CORRIGE

1 I Préliminaires

I.A - Q1. On obtient facilement :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

I.A - Q2. On souhaite montrer que la suite $(F_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante, soit $F_{n+2}-F_{n+1}>0$ pour $n\geq 1$: on doit donc montrer que $F_n>0$ pour $n\geq 1$.
Montrons par récurrence la propriété :

$$\forall n\geq 1, F_n>0 \text{ et } F_{n+1}>0$$

Initialisation :
Pour $n=1$, la propriété s'écrit $F_1>0$ et $F_2>0$ ce qui est vrai puisque $F_1=1$ et $F_2=1$.
Hérédité :
Soit $n\geq 2$: on suppose que $F_n>0$ et $F_{n+1}>0$
On a donc $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n>0$ donc $F_{n+2}>0$ et $F_{n+1}>0$ et la propriété est héréditaire.
Conclusion :
D'après le principe de récurrence, on a $F_n>0$ pour tout $n\geq 1$ et donc
la suite $(F_n)_{n\neq 2}$ est strictement croissante.

I.A - Q3. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante à partir de $n=2$ donc elle n'est pas majorée : elle diverge vers $+\infty$.

I.B - Q4. Le discriminant de cette équation du second degré est égal à 5 donc cette équation admet deux solutions réelles $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$ et $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Or, $x_2\times\varphi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1-5}{4}=-1$ donc $x_2=-\dfrac{1}{\varphi}$, ce qui prouve l'égalité souhaitée.

I.B - Q5. φ et $-\dfrac{1}{\varphi}$ sont racines du polynôme x^2-Sx+P avec $S=1$ donc $\varphi-\dfrac{1}{\varphi}=1.$

$\varphi+\dfrac{1}{\varphi}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}=\dfrac{-2\left(1+\sqrt{5}\right)}{-4}-\dfrac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{-4}=\sqrt{5}$: on a bien $\varphi+\dfrac{1}{\varphi}=\sqrt{5}$

$\psi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{1/\varphi}{\varphi}=\dfrac{1}{\varphi^2}$

φ est racine du polynôme x^2-x-1 donc $\varphi^2=\varphi+1$ donc $\dfrac{1}{\varphi^2}=\dfrac{1}{\varphi+1}$:

On a bien $\psi=\dfrac{1}{\varphi^2}=\dfrac{1}{\varphi+1}$

I.B - Q6. On raisonne par récurrence.
Initialisation :
Pour $n=0$, la propriété s'écrit $F_0=0$ ce qui est vrai.
Pour $n=1$, la propriété s'écrit $F_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi+1/\varphi\right)$.
D'après la question précédente, $\varphi+\dfrac{1}{\varphi}=\sqrt{5}$ donc la propriété s'écrit $F_1=1$, ce qui est vrai.
Hérédité :
Soit $n\geq 0$: on suppose que $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n-(-1)^n\varphi^{-n}\right)$ et $F_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1}-(-1)^{n+1}\varphi^{-n-1}\right)$

On a donc $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n + \varphi^{n+1} - (-1)^n\left(\varphi^{-n} - \varphi^{-n-1}\right)\right]$
Or, $\varphi^n + \varphi^{n+1} = \varphi^n(1+\varphi) = \varphi^n \times \varphi^2$ d'après la question précédente donc $\varphi^n + \varphi^{n+1} = \varphi^{n+2}$
De même, $\varphi^{-n} - \varphi^{-n-1} = \varphi^{-n-1}(\varphi - 1) = \varphi^{-n} \times \dfrac{1}{\varphi}$ puisque, d'après la question précédente, $\varphi - \dfrac{1}{\varphi} = 1$ donc $\varphi - 1 = \dfrac{1}{\varphi}$
On a donc $\varphi^{-n} - \varphi^{-n-1} = \varphi^{-n-2}$ et finalement, $F_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-1)^n\varphi^{-n-2}\right)$ et la propriété est héréditaire puisque $(-1)^{n+2} = (-1)^n$
Conclusion :
D'après le principe de récurrence, on a donc :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-1)^n\varphi^{-n}\right)}$$

2 Séries génératrices de Fibonacci

II.A - Q7. On a $|\varphi| > 1$ donc $\left|\dfrac{1}{\varphi}\right| < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^{-n} = 0$, donc $\underline{F_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}}$.

II.A - Q8. Soit $x \neq 0$, on pose $a_n = F_n x^n$ alors $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}|x| \underset{+\infty}{\sim} \varphi|x|$ d'après la question précédente.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \varphi|x|$ et donc d'après le critère de d'Alembert,
<u>le rayon de convergence de cette série entière est égal à $\dfrac{1}{\varphi}$.</u>
Soit $x \neq 0$, on pose $b_n = \dfrac{F_n}{n!}x^n$ alors $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{F_{n+1}}{F_n} \times \dfrac{1}{n+1}|x| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi}{n+1}|x|$ d'après la question précédente.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = 0$ et donc d'après le critère de d'Alembert,
<u>le rayon de convergence de cette série entière est égal à $+\infty$.</u>

II.B - Q9. Soit $x \in \left]-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi}\right[$: la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} F_n x^n$ converge donc vers $A(x)$, la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} F_n x^{n+1}$ converge vers $xA(x)$ et la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} F_n x^{n+2}$ converge vers $x^2A(x)$.
$\left(1-x-x^2\right)A(x) = \sum\limits_{n\geq 0} F_n x^n - \sum\limits_{n\geq 0} F_n x^{n+1} - \sum\limits_{n\geq 0} F_n x^{n+2} = \sum\limits_{n\geq 0} F_n x^n - \sum\limits_{n\geq 1} F_{n-1}x^n - \sum\limits_{n\geq 2} F_{n-2}x^n$
Ces trois séries entières ayant le même rayon de convergence, on a donc :
$\left(1-x-x^2\right)A(x) = F_0 + F_1 x - F_0 x + \sum\limits_{n\geq 2}(F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n = x$ puisque $F_0 = 0$ et en utilisant la relation de récurrence définissant la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \left(1-x-x^2\right)A(x) = x}$$

II.B - Q10. Soit $x \notin \left\{-\varphi, \dfrac{1}{\phi}\right\}$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{1+x/\varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1+x/\varphi - 1 + \varphi x}{(1-\varphi x)(1+x/\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{x(1/\varphi + \varphi)}{1 + x(1/\varphi - \varphi) - x^2}$$

On utilise la question **I.A-Q5.** : $1/\varphi + \varphi = \sqrt{5}$ et $1/\varphi - \varphi = -1$ donc :

$$\underline{\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{1+x/\varphi} = \frac{x}{1-x-x^2}}$$

II.B - Q11. On sait que pour $|u| < 1$, on a $\dfrac{1}{1-u} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.
En posant $u = \varphi x$, on a, pour $|x| < \dfrac{1}{\varphi}$

$$\underline{\frac{1}{1-\varphi x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n x^n}$$

De même, en posant $u = -x/\varphi$ on a, pour pour $|x| < \varphi$:

$$\underline{\frac{1}{1-x/\varphi} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varphi^{-n} x^n}$$

II.B - Q12. Comme $\dfrac{1}{\varphi} < \varphi$, ces deux séries convergent pour $|x| < \dfrac{1}{\varphi}$.
On a, pour ces valeurs de x :
$\dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1}{1-\varphi x} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1}{1+x/\varphi} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}\right) x^n$
En outre, on a, d'après la question **II.B-Q10.**, $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1}{1-\varphi x} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1}{1+x/\varphi} = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ et, d'après la question **II.B-Q9.**, $A(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ pour tout x de $\left]-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi}\right[$.
Ainsi, les séries entières $A(x)$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}\right) x^n$ coïncident sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi}\right[$ donc leurs coefficients sont les mêmes :
<u>on retrouve bien le résultat de la question **I.B-Q6.**</u>

II.B - Q13. On sait que $\forall u \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^u = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n!}$.
En posant $u = \varphi x$, on a :

$$\mathrm{e}^{\varphi x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n \frac{x^n}{n!}$$

et :

$$\mathrm{e}^{-x/\varphi} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varphi^{-n} \frac{x^n}{n!}$$

Ces deux séries ayant un rayon de convergence infini, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\mathrm{e}^{\varphi x} - \mathrm{e}^{-x/\varphi}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}}{n!} \times x^n$$

On reconnaît l'expression de F_n et donc :

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\mathrm{e}^{\varphi x} - \mathrm{e}^{-x/\varphi}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{n!} x^n = B(x)}$$

II.B - Q14. D'après le résultat de la question précédente, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}, B(x)\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\mathrm{e}^{(1+\varphi)x} - \mathrm{e}^{(1-1/\varphi)x}\right)$
D'après **I.B - Q5.**, $\varphi + 1 = \varphi^2$ et $1 - \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1}{\varphi^2}$ donc on a :
$\underline{B(x)\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\mathrm{e}^{\varphi^2 x} - \mathrm{e}^{-x/\varphi^2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\varphi^{2n} - (-1)^{2n} \varphi^{-2n}}{n!} \times x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{F_{2n}}{n!} x^n}$

II.B - Q15. Soit $x \in \mathbb{R}$: les deux séries entières $B(x)\mathrm{e}^x$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{2n}}{n!} x^n$ ont un rayon de convergence infini et sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

D'une part, $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F_{2k}}{k!} x^k\right)^{(n)} = \sum_{k=n}^{+\infty} F_{2k} x^{k-n}$

En calculant la valeur en 0 de cette dérivée, on trouve donc F_{2n}.

D'autre part, en utilisant la formule de Leibniz de dérivation d'un produit, on a :

$(B(x)\mathrm{e}^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^{(k)}(x)\mathrm{e}^x$

En calculant cette dérivée en 0, on trouve donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$ et finalement :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}}$$

3 Représentation intégrale de la suite de Fibonacci

III.A - Q16. Pour toute fonction g $T-$périodique et continue sur $\mathbb{R}$, on a $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} g(x)\mathrm{d}x$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$: la fonction f est $\pi-$ périodique et continue sur $\mathbb{R}$, de même pour la fonction $x \mapsto \sin(2kx)$ donc en appliquant l'égalité ci-dessus avec $a = -\frac{\pi}{2}$:

$$\underline{b_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin(2kx)\mathrm{d}x}$$

f est paire, et la fonction $x \mapsto \sin(2kx)$ est impaire donc le produit est une fonction impaire. Ainsi, b_k est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 donc $\underline{b_k = 0}$.

III.A - Q17. Le raisonnement est identique à celui de la question précédente puisque f est $\pi-$périodique, et on a :

$$\underline{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x}$$

III.A - Q18. On pose $t = \tan x$ donc $\mathrm{d}t = \left(1 + \tan^2 x\right)\mathrm{d}x$.

De plus, $\lim_{x \to -\pi/2^+} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty$

La fonction $x \mapsto \tan x$ est une bijection de classe C^1 de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Enfin, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1/\cos^2 x} = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}$.

On a donc $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{4t^2}{1+t^2}} \times \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + 5t^2}$

On fait un nouveau changement de variable : on pose $u = \sqrt{5}t$ qui est une bijection de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{d}u = \sqrt{5}\mathrm{d}t$. En outre, les bornes sont inchangées et :

$a_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{5}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \frac{1}{\pi\sqrt{5}} [\mathrm{Arctan}\, u]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\pi\sqrt{5}}$ et finalement :

$$\underline{a_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

III.B - Q19. La fonction f est $\pi-$périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$: elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier en tout réel x, soit, comme $b_k = 0$ pour tout entier naturel non nul k :

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2kx) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{+\infty} \psi^k \cos(2kx)}$$

III.B - Q20. La fonction f est $\pi-$périodique et continue par morceaux. On peut donc appliquer le théorème de Parseval (avec $b_n = 0$ pour $n > 0$) :
$\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$, soit $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+4\sin^2 x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{5} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2\psi^{2k}}{5}$

On a donc $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+4\sin^2 x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\psi^{2k}$.
On reconnaît une série géométrique de premier terme ψ^2 et de raison ψ^2 :

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+4\sin^2 x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\frac{\psi^2}{1-\psi^2}$$

Or, $\displaystyle\frac{\psi^2}{1-\psi^2} = \frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}$ donc finalement :

$$\underline{\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+4\sin^2 x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{3\pi\sqrt{5}}{25}}$$

4 Temps d'attente de (Pile, Pile) dans un jeu de pile ou face infini

IV.A - Q21. $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}\left[(X_1 = 1)\bigcap(X_2 = 1)\right] = \mathbb{P}(X_1 = 1)\times\mathbb{P}(X_2 = 1)$ puisque les variables aléatoires X_1 et X_2 sont mutuellement indépendantes. Finalement, on a
$\underline{\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$.

$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}\left[(X_1 = 0)\bigcap(X_2 = 1)\bigcap(X_3 = 1)\right] = \mathbb{P}(X_1 = 0)\times\mathbb{P}(X_2 = 1)\times\mathbb{P}(X_3 = 1)$ puisque les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes. Finalement, on a $\underline{\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{8}}$.

$\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}\left[(X_2 = 0)\bigcap(X_3 = 1)\bigcap(X_4 = 1)\right] = \mathbb{P}(X_2 = 0)\times\mathbb{P}(X_3 = 1)\times\mathbb{P}(X_4 = 1)$ puisque les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes. Finalement, on a $\underline{\mathbb{P}(Y=3) = \frac{1}{8}}$.

Une condition nécessaire à l'évènement $(Y=4)$ est $(X_3 = 0)$. On a donc $(Y=4) =$
$\left[(X_1 = 1)\bigcap(X_2 = 0)\bigcap(X_3 = 0)\bigcap(X_4 = 1)\bigcap(X_5 = 1)\right]\bigcup\left[(X_1 = 0)\bigcap(X_2 = 1)\bigcap(X_3 = 0)\bigcap(X_4 = 1)\bigcap(X_5 = 1)\right]$
$\bigcup\left[(X_1 = 0)\bigcap(X_2 = 0)\bigcap(X_3 = 0)\bigcap(X_4 = 1)\bigcap(X_5 = 1)\right]$
Ces trois évènements sont incompatibles et les X_n étant mutuellement indépendantes, on a finalement $\underline{\mathbb{P}(Y=4) = \frac{3}{32}}$.

IV.A - Q22. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$Y = n+2$ signifie que la première apparition de "Pile,Pile" est pour le couple (X_{n+2}, X_{n+3}).
Ainsi, $Y = n+2$ signifie qu'on a pas eu d'apparition de "Pile,Pile" jusqu'au $n-$ième tirage, que le $n+1-$ième est un "Face", et que les tirages $n+2$ et $n+3$ sont des "Pile".
On a donc $Y = n+2 = C_n\bigcap(X_{n+1} = 0)\bigcap(X_{n+2} = 1)\bigcap(X_{n+3} = 1)$ et, comme les X_n sont mutuellement indépendantes, on a C_n, X_{n+1}, X_{n+2} et X_{n+3} sont mutuellement indépendantes, et :

$$\underline{\mathbb{P}(Y = n+2) = \mathbb{P}(C_n)\times\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)\times\mathbb{P}(X_{n+2} = 1)\times\mathbb{P}(X_{n+3} = 1) = \frac{1}{8}\mathbb{P}(C_n)}$$

IV.A - Q23. Soit $n \geq 2$: Comme $n \geq 2$, l'évènement $(X_1 = 1) \bigcap (X_2 = 1) \bigcap C_n$ est vide puisque dans ce cas $(X_1, X_2, ..., X_n)$ comporterait deux "1" consécutifs aux places 1 et 2.
Or, $(X_1 = 1) \bigcap C_n = [(X_1 = 1) \bigcap C_n] \bigcap [(X_2 = 0) \bigcup (X_2 = 1)] =$
$[(X_1 = 1) \bigcap C_n] \bigcap (X_2 = 0) \bigcup [(X_1 = 1) \bigcap C_n] \bigcap (X_2 = 1)$ et, finalement,

$$\underline{(X_1 = 1) \bigcap C_n = (X_1 = 1) \bigcap (X_2 = 1) \bigcap C_n}$$

IV.A - Q24. Soit $n \geq 2$:
Les évènements $(X_n = 0)$ et $(X_n = 1)$ constituent une partition de l'univers Ω. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}[C_n \bigcap (X_n = 0)] + \mathbb{P}[C_n \bigcap (X_n = 1)]$
La réalisation de l'évènement $C_n \bigcap (X_n = 0)$ signifie que l'on n'obtient pas deux "1" consécutifs jusqu'au $n-$ième lancer, et que le $n-$ième est un "0", donc il est égal à $C_{n-1} \bigcap (X_n = 0)$. En outre, le résultat du $n-$ième lancer est indépendant de tous les précédents donc $\mathbb{P}[C_{n-1} \bigcap (X_n = 0)] = \mathbb{P}(C_{n-1}) \times \mathbb{P}(X_n = 0) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(C_{n-1})$
La réalisation de l'évènement $C_n \bigcap (X_n = 1)$ signifie que l'on n'obtient pas deux "1" consécutifs jusqu'au $n-$ième lancer, et que le $n-$ième est un "1", donc signifie que $X_{n-1} = 0$ et la réalisation de C_{n-2}, et il est égal à $C_{n-2} \bigcap (X_n = 1) \bigcap (X_{n-1} = 0)$. En outre, le résultat du $n-$ième lancer et du $n-1-$ième lancer sont indépendant de tous les précédents donc
$\mathbb{P}[C_{n-2} \bigcap (X_n = 1) \bigcap (X_{n-1} = 0)] = \mathbb{P}(C_{n-2}) \times \mathbb{P}(X_n = 1) \times \mathbb{P}(X_{n-1} = 0) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(C_{n-2})$.
On a donc bien le résultat attendu :

$$\underline{\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(C_{n-1}) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(C_{n-2})}$$

IV.A - Q25. Soit $n \geq 2$:
En utilisant les questions **IV.B-22** et **IV.B-24**, on a donc :

$$\mathbb{P}(Y = n+2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y = n+1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(Y = n)$$

Pour $n = 1$, cette égalité s'écrit $\mathbb{P}(Y = 3) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(Y = 2) + \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(Y = 1)$ ce qui est vrai d'après la question **IV.A - Q21.**.
Cette égalité est donc vraie pour tout entier n non nul.

IV.B - Q26. On raisonne par récurrence.
Initialisation :
Pour $n = 1$, la propriété s'écrit $\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{1}{2^2}F_1$ ce qui est vrai.
Pour $n = 2$, la propriété s'écrit $\mathbb{P}(Y = 2) = \dfrac{1}{2^3}F_2$ ce qui est vrai.
Hérédité :
Soit $n \geq 1$: on suppose que $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}F_n$ et $\mathbb{P}(Y = n+1) = \dfrac{1}{2^{n+2}}F_{n+1}$
D'après la question précédente on a $\mathbb{P}(Y = n+2) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(Y = n+1) + \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(Y = n)$ donc :
$\mathbb{P}(Y = n+2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^{n+2}}F_{n+1} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2^{n+1}}F_n = \dfrac{1}{2^{n+3}}(F_{n+1} + F_n) = \dfrac{1}{2^{n+3}}F_{n+2}$.
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion :
D'après le principe de récurrence, on a donc :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2^{n+1}}F_n}$$

IV.B - Q27.
On a $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (Y = n)$ et comme cette union est disjointe, $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n)$.
On a donc $\mathbb{P}(Y=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 1$ soit $\mathbb{P}(Y=0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} F_n$
Donc $\mathbb{P}(Y=0) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} F_n = 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} F_n$ car $F_0 = 0$.
Finalement, $\mathbb{P}(Y=0) = 1 - \frac{1}{2} A\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1/2}{1-1/2-1/4}$ d'après la question **II.B - Q9.**, soit :

$$\underline{P(Y=0) = 0}$$

IV.B - Q28.
D'après la question précédente,
la probabilité de ne jamais obtenir deux "Pile" consécutifs est nulle.

IV.B - Q29. On doit étudier l'absolue convergence (donc la convergence puisque $Y(\Omega) = \mathbb{N}$) de la série de terme général $n\mathbb{P}(Y = n) = \frac{n}{2^{n+1}} F_n$.
D'après la question **II.A - Q8.**, la série entière de terme général $F_n x^n$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{\varphi}$ et pour tout x de $]-R, R[$, on a $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$.
On sait que cette série entière est dérivable à l'intérieur de son intervalle de convergence et que :

$$\forall x \in]-R, R[, A'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n F_n x^{n-1}$$

On a donc, d'après la question **II.B - Q9.** : $\left(\frac{x}{1-x-x^2}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n F_n x^{n-1} = \frac{1+x^2}{\left(1-x-x^2\right)^2}$ et
$\sum_{n=1}^{+\infty} n F_n x^{n+1} = \frac{x^2 + x^4}{\left(1-x-x^2\right)^2}$
Comme $\frac{1}{2} \in]-R, R[$, on a enfin :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} F_n = \frac{(1/2)^2 + (1/2)^4}{\left(1-1/2-(1/2)^2\right)^2} = 5$$

Ainsi, Y admet une espérance égale à 5 et on peut en déduire qu'en moyenne il faudra procéder à 6 lancers consécutifs de la pièce pour obtenir deux "Pile" consécutifs.

5 Décomposition d'un entier

V.A - Q30.
100=1+2+8+89 et 100=3+8+34+55 ne sont pas des F-décompositions de 100, puisque comportant deux termes consécutifs (1,2 et 34,55) de la suite de Fibonacci.
En revanche, 100=3+8+89 est une F-décomposition de 100.

V.A - Q31.
A l'aide de la question **I.A - Q1.**, on obtient facilement 32=21+11=21+8+3 et 272=233+39=233+4+5.
Une F-décomposition de 32 (*resp.* 272) est 3+8+21 (*resp.* 5+34+233)

V.B - Q32. Comme le suggère l'énoncé, on raisonne par récurrence sur r :
Initialisation :
Pour $r = 1$, la propriété s'écrit "Tout entier n qui admet une F-décomposition de la forme $n = F_r$ vérifie $F_r \leq n \leq F_{r+1}$" ce qui est vrai puisque la suite (F_n) est strictement croissante d'après la question **I.A - Q2.**
Hérédité :
Soit $r \geq 1$: on suppose que tout entier n qui admet une F-décomposition de la forme $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_r}$ vérifie $F_{k_r} \leq n < F_{k_r+1}$.
Soit n un entier qui admet une F-décomposition de la forme $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_{r+1}}$.
Comme F_{k_1}, F_{k_2},...,F_{k_r} sont tous positifs ou nuls on a $F_{k_{r+1}} \leq n$.
L'entier $F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_r}$ admet une F-décomposition comportant r termes donc il est strictement inférieur à F_{k_r+1}.
Comme on a affaire à une F-décomposition de n, on sait que F_{k_r} et $F_{k_{r+1}}$ ne sont pas consécutifs, et donc $F_{k_r+1} \leq F_{k_{r+1}-1}$.
On a donc $n < F_{k_{r+1}-1} + F_{k_{r+1}} = F_{k_{r+1}+1} \leq F_{k_{r+2}}$ puisque la suite (F_n) est strictement croissante.
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion :
D'après le principe de récurrence, on a donc :
Tout entier n qui admet une F-décomposition de la forme $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_r}$ vérifie $F_{k_r} \leq n \leq F_{k_{r+1}}$

V.B - Q33. On raisonne par l'absurde.
Supposons qu'il existe un entier n qui admette deux F-décompositions distinctes $n = F_{k_1} + \ldots + F_{k_r}$ et $n = F_{n_1} + \ldots + F_{n_s}$.
En les prenant "à l'envers" (dans le sens décroissant), il existe un rang à partir duquel ces deux décompositions diffèrent donc. Par exemple, on peut avoir $F_{k_r} = F_{n_s}$ et $F_{k_{r-1}} \neq F_{n_{s-1}}$.
Si on réécrit les deux décompositions en notant p leur partie commune (éventuellement $p = 0$), on a donc : $n = F_{k_1} + \ldots + F_{k_r0} + p$ et $n = F_{n_1} + \ldots + F_{n_s0} + p$, avec $F_{k_r0} \neq F_{n_s0}$.
L'entier $n - p$ admet une F-décomposition du type $F_{k_1} + \ldots + F_{k_r0}$ donc d'après la question **V.A - Q32.**, on a $F_{k_r0} \leq n - p < F_{k_r0+1}$ et de même, $F_{n_s0} \leq n - p < F_{n_s0+1}$ ce qui est absurde puisque $F_{k_r0} \neq F_{n_s0}$.
Ainsi, si un entier n admet une F-décomposition alors elle est unique.

V.B - Q34. 0 admet bien évidemment une F-décomposition. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. La suite de Fibonacci étant strictement croissante à partir de F_2, il existe un plus petit entier k tel que l'on ait $n \leq F_k$: l'idée est donc de démontrer par récurrence sur k que tout entier n vérifiant cette inégalité admet une F-décomposition, qui sera unique d'après la question précédente.
Initialisation :
Pour $k = 1$, la propriété s'écrit "Tout entier n inférieur ou égal à F_1 admet une F-décomposition. Or, $F_1 = 1$ et 1 est une F-décomposition de lui-même donc la propriété est vraie.
Hérédité :
Soit $k \geq 1$: on suppose que tout entier n inférieur ou égal à F_k admet une F-décomposition.
Soit n un entier inférieur ou égal à F_{k+1}. Si $n \leq F_k$ alors n admet une F-décomposition par hypothèse de récurrence.
Supposons maintenant que $F_k < n \leq F_{k+1}$, on a alors $0 < n - F_k \leq F_{k+1} - F_k$ soit $0 < n - F_k \leq F_{k-1}$.
Par hypothèse de récurrence, $n - F_k$ admet une F-décomposition : $n = F_{r_1} + \ldots + F_{r_s}$.
D'après la question **V.A - Q32.**, on a $F_{r_s} < F_k$ puisque $n - F_k \leq F_{k-1}$.
Ainsi, $n = F_{r_1} + \ldots + F_{r_s} + F_k$ qui est une F-décomposition de n à la condition que $r_s < k - 1$.
Supposons que $r_s = k - 1$ alors les deux derniers termes de cette "F-décomposition" de n sont $F_{k-1} + F_k = F_{k+1}$ donc tous les autres F_r sont nuls (on a $n \leq F_{k+1}$) et alors une

F-décomposition de n est $n = F_{k+1}$.
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion :
D'après le principe de récurrence, on a donc :
Tout entier n admet une F-décomposition, qui est donc unique.

V.C - Q35.

```
def fibonacci(p):
    liste=[0,1]
    if p==0:
        liste=[0]
    else :
        for i in range(p-1):
            Fk=liste[i]+liste[i+1]
            liste.append(Fk)
    return liste
```

V.C - Q36.

```
def recherche(n):
    liste=[0,1]
    if n==0 or n==1:
        return n
    else:
        i=1
        while liste[i]<=n:
            Fk=liste[i-1]+liste[i]
            liste.append(Fk)
            i=i+1
        return liste[i-1]
```

V.C - Q37.

```
def Fdecomposition(n):
    liste=[]
    while n>0:
        liste.append(recherche(n))
        n=n-recherche(n)
    liste.reverse()
    return(liste)
```

V.D - Q38. Le calcul est évident !

V.D - Q39.

```python
def codage(n):
    liste_fibo=[0,1]
    plus_grand_Fk=recherche(n)
    Fk=0
    i=1
    while Fk<plus_grand_Fk:
        Fk=liste_fibo[i-1]+liste_fibo[i]
        liste_fibo.append(Fk)
        i=i+1
    del liste_fibo[0]
    del liste_fibo[1]
    nombre_de_termes=len(liste_fibo)
    liste_decompo=[]
    for i in range(nombre_de_termes+1):
        liste_decompo.append(0)
    Fdecompo=Fdecomposition(n)
    for i in range(nombre_de_termes):
        if liste_fibo[i] in Fdecompo :
            liste_decompo[i]=1
        liste_decompo[nombre_de_termes]=1
    return liste_decompo
```

V.D - Q40.

```python
def decodage(liste_decompo):
    liste_fibo=fibonacci(len(liste_decompo))
    del liste_fibo[0]
    del liste_fibo[1]
    n=0
    for i in range(len(liste_decompo)-1):
        n=n+liste_fibo[i]*liste_decompo[i]
    return n
```