CORRIGÉ : MATH 1 ; MP ; Centrale_2013

I - Les équations de Cauchy-Riemann

Soient f et g dans $C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; $\widetilde{f}(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et $\widetilde{g}(r,\theta) = g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

I.A.1) $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$

$$\boxed{\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$$

$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$

$$\boxed{\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$$

I.A.2) D'aprés les équations de Cauchy-Riemann, et les formules de la question précèdente :

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - \sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta).$$

$$\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial r}(r,\theta) = -\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = -\frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta).$$

I.B - Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit φ_α la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall t > 0$; $\varphi_\alpha(t) = t^\alpha$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ε_n est l'espace des fonctions f de $C^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad t^2 f''(t) + tf'(t) - n^2 f(t) = 0.$$

I.B.1) Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, α un réel, et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$t^2\varphi_\alpha''(t) + t\varphi_\alpha'(t) - n^2\varphi_\alpha(t) = \alpha(\alpha-1)t^\alpha + \alpha t^\alpha - n^2 t^\alpha = (\alpha^2 - n^2)t^\alpha$.

$\boxed{\varphi_\alpha \in \varepsilon_n \text{ si et seulement si } \alpha = \pm n}$.

I.B.2) a) Recherche de ε_0. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C})$.

$f \in \varepsilon_0$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$; $t^2 f''(t) + tf'(t) = 0$ si et seulement si

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$; $f''(t) = -\frac{1}{t}f'(t)$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$; $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$; $f'(t) = \frac{\lambda}{t}$.

$\boxed{\varepsilon_0 = \{ f \in C^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C}) \quad tq \quad \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad f(t) = \lambda\ln(t) + \mu \}}$.

b) Recherche de ε_n ; $n \in \mathbb{Z}^*$.

φ_n et φ_{-n} sont deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, linéairement indépendantes de l'équation différentielle : $t^2 y'' + ty' - n^2 y = 0$.

ε_n est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 2, alors $\boxed{\varepsilon_n = vect(\varphi_n, \varphi_{-n})}$.

I.C - Pour $n \in \mathbb{Z}$, soient $c_{n,f}$ et $c_{n,g}$ les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ \begin{cases} c_{n,f}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ c_{n,g}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{g}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta \end{cases}.$$

I.C.1) L'application $\left[(r,\theta) \mapsto \widetilde{f}(r,\theta)e^{-in\theta}\right]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, alors l'expression $c_{n,f}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$ définit une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$\forall r > 0$; $(c_{n,f})'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial r}\left(\widetilde{f}(r,\theta)e^{-in\theta}\right)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$
$\forall r > 0$; $(c_{n,f})'(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$ (d'aprés la question **I.A.2**))
$\forall r > 0$; $(c_{n,f})'(r) = \frac{1}{2\pi r}[\widetilde{g}(r,\theta)e^{-in\theta}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi r}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{g}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta = \frac{in}{r}c_{n,g}(r)$.

<u>**N.B**</u> : On n'a pas besoin de vérifier l'hypothèse de domination, car il s'agit d'une intégration sur un segment de $\mathbb{R}$.

I.C.2) On refait un travail analogue à celui de la question précèdente pour montrer que $c_{n,g}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall r > 0$; $(c_{n,g})'(r) = -\frac{in}{r}c_{n,f}(r)$. Par conséquent :
$\forall r > 0$; $(c_{n,f})''(r) = -\frac{in}{r^2}c_{n,g}(r) + \frac{in}{r}(c_{n,g})'(r) = -\frac{1}{r}(c_{n,f})'(r) + \frac{n^2}{r^2}c_{n,f}(r)$.
D'où : $\forall r > 0$; $r^2(c_{n,f})''(r) + r(c_{n,f})'(r) - n^2c_{n,f}(r) = 0$.

Montrons que $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0.
$f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, donc en particulier continue sur la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ qui est compacte, donc bornée sur cette boule $\overline{B}$.
$\exists M > 0$; $\forall x \in \overline{B}$; $|f(x)| \leq M$, donc $\forall r \in]0,1]$; $\forall \theta \in \mathbb{R}$; $\left|\widetilde{f}(r,\theta)\right| \leq M$.
D'où $\forall r \in]0,1]$; $\left|c_{n,f}(r)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\widetilde{f}(r,\theta)e^{-in\theta}\right|d\theta \leq M$.
$c_{n,f}$ est donc bornée au voisinage de 0.

a) Selon **I.B.2**), Il existe des réels a_0, b_0 tels que : $\forall r > 0$; $c_{0,f}(r) = a_0 + b_0\ln(r)$.
Puisque $c_{0,f}$ est bornée au voisinage de 0 alors $b_0 = 0$.

b) Selon **I.B.2**) Pout $n \in \mathbb{Z}^*$, il existe des réels a_n, b_n tels que : $\forall r > 0$; $c_{n,f}(r) = a_nr^{|n|} + b_nr^{-|n|}$.
Encore puisque $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0 alors $b_n = 0$.

I.C.3) On fixe $r > 0$, l'application $\left[\theta \mapsto \widetilde{f}(r,\theta)\right]$ est 2π-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.
D'où $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; $\widetilde{f}(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,f}(r)e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_nr^{|n|}e^{in\theta} = \lim_{p\to\infty}\sum_{n=-p}^{p} a_nr^{|n|}e^{in\theta}$.

I.D - Dans cette question on suppose que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.
I.D.1) D'aprés **I.A.1**) $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$
alors $\left|\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\right| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right|$.
alors $\left|\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\right|$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
D'aprés ce qui précède, $\forall r > 0$; $\left|(c_{n,f})'(r)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\right|d\theta$.
D'où $(c_{n,f})'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.D.2) D'aprés **I.C.2**), $\forall n \in \mathbb{Z}$, tel que : $|n| \geq 2$; $\forall r > 0$; $(c_{n,f})'(r) = |n|a_nr^{|n|-1}$.
et puisque $(c_{n,f})'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $a_n = 0$.
On déduit d'aprés **I.C.3**), $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; $\widetilde{f}(r,\theta) = a_{-1}re^{-i\theta} + a_0 + a_1re^{i\theta}$.
D'aprés **I.A.1**) $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$
$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = a_{-1}e^{-i\theta} + a_1e^{i\theta} = (a_{-1} + a_1)\cos(\theta) + i(a_1 - a_{-1})\sin(\theta)$
Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont linéairement indépendantes, alors
$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (a_{-1} + a_1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = i(a_1 - a_{-1})$.
D'où les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont constantes.

II - Quelques solutions de (1)

On rappelle l'équation : $(\mathbf{1})\ \forall (x,y) \in \Omega \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 1.$
Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction inconnue de $C^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ vérifie $(\mathbf{II.1})$ sur I si et seulement si :

$$\forall t \in I \quad ; \quad u(t)(u(t) + 2tu'(t)) = -1.$$

II.A) Soit $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ et $\varphi \in \mathcal{P}_2$ définie par :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \varphi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 4ac - b^2.$
φ vérifie $(\mathbf{1})$ si et seulement si $4ac - b^2 = 1$.

II.B) Posons : $h(t,x) = -\frac{1+x^2}{2tx}$. h est de classe C^1 sur l'ouvert $(\mathbb{R}^*)^2$.
Si $(t_0, u_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$, alors d'aprés le théorème de Cauchy Lipschitz, il existe une et une seule solution maximale (I,u) de l'équation : $x' = h(t,x)$, tel que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}^*$ contenant t_0 et tel que $u(t_0) = u_0$. On a alors $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ solution de $(\mathbf{II.1})$.

II.C) Soit J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.
Supposons qu'il existe une solution polynômiale u de $(\mathbf{II.1})$ sur J.
par passage au degré dans l'équation $(\mathbf{II.1})$, $\deg(u) = 0$ et u est constant et $u^2 = -1$.
Il n'existe donc pas de solution polynômiale de $(\mathbf{II.1})$ sur un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

II.D) Soient J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. $\Omega(J) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tq} \quad xy \in J\}$.
$w \in C^2(J, \mathbb{R})$ et W la fonction définie par : $\forall (x,y) \in \Omega(J) \quad ; \quad W(x,y) = w(xy)$.

II.D.1) $\forall x \in J$; $(1,x) \in \Omega(J)$, alors $\Omega(J)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$.
$\Omega(J) = \Phi^{-1}(J)$ avec Φ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $\Phi(x,y) = xy$.
Φ est continue et J un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $\Omega(J)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

II.D.2) W est la composée de deux fonctions de classe C^2, alors $W \in C^2(\Omega(J), \mathbb{R})$
$\forall (x,y) \in \Omega(J) \quad ; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = x^2y^2(w''(xy))^2 - (w'(xy) + xyw''(xy))^2$
$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = -w'(xy)(w'(xy) + 2xyw''(xy)).$
Si W vérifie $(\mathbf{1})$ sur $\Omega(J)$, alors en remplaçant y par 1 et x quelconque dans J, on trouve que w vérifie $(\mathbf{II.1})$ sur J, et la reciproque est évidente (en posant $t = xy$).

II.D.3) Si w est affine, c'est évident que W est la restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction de $\mathcal{P}_2$.
Reciproquement, supposons que W est la restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction de $\mathcal{P}_2$.
Il existe $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ tel que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad W(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$
$\forall x \in J$; $w(x) = W(x,1) = ax^2 + (b+d)x + c + e + f$.
Par identification des fonctions polynômes $W(x,1) = W(1,x)$, on a : $a = c$ et $d = e$.
$W(x,y) = a(x+y)^2 + d(x+y) + (b-2a)xy + f$.

Fixons t dans J. Pour tout réel s tel que : $s^2 > 4t$, il existe $(x,y) \in \Omega(J)$ tel que : $\left\{\begin{array}{l} x+y = s \\ xy = t \end{array}\right.$.

$W(x,y) = as^2 + ds + (b-2a)t + f$ indépendant de s, donc $a = d = 0$.
$\forall t \in J \quad ; \quad w(t) = W(1,t) = bt + f$.
D'où w est une fonction affine.

II.E) Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant (**1**) sur Ω, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\Omega_{a,b}$ l'image de Ω par la translation de vecteur (a,b) et $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\Omega_{a,b}$ par :

$$\forall (x,y) \in \Omega_{a,b} \quad ; \quad f_{a,b}(x,y) = f(x-a, y-b).$$

Tout provient du faite que : $\forall (x,y) \in \Omega_{a,b}$; $\frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-a,y-b)$; $\frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x-a,y-b)$) ; $\frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-a,y-b)$.

II.F) D'aprés **II.B**) il existe une solution maximale (I,u) de $(\mathbf{II.1})$ tel que I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
Soit w_0 une primitive de u sur I, et posons : $\forall \gamma \in \mathbb{R}$; $\forall t \in I$; $w_\gamma(t) = w_0(t) + \gamma$.
$\forall (x,y) \in \Omega(I)$; $W_\gamma(x,y) = w_\gamma(xy)$ définit d'aprés **II.D.2**) une solutions de (**1**) sur $\Omega(I)$.
D'aprés **II.C**) u ne peut pas être une fonction polynômiale sur I, donc w_γ ne peut pas être une fonction affine, alors d'aprés **II.D.3**) aucun des W_γ n'est la restriction à $\Omega(I)$ d'un élèment de $\mathcal{P}_2$.
Soient $t_0 \in I$, alors $(t_0, 1) \in \Omega(I)$, posons $(a,b) = (x_0,y_0) - (t_0,1)$ et U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$, image de $\Omega(I)$ par la translation de vecteur (a,b). U contient évidement (x_0,y_0).
$\forall \gamma \in \mathbb{R}$; $V_\gamma(x,y) = W_\gamma(x-a,y-b) = w_0((x-a)(y-b)) + \gamma$, définit une solution de (**1**) sur U.
La famille $(V_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{R}}$ est une famille infinie de solutions de (**1**) sur U, et aucun des V_γ n'est la restriction à U d'un élèment de $\mathcal{P}_2$.

III - Un critère de difféomorphisme

III.A) **Définition** :
Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, est dite un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, s'elle est bijective de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et f^{-1} aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(ii) f est bijective et $\forall p \in \mathbb{R}^2$; $df_p \in GL(\mathbb{R}^2)$.

Dans la suite de cette partie, on considère $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
On suppose que $\forall (p,h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$; $< dF_p(h), h > \geq \alpha \|h\|^2$.
On se propose dans cette partie de montrer que F est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

III.B - Soient $p, q \in \mathbb{R}^2$.
III.B.1) Soit ϕ l'application définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par $\phi(t) = F(tq + (1-t)p)$.
ϕ est de classe C^1 sur $[0,1]$, alors $\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)dt$.
C'est à dire : $F(q) - F(p) = \int_0^1 dF_{tq+(1-t)p}(q-p)dt = \int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p)dt$

III.B.2) $< F(q) - F(p), q-p > = < \int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p)dt, q-p >$
$\int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p)dt = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} dF_{p+\frac{k}{n}(q-p)}(q-p)$ et le produit scalaire est une forme bilinéaire continue sur $\mathbb{R}^2$, alors : $< F(q) - F(p), q-p > = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left\langle dF_{p+\frac{k}{n}(q-p)}(q-p), q-p \right\rangle$.
$< F(q) - F(p), q-p > = \int_0^1 \langle dF_{tq+(1-t)p}(q-p), q-p \rangle dt \geq \int_0^1 \alpha \|q-p\|^2 dt = \alpha \|q-p\|^2$.

III.C - Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et G^a l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall p \in \mathbb{R}^2$; $G^a(p) = \|F(p) - a\|^2$.

III.C.1) Soient $p, h \in \mathbb{R}^2$. $G^a(p+h) = < F(p+h) - a, F(p+h) - a >$

$G^a(p+h) = < F(p) - a + dF_p(h) + \|h\|\varepsilon(h), F(p) - a + dF_p(h) + \|h\|\varepsilon(h) >$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

$G^a(p+h) = G^a(p) + 2 < F(p) - a, dF_p(h) > + \|h\|(2 < F(p) - a + dF_p(h), \varepsilon(h) > + \|h\|.\|\varepsilon(h)\|^2) + \|dF_p(h)\|^2$

$G^a(p+h) = G^a(p) + 2 < F(p) - a, dF_p(h) > + \circ(\|h\|)$. puisque $\|dF_p(h)\|^2 \leq \||dF_p|\|^2\|h\|^2$.

$\||dF_p|\|$ désigne la norme subordonée à la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ appliquée à dF_p.

Ainsi $\boxed{\forall p, h \in \mathbb{R}^2 \ ; \ dG_p^a(h) = 2 < F(p) - a, dF_p(h) >}$

III.C.2) D'aprés **III.B.2**) $\forall p, q \in \mathbb{R}^2 \ ; \ < F(q) - F(p), q - p > \geq \alpha\|q - p\|^2$

En particulier pour $p = 0$, $\forall q \in \mathbb{R}^2 \ ; \ < F(q) - F(0), q > \geq \alpha\|q\|^2$

Soit encore : $< F(q), q > \geq \alpha\|q\|^2 + < F(0), q > \underbrace{\geq}_{\textbf{Cauchy Schwarz}} \alpha\|q\|^2 - \|F(0)\|.\|q\|$

$\forall q \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \ ; \ \|F(q)\| \underbrace{\geq}_{\textbf{Cauchy Schwarz}} \frac{<F(q),q>}{\|q\|} \geq \alpha\|q\| - \|F(0)\|$.

D'où $\lim\limits_{\|q\|\to+\infty} \|F(q)\| = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{\|p\|\to+\infty} G^a(p) = +\infty$.

III.C.3) D'aprés la question précèdente, il existe $R > 0$, tel que pour tout $p \in \mathbb{R}^2$, $G^a(p) > G^a(0)$ dés que $\|p\| > R$.

G^a est continue sur la boule fermée compacte $\overline{B}(0,R)$ donc bornée et atteint ses bornes sur cette boule. Si p_0 est un point où G^a atteint sa borne inf sur $\overline{B}(0,R)$ alors $G^a(0) \geq G^a(p_0)$.

p_0 est donc un minimum globale de G^a sur $\mathbb{R}^2$.

III.C.4) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, F est injective d'aprés **III.B.2**) et d'aprés l'hypothèse :

$\forall p, h \in \mathbb{R}^2 \ ; \ < dF_p(h), h > \geq \alpha\|h\|^2$, on déduit que $\forall p \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \ker(dF_p) = \{0\}$.

$\forall p \in \mathbb{R}^2 \ ; \ dF_p \in GL(\mathbb{R}^2)$, alors d'aprés le théorème d'inversion globale, F réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$.

Par l'absurde supposons que $F(p_0) \neq a$, Soit $r > 0$ tel que la boule $B(F(p_0), r) \subset V$.

Sur le segment liant $F(p_0)$ à a, il y'a un point q de la boule $B(F(p_0), r)$ tel que :

$\|q - a\| < \|F(p_0) - a\|$, soit $p \in \mathbb{R}^2$ tel que : $F(p) = q$.

$G^a(p) < G^a(p_0)$ ce qui est absurde. Finalement $G^a(p_0) = a$.

III.D) On a vu à la question précèdente que F réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$. On a aussi montré à la question précèdente que F est surjective.

D'où F réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

IV - Le théorème de Jörgens

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (**1**) sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, soient $u(x,y) = x + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $v(x,y) = y + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$.

On suppose dans les questions **IV.A**) et **IV.B**) que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0$.

IV.A - $JacF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$

$$JacF(x,y) - I_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$ (notations de Mange).

C'est une matrice symétrique réelle de déterminant $1 > 0$ telle que $r > 0$, elle alors symétrique définie positive.
Alors : $\forall p,h \in \mathbb{R}^2$; $< dF_p(h) - h, h > \geq 0$ et par suite : $\forall p,h \in \mathbb{R}^2$; $< dF_p(h), h > \geq \|h\|^2$. De plus $F \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ alors d'aprés la partie précèdente, F réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

IV.B - Dans la suite on notera :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$; $s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$; $t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.
On a alors : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $r(x,y) > 0$ et $r(x,y)t(x,y) - s(x,y)^2 = 1$.

IV.B.1) D'aprés **IV.A**) F réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Posons : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $\begin{cases} G(x,y) = (x - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -y + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) \\ H(x,y) = G \circ F^{-1}(x,y) = (\varphi(x,y), \psi(x,y)) \end{cases}$
On a : $G,H \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ et $\varphi,\psi \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $H \circ F = G$.
D'où l'existence de $\varphi,\psi \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ tels que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $\begin{cases} \varphi(u(x,y),v(x,y)) & = x - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \psi(u(x,y),v(x,y)) & = -y + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$.

IV.B.2) $\begin{cases} 1 - r = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (1+r)\frac{\partial \varphi}{\partial u} + s\frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ -s = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = s\frac{\partial \varphi}{\partial u} + (1+t)\frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{cases}$.

$\Delta = (1+r)(1+t) - s^2 = 2 + r + t > 0$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} 1-r & s \\ -s & 1+t \end{vmatrix}}{2+r+t} = \frac{(1-r)(1+t)+s^2}{2+r+t} = \frac{t-r}{2+r+t}. \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{t-r}{2+r+t}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\begin{vmatrix} 1+r & 1-r \\ s & -s \end{vmatrix}}{2+r+t} = \frac{-s(1+r)-s(1-t)}{2+r+t} = \frac{-2s}{2+r+t}. \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{-2s}{2+r+t}}$$

$$\begin{cases} s = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (1+r)\frac{\partial \psi}{\partial u} + s\frac{\partial \psi}{\partial v} \\ -1 + t = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = s\frac{\partial \psi}{\partial u} + (1+t)\frac{\partial \psi}{\partial v} \end{cases}$$

$\Delta = (1+r)(1+t) - s^2 = 2 + r + t > 0$.

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} s & s \\ -1+t & 1+t \end{vmatrix}}{2+r+t} = \frac{s(1+t)-s(-1+t)}{2+r+t} = \frac{2s}{2+r+t}. \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{2s}{2+r+t}}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{\begin{vmatrix} 1+r & s \\ s & -1+t \end{vmatrix}}{2+r+t} = \frac{(1+r)(-1+t)-s^2}{2+r+t} = \frac{t-r}{2+r+t}. \boxed{\frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{t-r}{2+r+t}}.$$

IV.B.3) $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right| = \left|\frac{t-r}{2+r+t}\right| \leq \frac{t+r}{2+r+t} \leq 1$ et $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right| = \left|\frac{-2s}{2+r+t}\right| \leq \frac{2|s|}{2+r+t} = 2\frac{\sqrt{rt-1}}{2+r+t} \leq \frac{2\sqrt{rt}}{r+t} \leq 1.$

IV.B.4) $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tels que : $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial v}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\partial\psi}{\partial u}$.
et puisque ces dérivées partielles sont bornées sur $\mathbb{R}^2$, alors d'aprés **I.D.2)**
$\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sont constantes.

IV.B.5) Posons : $\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$ et $\beta = \frac{\partial\varphi}{\partial v}$, alors d'aprés **IV.B.2)** $\alpha = \frac{t-r}{2+r+t}$ et $\beta = \frac{-2s}{2+r+t}$
$\alpha^2(2+r+t)^2 = (t-r)^2$ et $\beta^2(2+r+t)^2 = 4s^2 = 4(rt-1)$.
La somme de ces deux équations donne : $(\alpha^2+\beta^2)(2+r+t)^2 = (t+r)^2 - 4$
$(\alpha^2+\beta^2-1)(t+r)^2 + 4(\alpha^2+\beta^2)(t+r) + 4(\alpha^2+\beta^2+1) = 0$.
On voit ceci comme une équation de second degré d'inconnu $(t+r)$.
$\Delta' = 4$ et $(t+r) = \frac{-2(\alpha^2+\beta^2)\pm 2}{(\alpha^2+\beta^2-1)}$ et puisque $(t+r) > 0$ alors : $(t+r) = \frac{2(1+\alpha^2+\beta^2)}{(1-\alpha^2-\beta^2)} = \gamma$.
$\begin{cases} t-r = \alpha(2+\gamma) \\ t+r = \gamma \end{cases}$ et $t = \frac{\alpha(2+\gamma)+\gamma}{2}$ et $r = \frac{\gamma-\alpha(2+\gamma)}{2}$ et $s = -\frac{1}{2}\beta(2+\gamma)$ sont constantes.

IV.C - Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (**1**). Remarquons que $-f$ vérifie aussi (**1**).
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 + 1 > 0$
L'application $\left[(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right]$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles et ne s'annule pas, alors garde un signe constant sur $\mathbb{R}^2$, alors d'aprés la remarque ci-dessus on peut supposer que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0$.
On est alors dans les conditions de **IV.A)** et de **IV.B)**.
r, s, et t sont constantes sur $\mathbb{R}^2$.
Posons : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; A(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - rx - sy$ et $B(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - sx - ty$.
A et B sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} = 0$.
Alors A et B sont constantes sur $\mathbb{R}^2$, Posons : $A(x,y) = p$ et $B(x,y) = q$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = p + rx + sy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = q + sx + ty$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; f(x,y) = px + r\frac{x^2}{2} + sxy + g(y)$ avec $g'(y) = q + ty$.
D'où il existe une constante réelle k telle que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; f(x,y) = px + qy + r\frac{x^2}{2} + t\frac{y^2}{2} + sxy + k$.