

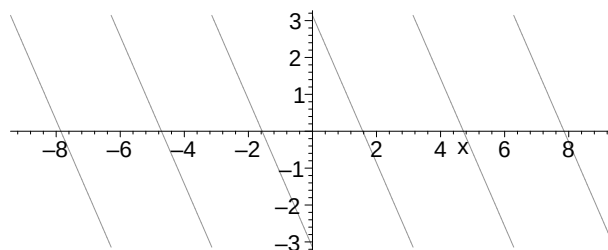
PC*

MATHÉMATIQUES

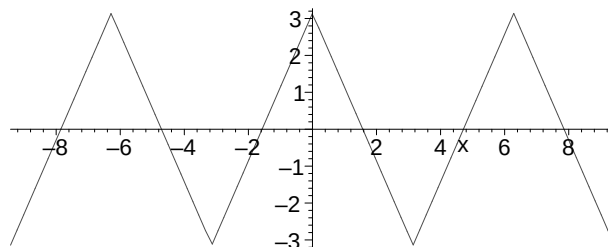
Concours Centrale–Supélec 2000, 4h.

I.A 1

```
f:=x->Pi-2*x;
plot(f(x-Pi*floor(x/Pi)),x=-3*Pi..3*Pi,discont=true);
```



```
h:=x->piecewise(
x>=-3*Pi and x<-2*Pi, 2*x+5*Pi,
x>=-2*Pi and x<-Pi, -2*x-3*Pi,
x>=-Pi and x<0, 2*x+Pi,
x>=0 and x<Pi, -2*x+Pi,
x>=Pi and x<2*Pi, 2*x-3*Pi,
x>=2*Pi and x<3*Pi, -2*x+5*Pi) ;
plot(h(x),x=-3*Pi..3*Pi);
```



I.A. 2 Soit f continue sur $[0, \pi]$. La fonction $\hat{f}$ étant paire, elle est continue sur $[-\pi, \pi]$, avec $\hat{f}(-\pi) = \hat{f}(\pi)$. Par 2π périodicité, la fonction $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\tilde{f}$ étant impaire, elle est continue par morceaux sur $]-\pi, \pi[$, avec $\lim_{h \rightarrow -\pi^+} \tilde{f} = - \lim_{h \rightarrow \pi^-} \tilde{f}$.

Les points éventuels de discontinuité sont donc $\{-\pi, 0, \pi\}$. Par 2π périodicité, la fonction $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{f}$ soit continue sur $\mathbb{R}$ est $f(0) = f(\pi) = 0$. En effet :

- si $f(0) = f(\pi) = 0$, alors $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{f}(h) = 0 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \tilde{f}(h)$. Le raisonnement est identique en π et $-\pi$. On termine par 2π périodicité.

• réciproquement, si $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est en tout point de $\pi\mathbb{Z}$. Par imparité de $\tilde{f}$, il vient $f(0) = f(\pi) = 0$.

I.B.1 Montrons d'abord l'unicité de la solution. Supposons qu'il existe y, z deux solutions du problème. Alors $y'' = z'' = -f$ entraîne que $y(x) = z(x) + ax + b$. Les conditions au bord $y(0) = z(0) = y(\pi) = z(\pi) = 0$ entraînent que $y = z$.

Montrons l'existence d'une solution. Posons $F_0(t) = \int_0^t f(u)du$. L'équation $y'' = -f$ est équivalente à $y'' = -F_0'$, donc en intégrant sur $[0, x]$:

$$y(x) = y'(0)x - \int_0^x F_0(t)dt$$

La condition $y(\pi) = 0$ donne :

$$y(x) = Tf(x) = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_0(t)dt \right) x - \int_0^x F_0(t)dt$$

I.B.2 Un calcul donne pour f de la première question :

$$Tf(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi^2 x}{6}$$

II.A La linéarité de T provient de la linéarité de l'intégrale. Pour tout $f \in E$, Tf est continue sur $[0, \pi]$, puisque Tf y est même dérivable.

Soit $f \in \text{Ker } T$. En dérivant deux fois, il vient $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. Ainsi $\text{Ker } T = \{0\}$.

Montrons que :

$$\text{Im } T = F = \{g \in C^2([0, \pi]) \mid g(0) = g(\pi) = 0\}$$

- soit $g \in F$ et $f = -g''$. Alors $g'' = -f$ et $g(0) = g(\pi) = 0$ entraînent que $g \in \text{Im } T$.
- soit $g \in \text{Im } T$. Il existe $f \in E$ tel que $Tf = g$. Donc $g'' = -f$ et $g(0) = g(\pi) = 0$ entraînent que $g \in F$.

II.B Un calcul donne :

$$Tc_0 = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$Tc_n = \frac{\pi \cos(nx) - \pi + (1 - (-1)^n)x}{n^2\pi}, \quad \forall n \geq 1$$

II.C Posons $Tf_1(x) = C_1x - \int_0^x F_1(t)dt$ et $Tf_2(x) = C_2x - \int_0^x F_2(t)dt$, avec :

$$C_i = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_i(t)dt, \quad i = 1, 2$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned} (Tf_1, f_2) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi C_1 x f_2(x) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^x F_1(t) dt \right) f_2(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} C_1 \left([x F_2]_0^\pi - \int_0^\pi F_2 \right) - \frac{2}{\pi} \left(\left[\int_0^x F_1 \cdot F_2 \right]_0^\pi - \int_0^\pi F_1 F_2 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_1 F_2 - \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi F_1 \int_0^\pi F_2 \end{aligned}$$

La symétrie de ce résultat en F_1, F_2 démontre cette question.

Supposons que $Tf_1 = \lambda f_1$ et $Tf_2 = \mu f_2$. Il vient :

$$\lambda(f_1, f_2) = (Tf_1, f_2) = (f_1, Tf_2) = \mu(f_1, f_2)$$

et $\lambda \neq \mu$ entraîne que $(f_1, f_2) = 0$.

II.D

- 0 n'est pas valeur propre puisque $\text{Ker } T = \{0\}$.
- soit $\lambda \neq 0$ et $f \in E$ tels que $Tf = \lambda f$. Comme λ n'est pas nul, f est deux fois dérivable et $-f = (Tf)'' = \lambda f''$. Ainsi f vérifie l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0$$

★ si $\lambda > 0$, on pose $\frac{1}{\lambda} = \mu^2$ et la solution générale de l'équation ci-dessus est :

$$f(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

Or $f(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ et les conditions $f(\pi) = 0, f \neq 0$ entraînent que $\mu\pi \in \pi\mathbb{Z}^*$, donc $\mu \in \mathbb{Z}^*$.
Finalement les valeurs propres positives sont $\lambda_k = \frac{1}{k^2}, k \in \mathbb{N}$, le sous-espace propre associé étant de dimension 1 engendré par $x \mapsto \sin(kx)$.

★ si $\lambda < 0$, on pose $\frac{1}{\lambda} = -\mu^2$ et la solution générale de l'équation ci-dessus est :

$$f(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Les conditions $f(0) = 0, f(\pi) = 0$ entraînent que $A = B = 0$.

En conclusion les valeurs propres de T sont les (λ_k) .

II.E.1 On vient de voir que la famille (s_n) est orthogonale. Un calcul immédiat donne $(s_n, s_n) = 1$, pour tout $n \geq 1$.

II.E.2 La fonction $\tilde{f}$ étant continue par morceaux, 2π périodique et impaire, elle est développable en série de Fourier et ses coefficients de Fourier pairs $a_n(\tilde{f})$ sont nuls. Par imparité $(f, s_n) = b_n(\tilde{f})$. Ainsi f_N représente la somme partielle de la série de Fourier associée à $\tilde{f}$. On a alors, toujours par imparité :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(t) - f_N(t))^2 dt = 0$$

Si f est orthogonale à la famille (s_n) , alors pour tout $N, f_N = 0$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(t) - f_N(t))^2 dt = 0 \Rightarrow \|f\|_2 = 0$. Comme f est continue sur $]0, \pi[$, il vient $f = 0$ sur $]0, \pi[$ et par continuité sur $[0, \pi]$.

II.F.1 Un calcul immédiat donne que la famille (c_n) est une famille orthonormale.

II.F.2 La fonction $\hat{f}$ étant continue, 2π périodique et paire, elle est développable en série de Fourier et ses coefficients de Fourier impairs $b_n(\hat{f})$ sont nuls. Par parité $(f, c_n) = b_n(\hat{f})$. Ainsi h_N représente la somme partielle de la série de Fourier associée à $\hat{f}$. On a alors, toujours par parité :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(t) - h_N(t))^2 dt = 0$$

Si f est orthogonale à la famille (c_n) , alors pour tout N , $h_N = 0$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(t) - h_N(t))^2 dt = 0 \Rightarrow \|f\|_2 = 0$. Ainsi f est identiquement nulle sur $[0, \pi]$ (même raisonnement que précédemment).

III.A Écrivons la formule de Taylor à l'ordre 1 pour $y(x) = Tf(x)$, soit :

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \int_0^x (x-t)y''(t)dt$$

ou

$$y(x) = xy'(0) - \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

Or $y(\pi) = 0$ entraîne que :

$$y'(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi-t)f(t)dt$$

et

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{x}{\pi} \int_0^\pi (\pi-t)f(t)dt - \int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &= \int_0^x \frac{x(\pi-t)}{\pi} f(t)dt + \int_x^\pi \frac{x(\pi-t)}{\pi} f(t)dt - \int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &= \int_0^x \frac{t(\pi-x)}{\pi} f(t)dt + \int_x^\pi \frac{x(\pi-t)}{\pi} f(t)dt \\ &= \int_0^\pi k(x,t)f(t)dt \end{aligned}$$

III.B Soit t_0 fixé. On a :

$$k(x, t_0) = \begin{cases} \frac{t_0(\pi-x)}{\pi} & \text{si } 0 \leq t_0 \leq x \\ \frac{x_0(\pi-t_0)}{\pi} & \text{si } 0 \leq x < t_0 \leq \pi \end{cases}$$

C'est une fonction continue sur $[0, \pi]$, puisqu'on a la même valeur pour $x = t_0$.

La démonstration est identique lorsqu'on fixe x_0 .

Supposons que l'on ait une autre fonction $\ell(x, t)$ séparément continue en x et t telle que pour tout $x \in [0, \pi]$, pour tout $f \in E$:

$$Tf(x) = \int_0^\pi \ell(x, t)f(t)dt$$

Alors, pour tout $x \in [0, \pi]$, pour tout $f \in E$:

$$\int_0^\pi (k(x, t) - \ell(x, t))f(t)dt = 0$$

Fixons x . La fonction $t \mapsto k(x, t) - \ell(x, t)$ est continue sur $[0, \pi]$ et orthogonale à toute fonction de E , donc à elle-même. C'est la fonction identiquement nulle, et ceci est vérifié pour tout $x \in [0, \pi]$.

III.C.1 Fixons $x \in [0, \pi]$. Une étude rapide de la fonction $t \mapsto k(x, t)$ montre que cette fonction est positive sur $[0, \pi]$ et qu'elle atteint son maximum en x , maximum qui vaut $\frac{x(\pi-x)}{\pi}$.

La fonction $x \mapsto \frac{x(\pi-x)}{\pi}$ est également positive sur le même intervalle et atteint son maximum en $\frac{\pi}{2}$, ce maximum valant $\frac{\pi}{4}$. Ainsi

$$\sup_{(x,t) \in [0,\pi]^2} k(x, t) \geq \frac{\pi}{4}$$

Mais, si $0 \leq t \leq x \leq \pi$, alors :

$$0 \leq \frac{t(\pi - x)}{\pi} \leq \frac{t(\pi - t)}{\pi} \leq \frac{\pi}{4}$$

et si $0 \leq x \leq t \leq \pi$:

$$0 \leq \frac{x(\pi - t)}{\pi} \leq \frac{x(\pi - x)}{\pi} \leq \frac{\pi}{4}$$

Ainsi

$$\sup_{(x,t) \in [0,\pi]^2} k(x,t) = \frac{\pi}{4}$$

ce maximum étant atteint en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

III.C.2 Pour tout $x \in [0, \pi]$, pour tout $f \in E$

$$|Tf(x)| \leq \sup_{(x,t)} |k(x,t)| \int_0^\pi |f(t)| dt \leq \frac{\pi}{4} \|f\|_1$$

III.C.3 La fonction f_n est continue sur $[0, \pi]$ et un calcul assez rapide donne :

$$\|f_n\|_1 = \frac{\pi}{n+1}, \quad Tf_n(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4(n+2)}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Tf_n(\pi/2)}{\|f_n\|_1} = \frac{\pi}{4}$$

ce qui montre que l'inégalité ne peut être améliorée.

III.D.1 Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwarz.

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \left(\int_0^\pi k^2(x,t) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\pi f^2(t) dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^\pi k^2(x,t) dt \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \|f\|_2 \end{aligned}$$

Un calcul donne :

$$\left(\int_0^\pi k^2(x,t) dt \right)^{1/2} = \frac{x^2(\pi - x)^2}{3\pi}$$

donc :

$$|Tf(x)| \leq \frac{x(\pi - x)}{\sqrt{3\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \|f\|_2$$

Enfin, l'étude de $x \mapsto x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$ donne le résultat demandé.

III.D.2 Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0$, alors, comme

$$\|Tf - T\varphi_n\|_\infty \leq \frac{\pi^2}{4\sqrt{6}} \|f - \varphi_n\|_2$$

on a la convergence uniforme sur $[0, \pi]$ de la suite $T\varphi_n$ vers Tf .

III.D.3 Prenons $\varphi_n = f_n$ définis dans la question I.E.2. Alors, pour tout $n \geq 1$, $Ts_n = \frac{1}{n^2}s_n$ et par la question I.E.2, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tf - Tf_n\|_\infty = 0$, et

$$Tf_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} (f, s_k) s_k$$

La série $\sum \frac{\sin(nx) \sin(nt)}{n^2}$ est normalement convergente sur $[0, \pi]$. On peut donc écrire :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx) \sin(nt)}{n^2} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \left(\int_0^\pi \sin(nt) f(t) dt \right) \sin(nx) = Tf(x)$$

De plus la fonction $(x, t) \mapsto \sum \frac{\sin(nx) \sin(nt)}{n^2}$ est continue séparément en x et t . On termine par unicité de la fonction $k(x, t)$.

III.D.4 La série $\sum \frac{1}{n^2} (f, s_n) s_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, puisque $\left| \frac{1}{n^2} (f, s_n) s_n \right| \leq \|f\|_2 \frac{1}{n^2}$. En utilisant l'orthonormalité de la famille (s_n) , calculons :

$$\|Tf\|_2^2 = (Tf, Tf) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} |(f, s_n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(f, s_n)|^2$$

Or par la question I.E.2 :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} | \|f\|_2 - \|f_N\|_2 | \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_2 = 0$$

avec :

$$\|f_N\|_2^2 = \sum_{n=1}^N |(f, s_n)|^2$$

ce qui signifie que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, s_n)|^2 = \|f\|_2^2$$

La seule inégalité utilisée est $\frac{1}{n^4} \leq 1, (n \geq 1)$. On a donc égalité $\|Tf\|_2 = \|f\|_2$ si et seulement si $(f, s_n) = 0, \forall n \geq 2$, et $f \in \text{Vect}(s_1)$.

III.E.1 La question II.F montre que $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - h_N\|_2 = 0$. Ceci entraîne que $\lim_{N \rightarrow \infty} \|Tf - Th_N\|_\infty = 0$. Or :

$$Th_N = \frac{1}{2} (f, c_0) Tc_0 + \sum_{n=1}^N (f, c_n) Tc_n$$

donc, pour tout $x \in [0, \pi]$, pour tout $f \in E$:

$$Tf(x) = \frac{1}{2} (f, c_0) \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (f, c_n) \left(\frac{\pi \cos(nx) - \pi + (1 - (-1)^n)x}{n^2 \pi} \right)$$

III.E.2 En écrivant $k(x, t) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n(x) c_n(t)$ et en supposant que cette série converge uniformément sur $[0, \pi]$, il vient :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} Tc_0, \quad \alpha_n = Tc_n, \forall n \geq 1$$

Il reste à vérifier que la série

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi \cos(nx) - \pi + (1 - (-1)^n)x}{n^2 \pi} \right) \cos(nt)$$

est continue en x et en t et (même) normalement convergente sur $[0, \pi]^2$.

IV.A.1 On a :

$$\left| \frac{1}{p^{2n}} (f, s_p) s_p \right| \leq \frac{1}{p^{2n}} \|f\|_2$$

ce qui montre la convergence normale de la série sur $[0, \pi]$, puisque $n \geq 1$.

IV.A.2 Effectuons une démonstration par récurrence sur n .

- pour $n = 1$, c'est ce qui a été démontré précédemment.
- supposons la relation vérifiée pour $n > 1$. Alors, pour tout $f \in E$ et par convergence normale :

$$T^{n+1}f = T(T^n)f = T(T_n f) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} (f, s_p) T s_p = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n+2}} (f, s_p) s_p$$

IV.B On sait que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k^2}$ est valeur propre de T associée au vecteur propre s_k .

Comme $T_n = T^n$, pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k^{2n}}$ est valeur propre de T_n associée au vecteur propre s_k . Montrons que T_n n'admet pas d'autres valeurs propres. Supposons que λ soit valeur propre de T_n associée au vecteur propre f .

Comme T est un opérateur auto-adjoint, $T_n = T^n$ l'est également, et f est orthogonale à $\text{Vect}(s_k)$. La question II.E.2 montre que f est identiquement nulle.

IV.C.1 On a :

$$T_n f = (f, s_1) s_1 + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} (f, s_p) s_p$$

la convergence de la série étant normale sur $[0, \pi]$.

Or $|(f, s_p) s_p| \leq \|f\|_2$ et :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} (f, s_p) s_p \right| &\leq \|f\|_2 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} \leq \|f\|_2 \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}} \\ &= \|f\|_2 \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \end{aligned}$$

cette quantité tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n f = (f, s_1) s_1$$

IV.C.2 Un calcul donne pour f définie dans la question I.A.1 :

$$\int_0^{\pi} (\pi - 2t) \sin(t) dt = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n f = 0$$