (F_{n-1}.F_{n-2}......F_1)^{-1} = F_1^{-1}..F_{n-1}^{-1} = F(1,\beta_1)..F(n-1,\beta_{n-1}) = L$$

cette matrice L est bien triangulaire inférieure . En notant $U = A_n$ qui est triangulaire supérieure, on a bien obtenu la décomposition $A = LU$ demandée.

I.C.3.b) $F(1,\beta_1)..F(n-1,\beta_{n-1}) = L$ est en fait la matrice P_{n-1} de la question IB3 b) et elle est donc égale à $L = [b_1, ..., b_{n-1}, e_n] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & 0 \\ \beta_{2,1} & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 \\ \beta_{n,1} & & & & \beta_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ avec les notations précédentes. Ainsi si $i > j$, $\boxed{l_{i,j} = \beta_{i,j} = \frac{a_{i,j}^j}{a_{j,j}^j}}$

de plus puisque $A_n = U$ on a donc pour $i \leq j$, $\boxed{u_{i,j} = a_{i,j}^n}$

I.C.4 supposons l'existence de deux matrices de $\mathcal{TI}_n$, inversibles(dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1) L, L' et deux matrice U, U' de $\mathcal{TS}_n$ telles que $A = LU = L'U'$

on peut alors en déduire que U est inversible puisque $\Delta_n(A) = \det(A) \neq 0$

donc $L'^{-1}L = U'U^{-1} \in \mathcal{TI}_n \cap \mathcal{TS}_n$ et ses coefficients diagonaux sont égaux à 1

donc $L'^{-1}L = U'U^{-1} = I_n$ ainsi $L = L'$ et $U = U'$

I.C.5)

programme en langage Maple

```
LU:=proc(M)
A:=M;n:=rowdim(A);
for k from 1 to n do
for i from k+1 to n do
#on détermine les coefficients sous la diagonale qui donneront la matrice L#
A[i,k]:=A[i,k]/A[k,k];
for j from k+1 to n do
#on remplace la ligne L[i]par L'[i]=L[i]-A[i,k]/A[k,k]L[k] pour former la matrice A[k] #
A[i,j]:=A[i,j]-A[i,k]*A[k,j];
od;od;od;
```

return(evalm(A));
end;
Pour récupérer la matrice U on conserve les coefficients $a_{i,j}$ de A qui sont tels que $i \leq j$
Pour récupérer la matrice L on conserve les coefficients $a_{i,j}$ de A qui sont tels que $i > j$ que l'on complète par des 1 sur la diagonale.
I.C.6) Le nombre de multiplications nécéssaires à la factoriastion LU est donc (sans compter les divisions) égal à

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

. On peut s'en convaincre en ajoutant un compteur dans le programme à l'unique ligne qui fait intervenir une multiplication.
II.A.1) pour résoudre le système $Au = w$ mis sous la forme $LUu = w$ on résoud successivement $Lv = w$ qui nécéssite $\sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)/2$ multiplication(puisque le système est triangulaire on a $v_1 = 1, v_2 = -l_{2,1}v_1, v_2 = -l_{3,1}v_1 - l_{3,2}v_2 ...etc)$
puis $Uu = v$ qui nécéssite aussi $\sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)/2$ mais en remontant le sytème triangulaire depuis le calcul de u_n qui nécessite une division non comptabilisée , jusqu'à celui de u_1
II.A.2) Pour inverser la matrice A il suffit de résoudre formellement le système $Au = w$ en fonction du second membre quelconque w , de puis d'exprimer le résultat sous la forme $w = A^{-1}u$
ceci nécéssite à priori $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n(n-1) = n(n-1)(2n+5)/6$ multiplications et $n(n-1)/2+1$ divisions , ce qui est équivalent à $n^3/3$ multiplications et $n^2/2$ division lorsque $n \to \infty$
II.B.1)$\delta_0 = 1, \delta_1 = b_1$ et pour $k \in [[2, n]]$, en développant ce détrminant selon la dernière colonne ,

$$\delta_k = b_k\delta_{k-1} - c_{k-1}a_k\delta_{k-2}$$

II.B.2) utilisons la question IC4 (unicité de LU) et vérifions par récurrence l'égalité demandée

posons $L_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{2,1} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & \\ & & & \\ & & & c_{n-1} \\ & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}$

avec $\forall i \in [[2, n]], l_{i,i-1} = a_i\frac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}}$
ainsi $A_1 = (b_1), L_1 = (1)$ et $U_1 = (\frac{\delta_1}{\delta_0})$ on a donc $A_1 = L_1U_1$
supposons vérifiée la formule $A_n = L_nU_n$ jusqu'au rang $n-1$
On remarque en introduisant des matrices blocs que

$$L_nU_n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ 0,0,0,l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 0 \\ U_{n-1} & & 0 \\ & & c_{n-1} \\ 0 & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1}U_{n-1} & \theta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$(\alpha, \beta, \theta$ sont des matrices respectivement $1 \times (n-1)$, 1×1, $(n-1) \times 1$
plus précisément on obtient les coefficients de L_nU_n avec les formules suivantes

$$\begin{aligned}(L_nU_n)_{n,i} &= 0 \text{ si } i \leq n-1,\ (L_nU_n)_{n,n-1} = l_{n,n-1}\frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}},\ (L_nU_n)_{n,n} = l_{n,n-1}c_{n-1} + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}, \\ (L_nU_n)_{i,n} &= 0 \text{ si } i \leq n-2,\ (L_nU_n)_{n-1,n} = c_{n-1}\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} l_{n,n-1}\frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} &= a_n\frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}}\frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} = a_n \\ l_{n,n-1}c_{n-1}+\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} &= a_nc_{n-1}\frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}}+\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = \frac{a_nc_{n-1}\delta_{n-2}+\delta_n}{\delta_{n-1}} = b_n \text{ (formule obtenue au II B 1)} \end{aligned}$$

donc on en déduit que l'égalité $A_n = U_nL_n$ est vraie au rang n. Ainsi par récurrence, la propriété demandée en découle.

II.B.3)

En langage Maple:

```
res:=proc(a,b,c,w);
n:=nops(b);
# les variables de la procedure sont les vecteurs a,b,c,et le second membre w , le vecteur a est indexé
de 1 à n-1 et non de 2 à n comme dans le texte #
# calcul des coefficients de L et de U #
delta[0]:=1;delta[1]:=b[1];
for i from 2 to n do delta[i]:=b[i]*delta[i-1]-a[i-1]*c[i-1]*delta[i-2];l[i-1]:=a[i-1]*delta[i-2]/delta[i-
1];od;
#Résolution de Lv=w"
v[1]:=w[1];for i from 2 to n do v[i]:=w[i]-l[i-1]*v[i-1];od;
#Résolution de Uu=v"
u[n]:=v[n]*delta[n-1]/delta[n];for i from n-1 to 1 by -1 do u[i]:=(v[i]-c[i]*u[i+1])*delta[i-1]/delta[i];od;
end;
```

nombre de multiplications nécéssaires: $7n-10$

nombre de divisions nécéssaires: $2n-2$

nombre d'additions nécéssaires: $3n-5$

II.C.1.a)

$$<\ A_nv, v >= (v_1,..,v_n)\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$<\ A_nv, v >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_iv_j = 2\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - 2\sum_{i=2}^{n} v_iv_{i-1}$$

or

$$v_1^2+v_n^2+\sum_{i=2}^{n}(v_i-v_{i-1})^2 = 2\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - 2\sum_{i=2}^{n} v_iv_{i-1}$$

II.C.1.b) On en déduit que $\forall v \in \mathbb{R}^n, < A_nv, v >\geq 0$

de plus $< A_nv, v >= 0 \Rightarrow v_1^2 = 0, v_n^2 = 0$,et $\forall i \in [[2,n]], (v_i - v_{i-1})^2 = 0$

ce qui implique clairement $v = 0$

donc la matrice symétrique A_n est définie positive.

II.C.1.c) Il est clair que pour tout k la matrice $A_k = \Delta_k(A_n)$ est symétrique définie positive , et donc son déterminant (produit des valeurs propres strictements positives) est strictement positif. Il est donc possible d'appliquer l'algorithme de décomposition LU pour A

II.C.2) On a ici $\delta_0 = 1, \delta_1 = 2$ et $\delta_n = 2\delta_{n-1} - \delta_{n-2}$ équation qui caractérise une suite récurrente

linéaire d'ordre 2 associé à l'équation carctéristique $X^2 - 2X + 1 = 0$ qui admet 1 comme racine double
donc: il existe α, β tels que $\delta_n = \alpha + n\beta$. On trouve $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ et donc $\delta_n = n$
d'ou pour i$\in [[2, n]]$, $l_{i,i-1} = \frac{1-i}{i}$ et $u_{i,i} = \frac{i+1}{i}$, $u_{i,i+1} = -1$

II.C.3.a) on obtient $L_n y = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ & -\frac{2}{3} & & & \\ & & & & \\ & & & -\frac{n-1}{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ \\ \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$

appliqons la méthode du pivot de Gauss , en effectuant les transformations sur L_n pour la transformer en I_n, et simultanément sur I_n les mêmes transformations
on obtient ainsi

$$L_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & & \\ & & & & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & & \frac{n-1}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

et donc $y_i = 0$ si $i \leq k - 1$ et $y_i = \frac{k}{i}$ si $i \geq k$
II.C.3.b) on applique la même méthode (pivot de Gauss) pour calculer U_n^{-1},mais les opérations vont se faire sur les colonnes

$$\begin{aligned} U_n x &= y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{1} & -1 & & \\ & \frac{3}{2} & & \\ & & & \\ & & & -1 \\ & & & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ \\ \\ y_n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x = U_n^{-1} y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & \frac{1}{n+1} \\ & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & & \\ & & \frac{3}{4} & & \\ & & & & \frac{n-1}{n+1} \\ & & & & \frac{n}{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ \\ \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit $x_i = i(\frac{1}{i+1} y_i + \frac{1}{i+2} y_{i+1} + ... + \frac{1}{n+1} y_n)$
En particulier si $i \geq k$,

$$\begin{aligned} x_i &= i(\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j+1} \frac{k}{j}) = ik \sum_{j=i}^{n} (\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}) \\ &= ik(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}) \\ &= \frac{(n+1-i)k}{n+1} \end{aligned}$$

et si $i < k$

$$x_i = i(\sum_{k}^{n} \frac{1}{j+1} \frac{k}{j}) = ik \sum_{j=k}^{n} (\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1})$$

$$
\begin{aligned}
&= ik(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}) \\
&= \frac{(n+1-k)i}{n+1}
\end{aligned}
$$

II.C.4)
ainsi si $A_n^{-1}=[b_{i,k}]_{1\leq i,k\leq n}$ le calcul précédent donne la valeur de $A_n^{-1}e_k$, c'est à dire les coefficients $b_{i,k}$
donc $b_{i,k}=\frac{(n+1-i)k}{n+1}$ si $i\geq k$ et $b_{i,k}=\frac{(n+1-k)i}{n+1}$ si $i\leq k$

PARTIE III

III.A.1.a) Remarquons tout d'abord que la matrice $B={}^tAA$ est symétrique (${}^tB=B$)

$$\|Ax\|^2={}^t(Ax)Ax={}^tx{}^tAAx={}^txBx$$

en particulier $\forall x\in\mathbb{R}^n$, ${}^txBx\geq 0$ et

$${}^txBx=0\Rightarrow\|Ax\|=0\Rightarrow Ax=0$$

or A est inversible donc $x=0$. Ainsi B est définie positive

III.A.1.b) B est donc diagonalisable dans une base orthonormée $(e'_i)_{1\leq i\leq n}$, avec $Be'_i=\lambda_i(B)e'_i$. $(0<\lambda_1(B)\leq..\leq\lambda_n(B))$
en particulier si $x\in\mathbb{R}^n, x=\sum_{i=1}^n x_ie'_i$ on a $\|x\|^2=\sum x_i^2$ et $\|Ax\|^2=\sum_{i=1}^n\lambda_i(B)x_i^2$ donc

$$\forall x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0, \frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n\lambda_i(B)x_i^2}{\sum x_i^2}}\leq\sqrt{\lambda_n(B)}$$

l'égalité ayant lieu pour $x=e'_n$
On en déduit que

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\sqrt{\lambda_n(B)}$$

III.A.1.c) si A est symétrique réelle (donc diagonalisable) , alors $B=A^2$ et donc $\lambda_i(B)=\lambda_i^2(A)$ d'ou $\lambda_n(B)=\max(|\lambda_i(A)|)^2=\rho(A)^2$. On en déduit que $\|A\|=\rho(A)$

III.A.2 posons $A=I_n-H$ on a alors (1) $\Leftrightarrow u=Hu+c$ ($c=w$)
On suppose que $\|H\|<1$. La suite vectorielle définie par $U_0\in\mathbb{R}^n$ et $\forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=HU_n+c$ vérifie pour $n\geq 1$,

$$\|U_{n+1}-U_n\|=\|H(U_n-U_{n-1})\|$$

donc

$$
\begin{aligned}
\|U_{n+1}-U_n\| &\leq \|H\|\,\|U_n-U_{n-1}\| \\
&\leq \|H\|^2\,\|U_{n-1}-U_{n-2}\| \\
&\leq \ldots\leq\|H\|^n\,\|U_1-U_0\|
\end{aligned}
$$

Considérons la série de $\mathbb{R}^n$: $\sum_{k\geq 1}U_{k+1}-U_k$. Cette série est absolument convergente : en effet $\sum_{k\geq 1}\|U_{k+1}-U_k\|$ est convergente puisque $\sum_{k\geq 1}\|H\|^k$ est une série géomètrique convergente ($\|H\|<1$)
or l'espace $\mathbb{R}^n$ étant complet , on en déduit que $\sum_{k\geq 1}U_{k+1}-U_k$ est convergente
ceci implique que la suite U_k est convergente. Notons u sa limite .
Puisque $\forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=HU_n+c$ on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}HU_n+c=Hu+c=\lim_{n\to\infty}U_{n+1}=u$$

(la première égalité provient de la continuité de l'application affine $x\to Hx+c$)

III.A.3.a) M_n est tridiagonale d'ordre n : $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit λ une valeur propre de M_n et x un vecteur propre associé $(x \neq 0)$
on sait que M_n admet n valeurs propres réelles puisqu'elle est symétrique

$$M_n x = \lambda x \Leftrightarrow \forall i \in [[0, n+1]], x_i - \lambda x_{i+1} + x_{i+2} = 0$$

l'équation caractéristique est $X^2 - \lambda X + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = \lambda^2 - 4$
en notant $i_0 \in [[1, n]]$ l'indice tel que $|x_{i_0}| = \max(|x_i|)$ on a donc $x_{i_0 - 1} - \lambda x_{i_0} + x_{i_0+1} = 0$ donc $\lambda x_{i_0} = x_{i_0-1} + x_{i_0+1}$ d'ou $|\lambda| \, |x_{i_0}| \leq 2 \, |x_{i_0}|$ d'ou $\lambda \leq 2$
posons $\lambda = 2\cos\theta$, avec $\theta \in [0, \pi]$,ainsi $\Delta = -4\sin^2\theta$ et donc

$$X^2 - \lambda X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = e^{\pm i\theta}$$

la suite x_n, récurrente linéaire d'ordre 2 , est donc donnée par la formule

$$x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}, x_0 = x_{n+1} = 0$$

on en déduit les équations

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{i(n+1)\theta} + \beta e^{-i(n+1)\theta} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \beta = -\alpha \; (\neq 0) \\ \sin((n+1)\theta) = 0 \end{array} \right.$$

donc il existe un entier naturel $k \in [[0, n+1]]$ tel que $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$
et $x_k = 2i\alpha\sin(k\theta)$. Notons que $k \neq 0$ et $k \neq n+1$ sinon $x = 0$
ainsi les n valeurs propres de M_n sont les réels $\lambda_k = 2\cos(\frac{k\pi}{n+1}), \lambda_k \in]-2, 2[$

III.A.3 D'après IIIA1c)

$$\|M_n\| = \rho(M_n) = 2\cos(\frac{\pi}{n+1}) = 2 - \mu_n \text{ avec } \mu_n = 2 - 2\cos(\frac{\pi}{n+1}) > 0$$

de plus $\lim_{n\to\infty} 2 - 2\cos(\frac{\pi}{n+1}) = 0$
On en déduit donc que les valeurs propres de $A_n = 2I_n - M_n$ sont égales à $2(1 - \cos(\frac{k\pi}{n+1}))$

III.A.3.c) $\mu_n = 2(1 - \cos(\frac{\pi}{n+1})) = 4\sin^2(\frac{\pi}{2(n+1)}) \sim 4(\frac{\pi}{2(n+1)})^2 \sim \frac{\pi^2}{n^2}$

III.A.4 a) On suppose $\|U_0\| = 1$ et $\|w\| = 1$ pour la suite (7)
si $H = \frac{M_n}{2}$ on a alors

$$(7) \Leftrightarrow u = \frac{M_n}{2}u + c \Leftrightarrow (2I_n - M_n)u = 2c = A_n u = w\frac{1}{2}$$

donc $c = \frac{w}{2}$ et $\|c\| = \frac{1}{2}$
on a alors

$$U_k = HU_{k-1} + c = H(HU_{k-2} + c) + c = H^2 U_{k-2} + Hc + c$$

de même

$$U_k = H^3 U_{k-3} + H^2 c + Hc + c$$

puis par récurrence simple

$$U_k = H^k U_0 + (H^{k-1} + ... + I_n)c$$

III.A.4 b) On peut donc écrire puisque $H^k U_0 \to 0$ que $u = \sum_{k=0}^{+\infty} H^k c$ (série absolument convergente de $\mathbb{R}^n$) et donc

$$\|U_k - u\| = \left\| \sum_{i=k}^{+\infty} H^i c + H^k U_0 \right\| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{+\infty} \left\|H^i\right\| + \left\|H^k\right\|$$

or

$$\|H\| = \frac{1}{2}\|M_n\| = 1 - \frac{\mu_n}{2} \text{ et } \sum_{i=k}^{+\infty}\left\|H^i\right\| \leq \sum_{i=k}^{+\infty}(1-\frac{\mu_n}{2}) = (1-\frac{\mu_n}{2})^k\frac{1}{\frac{\mu_n}{2}}$$

donc

$$\|U_k - u\| \leq \frac{1}{\mu_n}(1-\frac{\mu_n}{2})^k + (1-\frac{\mu_n}{2})^k = (1-\frac{\mu_n}{2})^k(1+\frac{1}{\mu_n})$$

(comment faire intervenir A_n^{-1} ici?)

III.A.4.c) on peut remarquer que A_n^{-1} , qui est également symétrique réelle, admet pour valeurs propres $(2(1-\cos(\frac{k\pi}{n+1})))^{-1}$ et donc

$$\left\|A_n^{-1}\right\| = \rho(A_n^{-1}) = \frac{1}{2(1-\cos(\frac{\pi}{n+1}))} = \frac{1}{\mu_n}$$

donc $\|A_n^{-1}\| \sim \frac{n^2}{\pi^2}$

III.A.4.d) On veut donc $(1-\frac{\mu_n}{2})^k(1+\frac{1}{\mu_n}) \leq 10^{-4}$ soit

$$k \geq \frac{(\ln(10^{-4}) - \ln(1+\frac{1}{\mu_n}))}{\ln(1-\frac{\mu_n}{2})})$$

pour obtenir l'approximation demandée , il suffit donc d'itérer $\frac{(\ln(10^{-4})-\ln(1+\frac{1}{\mu_n}))}{\ln(1-\frac{\mu_n}{2})}$ fois

chaque itération nécéssite $2n$ multiplications donc il faudra en tout $2n\frac{(\ln(10^{-4})-\ln(1+\frac{1}{\mu_n}))}{\ln(1-\frac{\mu_n}{2})}$ multiplications.

si l'on suppose maintenant que $n \to \infty$, on en déduit que

$$2n\frac{(\ln(10^{-4}) - \ln(1+\frac{1}{\mu_n}))}{\ln(1-\frac{\mu_n}{2})} \sim 2n\frac{\ln(\frac{1}{\mu_n})}{(\frac{-\mu_n}{2})} \sim \frac{8n^3\ln n}{\pi^2}$$

si l'on compare avec les résultats du IIA2) on avait obtenu $n^3/3$

il est donc préféreable d'utiliser la méthode LU

(les réponses à cette question III A 4) ne sont pas garanties)