

2024 - CCINP - MP - MATHÉMATIQUES 2

ÉNONCÉ

EXERCICE 1

Q1. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q2. Application : On considère trois suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et n .

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ?
Expliciter alors ces suites.

EXERCICE 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{S}_n le groupe des permutations de l'ensemble $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Une permutation de \mathcal{S}_n sera représentée en Python par une liste, dont l'élément d'indice i est l'image de i par cette permutation. Par exemple, la liste `[3, 1, 0, 2]` représente la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_4$ définie par $\sigma(0) = 3$, $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 0$ et $\sigma(3) = 2$.

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser librement les tests Python du type `x in L` (respectivement `x not in L`) permettant de vérifier si `x` est présent dans la liste `L` (respectivement de vérifier si `x` n'est pas présent dans la liste `L`).

Q3. Si `s` est une liste Python représentant une permutation de \mathcal{S}_4 , quelle instruction Python permet de trouver l'image de 1 par cette permutation ?

Quelle liste Python représente la transposition $(2\ 3) \in \mathcal{S}_4$?

Q4. Écrire une fonction Python `comp(s1, s2)` prenant en entrée deux listes représentant des permutations σ_1 et σ_2 du même groupe de permutations et renvoyant la liste représentant la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Q5. Écrire une fonction Python `inv(s)` prenant en entrée une liste représentant une permutation σ et renvoyant la liste représentant σ^{-1} .

Q6. On souhaite tester si un sous-ensemble `G` de \mathcal{S}_n est ou non un sous-groupe de \mathcal{S}_n .

Écrire une fonction Python `groupe(G)` prenant en entrée une liste de listes, où chaque sous-liste représente une permutation de \mathcal{S}_n et renvoyant `True` s'il s'agit bien d'un sous-groupe de \mathcal{S}_n , `False` sinon.

Q7. Écrire une fonction Python `cyclique(s)` prenant en entrée une liste `s` représentant une permutation σ de \mathcal{S}_n et renvoyant le sous-groupe de \mathcal{S}_n engendré par σ sous la forme d'une liste de listes.

PROBLÈME

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul n , une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T M X > 0.$$

Q8. Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Caractérisation spectrale

- Q9.** Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.
- Q10.** Application : Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

- Q11.** Démontrer qu'une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\text{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.
- Q12.** Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.
- Q13.** Le résultat de la question précédente reste-il vrai pour les matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- Q14.** Application : Utiliser le résultat précédent afin de démontrer que $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$ admet un extremum local. Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le *critère de Sylvester*, valable en toute dimension.

Pour une matrice carrée quelconque $M = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit le *k-ième mineur principal* comme étant le déterminant de la matrice $M_k = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, k \rrbracket} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. On précise qu'une matrice carrée de taille n possède n mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de la **question Q10.** sont les

déterminants des matrices $B_1 = (1)$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice B de la **question Q10.**, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \quad \det(B_2) = 2 > 0, \quad \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice B vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

Q15. On fixe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ainsi qu'un vecteur colonne $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

Déterminer un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que :

$$X_k^T M_k X_k = X^T M X.$$

Q16. Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice.

Q17. Soit $n \geq 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$.

On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.

Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$.

En notant $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, démontrer alors que $Q^T M Q$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.

Q18. Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q19. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?

Q20. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ? Justifier.

Q21. Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

Q22. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle définie positive ?

2024 - CCINP - MP - MATHÉMATIQUES 2

UN CORRIGÉ

EXERCICE 1

Q1. Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ 0 & X-4 & 6 \\ -(X+2) & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ 0 & X-4 & 6 \\ 0 & -3 & X+5 \end{vmatrix} = (X+2)((X-4)(X+5) + 18) \\ &= (X+2)(X^2 + X - 2) = (X-1)(X+2)^2. \end{aligned}$$

Donc $\chi_A(X) = (X-1)(X+2)^2$. χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Les valeurs propres de A sont $\text{Sp}(A) = \{1, -2\}$.

Calculons les sous-espaces propres de A :

$$\begin{aligned} A - I_3 &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad E_1(A) = \text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ A + 2I_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad E_{-2}(A) = \text{Ker}(A + 2I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et pour chaque valeur propre de A , la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique : $\dim(\text{Ker}(A - I_3)) = 1$ et $\text{Ker}((A + 2I_3)) = 2$.

Donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Q2. • La relation de récurrence entre les trois suites se réécrit sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$.

• On a $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = P^{-1}X_n$ donc $X_n = PY_n$. D'où

$$Y_{n+1} = P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}(AX_n) = P^{-1}A(PY_n) = (P^{-1}AP)Y_n = DY_n.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = DY_n$.

Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = D^n Y_0$.

Or $D = \text{Diag}(1, -2, -2)$ est diagonale donc $D^n = \text{Diag}(1, (-2)^n, (-2)^n)$.

$$\text{Ainsi} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ (-2)^n \beta_0 \\ (-2)^n \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la suite (α_n) est constante donc converge.

La suite $(\beta_n) = ((-2)^n \beta_0)$ converge si et seulement si $\beta_0 = 0$.

La suite $(\gamma_n) = ((-2)^n \gamma_0)$ converge si et seulement si $\gamma_0 = 0$.

• Les deux applications

$$u : \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ Z \mapsto P^{-1}Z \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ Z \mapsto PZ \end{array}$$

sont linéaires sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc elles sont continues.

Par continuité de u , si la suite (X_n) converge, alors la suite $(Y_n) = (u(X_n))$ converge.

Par continuité de v , si la suite (Y_n) converge, alors la suite $(X_n) = (v(X_n))$ converge.

Donc la suite (X_n) converge si et seulement si la suite (Y_n) converge.

- En dimension finie, une suite converge si et seulement si toutes les suites de ses coordonnées dans une base convergent.
- On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned}
 & \text{Les suites } (u_n), (v_n), (w_n) \text{ convergent simultanément} \\
 \Leftrightarrow & \text{ la suite } (X_n) \text{ converge} \\
 \Leftrightarrow & \text{ la suite } (Y_n) \text{ converge} \\
 \Leftrightarrow & \text{ les suites } (\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n) \text{ convergent simultanément} \\
 \Leftrightarrow & \beta_0 = \gamma_0 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \exists \alpha_0 \in \mathbb{R}, \quad Y_0 = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow & \exists \alpha_0 \in \mathbb{R}, \quad X_0 = PY_0 = \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow & X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément si et seulement si $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Ker}(A - I_3)$

si et seulement si $\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u_0 = 2\alpha_0, v_0 = 6\alpha_0$ et $w_0 = \alpha_0$.

- Si cette condition est remplie, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \alpha_0, \quad \beta_n = \gamma_n = 0.$$

Alors la suite (Y_n) est constante : $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = Y_0$.

Donc la suite (X_n) est constante : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = PY_n = PY_0 = X_0$.

$$\text{Si } \exists \alpha_0 \in \mathbb{R}, \text{ tel que } X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = u_0 = 2\alpha_0. \\ v_n = v_0 = 6\alpha_0. \\ w_n = w_0 = \alpha_0. \end{cases}$$

EXERCICE 2

Q3. Si \mathbf{s} est une liste Python représentant une permutation de \mathcal{S}_4 , alors l'instruction `s[1]` permet de trouver l'image de 1 par cette permutation.

La liste Python `[0,1,3,2]` représente la transposition $\sigma = (2\ 3) \in \mathcal{S}_4$ (\mathcal{S}_4 est le groupe des permutations de l'ensemble $\llbracket 0,3 \rrbracket$). En effet, on a alors $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 2$.

Q4. La fonction Python `comp(s1,s2)` suivante prend en entrée deux listes représentant des permutations σ_1 et σ_2 du même groupe de permutations et renvoie la liste représentant la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_2$:

```
def comp(s1, s2) :
    n = len(s1)
    s3 = []
    for i in range(n) :
        a = s2[i]
        b = s1[a]
        s3.append(b)
    return s3
```

Q5. La fonction Python `inv(s)` suivante prend en entrée une liste représentant une permutation σ et renvoie la liste représentant σ^{-1} :

```
def inv(s) :
    n = len(s)
    s0 = list(range(n))
    for i in range(n) :
        a = s[i]
        s0[a] = i
    return s0
```

Q6. Pour tester si un sous-ensemble G de \mathcal{S}_n est ou non un sous-groupe de \mathcal{S}_n , on vérifie que G contient l'identité, qu'il est stable par le passage à l'inverse, et qu'il est stable par la composition entre deux éléments de G .

La fonction Python `groupe(G)` suivante prend en entrée une liste de listes, où chaque sous-liste représente une permutation de \mathcal{S}_n , et renvoie `True` s'il s'agit bien d'un sous-groupe de \mathcal{S}_n , `False` sinon :

```
def Groupe(G) :
    n = len(G[0])
    identite = list(range(n))
    if identite not in G :
        return False
    for s1 in G :
        if inv(s1) not in G :
            return False
    for s2 in G :
        if comp(s1,s2) not in G :
            return False
    return True
```

Q7. Le groupe \mathcal{S}_n est de cardinal $n!$.

La fonction `Facto(n)` prend en entrée un entier $n \geq 1$ et renvoie la valeur de $n!$.

D'après le théorème de Lagrange, l'ordre d'une permutation de \mathcal{S}_n divise le cardinal $n!$ du groupe.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ l'ordre de σ , alors p est le plus petit entier strictement positif vérifiant $\sigma^p = \text{Id}_{[1,n]}$. On a p divise $n!$ donc $p \leq n!$.

Le sous-groupe engendré par σ est $\{\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^p = \text{Id}_{[1,n]}\}$.

On construit une liste `sousGroupe` contenant initialement la liste `s` représentant σ . On ajoute dans la liste `sousGroupe` les listes qui représentent les puissances successives de σ , jusqu'à obtenir à nouveau la liste `s` qui représente σ (que l'on ne remet pas dans la liste).

La fonction Python `cyclique(s)` suivante prend en entrée une liste `s` représentant une permutation σ de \mathcal{S}_n et renvoie le sous-groupe de \mathcal{S}_n engendré par σ sous la forme d'une liste de listes.

```
def Facto(n):
    prod = 1
    for k in range(1,n+1):
        prod = prod * k
    return prod

def cyclique(s) :
    n = len(s)
    s1 = s
    sousGroupe = [s]
    for k in range(Facto(n)) :
        s1 = comp(s1,s)
        if s1 == s :
            break
        sousGroupe.append(s1)
    return sousGroupe
```

PROBLÈME

Q8. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$X^T A X = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 \geq 0.$$

De plus, si $X^T A X = 0$, alors $x_1 = 0$ et $x_1 + x_2 = 0$, donc $x_1 = x_2 = 0$ et $X = 0$.
Ainsi, si $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors on a $(X^T A X \geq 0$ et $X^T A X \neq 0)$, donc $X^T A X > 0$.

Donc $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Caractérisation spectrale

Q9. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Montrons que A est définie positive $\Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

- \Rightarrow Supposons que A est définie positive. Alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T A X > 0$.
Soit λ une valeur propre de A . Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à λ : $AX = \lambda X$. Alors

$$X^T A X = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X > 0.$$

Donc $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $\lambda > 0$ et $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

- \Leftarrow Supposons que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $\lambda > 0$.
 A est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée.
Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale réelle, telles que $P^T A P = D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Posons $Y = P X = (y_1 \ \dots \ y_n)^T$. Alors $Y \neq 0$ (car P est inversible et $X \neq 0$).

$$X^T A X = X^T P^T D P X = (P X)^T D (P X) = Y^T D Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{>0} y_i^2 > 0,$$

car $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_i \neq 0$. Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T A X > 0$. Ainsi A est définie positive.

On a donc démontré la caractérisation spectrale :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

- Q10.** • On considère le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$.
On calcule : $P'(X) = 3X^2 - 12X + 9 = 3(X^2 - 4X + 3) = 3(X - 1)(X - 3)$. Les racines de P' sont 1 et 3.
Établissons le tableau de variation de P :

| | | | | | | | | | |
|---------|-----------|------------|------|------------|-----------|------------|------|------------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 1 | 3 | $+\infty$ | | | | |
| $P'(x)$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | | | |
| $P(x)$ | $-\infty$ | \nearrow | -3 | \nearrow | 1 | \searrow | -3 | \nearrow | $+\infty$ |

On observe que $P(0) < 0$, $P(1) > 0$, $P(3) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$, et P est une fonction polynomiale donc continue sur \mathbb{R} . Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur $[0, 1]$, $[1, 3]$ et $[3, +\infty[$, le polynôme P admet trois racines réelles distinctes appartenant respectivement aux intervalles $]0, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.

Donc le polynôme P admet trois racines réelles distinctes et strictement positives.

- Calculons le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)(X-3) - (X-1) - (X-2) \\ &= (X^3 - 6X^2 + 11X - 6) - 2X + 3 = X^3 - 6X^2 + 9X - 3 = P(X). \end{aligned}$$

Puisque $\chi_B = P$, le spectre de B , qui est l'ensemble des racines de χ_B , est l'ensemble des racines de P , qui sont trois réels strictement positifs.

Donc B est une matrice symétrique réelle vérifiant $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+^*$.

D'après la caractérisation spectrale de la question **Q9.**, B est définie positive.

Un critère en dimension 2

Q11. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive.

D'après le théorème spectral, puisque M est symétrique réelle, M est diagonalisable en base orthonormée.

Donc M possède n valeurs propres réelles comptées avec multiplicités. Notons $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ces valeurs propres.

D'après la caractérisation spectrale de la question **Q9.**, on a $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k > 0$.

Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale réelle, telles que $P^T A P = D$.

Puisque M et D sont semblables, elles ont même trace et même déterminant :

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(D) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\lambda_k}_{>0} > 0. \quad \det(M) = \det(D) = \prod_{k=1}^n \underbrace{\lambda_k}_{>0} > 0.$$

Une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\text{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q12. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle vérifiant $\text{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Par le théorème spectral, puisque M est symétrique réelle, M est diagonalisable en base orthonormée.

Donc M possède deux valeurs propres réelles comptées avec multiplicités, notées λ_1 et λ_2 .

De plus M est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Puisque M et D sont semblables, elles ont même trace et même déterminant.

D'une part, $\det(M) = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$, donc λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe.

D'autre part, $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ donc λ_1 et λ_2 sont strictement positives.

Ainsi $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$. D'après la caractérisation spectrale de la question **Q9.**, M est définie positive.

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

Q13. Soit la matrice diagonale $D = \text{Diag}(3, -1, -1)$.

D est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et vérifie $\text{Tr}(D) = 1 > 0$ et $\det(D) = 3 > 0$.

Mais le spectre de D , $\text{Sp}(D) = \{3, -1\}$ n'est pas inclus dans \mathbb{R}_+^* .

D'après la caractérisation spectrale de la question **Q9.**, D n'est pas définie positive.

Le résultat de la question **Q12.** ne reste pas vrai pour les matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q14. Application. On considère

$$f : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x + y + \frac{1}{xy} \end{cases} .$$

- Par produit et somme de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
- Si f admet un extremum local sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$, elle l'atteint en un point critique de f .
- Déterminons les points critiques de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, i.e. les points où le gradient de f est nul.

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{x^2 y} \\ 1 - \frac{1}{x y^2} \end{pmatrix} .$$

Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2 y} = 0. \\ 1 - \frac{1}{x y^2} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 1. \\ x y^2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 1. \\ x y(x - y) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Donc $(1, 1)$ est le seul point critique de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

- Calculons la matrice hessienne de f :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3 y} & \frac{1}{x^2 y^2} \\ \frac{1}{x^2 y^2} & \frac{2}{x y^3} \end{pmatrix} .$$

Calculons la hessienne de f au point critique $(1, 1)$:

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \quad \text{Tr}(H_f(1, 1)) = 4 > 0. \quad \det(H_f(1, 1)) = 3 > 0.$$

Ainsi $H_f(1, 1)$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs.

D'après la question **Q12.**, $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique définie positive.

- Soit $h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Soit $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^2 .

On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point $(1, 1)$.

On utilise que $\nabla f(1, 1) = 0$ et que la matrice hessienne $H_f(1, 1)$ est définie positive.

D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, puisque f est de classe \mathcal{C}^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a quand $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f((1, 1) + h) - f(1, 1) &= h^T \underbrace{\nabla f(1, 1)}_{=0} + \frac{1}{2} h^T H_f(1, 1) h + o(\|h\|^2) \\ &= \frac{1}{2} h^T H_f(1, 1) h + o(\|h\|^2) \\ &= \frac{1}{2} \|h\|^2 \underbrace{\left(\left(\frac{h}{\|h\|} \right)^T H_f(1, 1) \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right)}_{>0} + o(1) \end{aligned}$$

et cette quantité est strictement positive pour $\|h\|$ suffisamment petite.

Donc f atteint un **minimum local strict** en $(1, 1)$.

- Conclusion : f admet en $(1, 1)$ un minimum local strict, qui vaut $f(1, 1) = 3$.
- Puisque $(1, 1)$ est le seul point critique, f n'admet pas d'autre extremum local.

Le critère de Sylvester

Q15. Manque-t-il la condition $X_k \neq 0$ dans la question Q15. ?

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. On suppose de plus $X_k \neq 0$.

Déterminons un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que : $X_k^T M_k X_k = X^T M X$.

Si $k = n$. On pose $X = X_n$ (non nul si X_n non nul.) On a $M_n = M$ et $X_n = X$, d'où le résultat.

Si $k < n$. On pose $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On écrit la matrice M par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_k & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} M_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}), \\ B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{R}), \\ C \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R}), \\ D \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Un produit matriciel par blocs donne :

$$X^T M X = (X_k^T \quad 0^T) \begin{pmatrix} M_k & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ 0 \end{pmatrix} = (X_k^T \quad 0^T) \begin{pmatrix} M_k X_k \\ C X_k \end{pmatrix} = X_k^T M_k X_k.$$

Le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ vérifie $X_k^T M_k X_k = X^T M X$.

Q16. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La sous-matrice $M_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est symétrique réelle.

Soit $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. D'après la question **Q15.**, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que

$$X_k^T M_k X_k = X^T M X.$$

Puisque M est définie positive et $X \neq 0$, on a $X^T M X > 0$.

On en déduit que $\forall X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X_k^T M_k X_k > 0$.

Donc la matrice M_k est définie positive.

D'après la question **Q11.**, cette matrice vérifie $\det(M_k) > 0$.

On a montré que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det(M_k) > 0$ donc M vérifie le critère de Sylvester.

Donc toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Q17. Soit $n \geq 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$.

On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.

D'après la question **Q16.**, M_{n-1} vérifie le critère de Sylvester, donc tous ses mineurs sont strictement positifs.

En particulier $\det(M) = \det(M_{n-1}) > 0$, donc M_{n-1} est inversible.

En posant $V = (M_{n-1})^{-1}(-U) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, on a $M_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}$.

- En transposant cette égalité et en utilisant que M_{n-1} est symétrique, on a également $V^T M_{n-1} + U^T = 0_{1,n-1}$.

- Notons $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} Q^T M Q &= Q^T \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} M_{n-1} & M_{n-1}V + U \\ U^T & U^T V + \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ U^T & U^T V + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^T M_{n-1} + U^T & U^T V + \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & U^T V + \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En posant $\beta = U^T V + \alpha$, on obtient
$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}.$$

De plus, puisque $\det(Q) = 1$, on a

$$\beta \det(M_{n-1}) = \det(Q^T M Q) = \det(Q)^2 \det(M) = \det(M) > 0.$$

Or $\det(M_{n-1}) > 0$, donc
$$\beta = \frac{\det(M)}{\det(M_{n-1})} > 0.$$

Q18. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que toute matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

• **Initialisation.** Cas $n = 1$.

Soit $M = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ (toujours symétrique) vérifiant le critère de Sylvester. Alors $a = \det(M) > 0$.

Pour tout $X = (x) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T M X = ax^2 > 0$ car $a > 0$ et $x \neq 0$.

Donc M est définie positive.

• **Hérédité.** Supposons le résultat vrai au rang $(n-1)$ et montrons-le au rang n .

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester. Alors tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

★ On reprend les notations de la question **Q17.** :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

★ Puisque M est symétrique réelle, M_{n-1} est également symétrique réelle.

★ Les $(n-1)$ mineurs principaux de M_{n-1} sont aussi des mineurs principaux de M , donc sont strictement positifs, ce qui montre que M_{n-1} vérifie aussi le critère de Sylvester.

Par hypothèse de récurrence appliquée au rang $(n-1)$, la matrice M_{n-1} est définie positive.

★ D'après la question **Q17.**, il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant $\det(Q) = 1$ telle que

$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \beta > 0.$$

★ Montrons que $Q^T M Q$ est définie positive.

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, que l'on écrit $Y = \begin{pmatrix} Z \\ z \end{pmatrix}$ avec $Z \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}$. Un calcul par blocs donne :

$$Y^T (Q^T M Q) Y = \begin{pmatrix} Z^T & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^T & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} Z \\ \beta z \end{pmatrix} = Z^T M_{n-1} Z + \beta z^2.$$

Si $Z \neq 0$: puisque M_{n-1} est définie positive, on a $Z^T M_{n-1} Z > 0$ donc

$$Y^T (Q^T M Q) Y \geq Z^T M_{n-1} Z > 0.$$

Si $Z = 0$: alors $z \neq 0$ (car $Y \neq 0$). Il vient

$$Y^T (Q^T M Q) Y = \beta z^2 > 0 \quad \text{car} \quad \beta > 0 \quad \text{et} \quad z \neq 0.$$

Dans les deux cas, $Y^T (Q^T M Q) Y > 0$. Donc la matrice $Q^T M Q$ est définie positive.

★ Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

Puisque $\det(Q) = 1$, la matrice Q est inversible. On pose $Y = Q^{-1} X \neq 0$ car $X \neq 0$.

Puisque $Q^T M Q$ est définie positive :

$$X^T M X = (QY)^T M (QY) = Y^T (Q^T M Q) Y > 0.$$

Donc la matrice M est définie positive, ce qui termine la récurrence.

Toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. La matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle. Calculons les mineurs principaux de $C(x)$.

$$\begin{cases} \det(C_1(x)) = \det(2) & = 2 & > 0. \\ \det(C_2(x)) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & = 1 & > 0. \\ \det(C_3(x)) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} & = 1 - 2x^2. \end{cases}$$

Donc $C(x)$ vérifie le critère de Sylvester si et seulement si $\det(C_3(x)) > 0$. Or

$$\det(C_3(x)) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[.$$

D'après le critère de Sylvester, la matrice $C(x)$ est définie positive si et seulement si $x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$.

Q20. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique réelle. Calculons les mineurs principaux de A .

$$\begin{cases} \det(A_1) = \det(2) & = 2 > 0. \\ \det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & = 2 > 0. \\ \det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & = 2 \times 2 - 2 \times 3 - 5 = -7 < 0. \end{cases}$$

(On a développé $\det(A_3)$ selon la première colonne.)

Le troisième mineur principal $\det(A_3) = -7 < 0$ est strictement négatif.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_5(\mathbb{R})$ ne vérifie pas le critère de Sylvester donc A n'est pas définie positive.

Q21. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique réelle. Calculons les mineurs principaux de A .

$$\begin{cases} \det(A_1) = \det(4) & = 4 > 0. \\ \det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & = 3 > 0. \\ \det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = -\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{4} > 0. \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ vérifie le critère de Sylvester donc A est définie positive.

Puisque A est définie positive, on a :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T A X > 0.$$

Or

$$\begin{aligned} X^T A X &= (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 4x + y - \frac{3}{2}z \\ x + y \\ -\frac{3}{2}x + z \end{pmatrix} \\ &= x \left(4x + y - \frac{3}{2}z \right) + y(x + y) + z \left(-\frac{3}{2}x + z \right) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz. \end{aligned}$$

Donc $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$

Q22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \det(S_n)$. En développant le déterminant de S_n par rapport à la dernière colonne, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 3, \quad u_n = \det(S_n) = \sqrt{3} \det(S_{n-1}) - \det(S_{n-2}) = \sqrt{3}u_{n-1} - u_{n-2}.$$

On a de plus :

$$\begin{cases} u_1 = \det(S_1) = \det(\sqrt{3}) = \sqrt{3}. \\ u_2 = \det(S_2) = \det \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = 2. \end{cases}$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, définie par :

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, & u_{n+2} - \sqrt{3}u_{n+1} + u_n = 0. \\ & u_1 = \sqrt{3}. \\ & u_2 = 2. \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0$. On a $\Delta = -1 < 0$ ce qui donne deux racines distinctes complexes non réelles :

$$r_1 = e^{i\pi/6} \quad \text{et} \quad r_2 = e^{-i\pi/6}.$$

Puisque la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est réelle, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = a \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + b \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right).$$

On trouve (a, b) grâce aux valeurs de u_1 et u_2 :

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} = a \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\frac{\sqrt{3}}{2} + b\frac{1}{2}. \\ u_2 = 2 = a \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\frac{1}{2} + b\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b\sqrt{3} = 6. \\ a + b\sqrt{3} = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1. \\ b = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Finalement,

$$\forall n \geq 1, \quad \boxed{\det(S_n) = u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)}.$$

On peut en particulier calculer les premiers termes de la suite :

$$\begin{cases} \det(S_1) = \sqrt{3} > 0. \\ \det(S_2) = 2 > 0. \\ \det(S_3) = \sqrt{3} > 0. \\ \det(S_4) = 1 > 0. \\ \det(S_5) = 0. \end{cases}$$

La matrice S_n est symétrique réelle. Les mineurs principaux de S_n sont les $\det(S_k)$ avec $1 \leq k \leq n$.

Si $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, les mineurs principaux de S_n sont tous strictement positifs. Par le critère de Sylvester, S_n est définie positive.

Si $n \geq 5$, le cinquième mineur principal est nul : $\det(S_5) = 0$. Par le critère de Sylvester, S_n n'est pas définie positive.

$$\boxed{\text{La matrice } S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est définie positive si et seulement si } n \in \{1, 2, 3, 4\}.$$