

X-ENS PSI - 2009

Un corrigé

Première partie.

1. Des calculs élémentaires donnent

$$\chi_{A(\alpha)} = \chi_{B(\alpha)} = X^2 - X + 1 \quad \text{et} \quad \chi_{A(\alpha)+B(\alpha)} = X^2 - 2X + 4\alpha^2 + 4$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{Sp}(A(\alpha)) &= \text{Sp}(B(\alpha)) = \{j, j^2\} \quad \text{où} \quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ \text{Sp}(A(\alpha) + B(\alpha)) &= \left\{1 + i\sqrt{3 + 4\alpha^2}, 1 - i\sqrt{3 + 4\alpha^2}\right\} \end{aligned}$$

2. Quand α tend vers $+\infty$, les valeurs propres de $A(\alpha) + B(\alpha)$ ont un module de limite infinie alors que les valeurs propres de $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ ont un module qui reste égal à 1. On ne peut donc en général borner $\text{Sp}(A + B)$ uniquement avec $\text{Sp}(A)$ et $\text{Sp}(B)$.

3.a) Soit $F \in \mathcal{E}_k$. On a

$$\dim(F) + \dim(\text{Vect}(v_k, \dots, v_n)) = k + (n - k + 1) = n + 1$$

et les espace F et $\text{Vect}(v_k, \dots, v_n)$ ne sont donc pas en somme directe. Leur intersection est ainsi un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ (et de dimension ≥ 1).

3.b) Soit $F \in \mathcal{E}_k$. D'après la question précédente, on peut trouver $x \neq 0$ dans F et dans $\text{Vect}(v_k, \dots, v_n)$. La famille des v_i étant orthonormée, on a

$$x = \sum_{i=k}^n \langle v_i | x \rangle v_i \quad \text{et} \quad x^* x = \|x\|^2 = \sum_{i=k}^n |\langle v_i | x \rangle|^2$$

et on en déduit (on utilise encore le caractère orthonormé) que

$$x^* A x = \langle x | A x \rangle = \left\langle \sum_{i=k}^n \langle v_i | x \rangle v_i \right| \sum_{i=k}^n \langle v_i | x \rangle \lambda_i v_i \rangle = \sum_{i=k}^n \lambda_i |\langle v_i | x \rangle|^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^n |\langle v_i | x \rangle|^2 = \lambda_k x^* x$$

$x^* x = \|x\|^2$ étant > 0 , on a donc

$$\frac{x^* A x}{x^* x} \geq \lambda_k$$

3.c) Choisissons $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$, qui est un élément de $\mathcal{E}_k$. Par un calcul similaire, on a

$$\forall x \in F, \quad x^* A x = \sum_{i=1}^k \lambda_i |\langle v_i | x \rangle|^2 \leq \lambda_k x^* x$$

En divisant par $x^* x$ pour $x \neq 0$ et en passant au maximum, on obtient

$$\sup_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \leq \lambda_k$$

Pour $x = v_k$, les inégalités sont des égalités. L'inégalité ci-dessus est donc une égalité et la borne supérieure un maximum :

$$\max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k$$

3.d) Soit G un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ de dimension ≥ 1 . On a

$$\forall x \in G \setminus \{0\}, \frac{x^* A x}{x^* x} = y^* A y \text{ avec } y = \frac{x}{\|x\|}$$

Quand x varie dans $G \setminus \{0\}$, y varie dans $\{z \in G / \|z\| = 1\}$ qui est un compact de $\mathbb{C}^n$ (fermé et borné). Comme $\phi : z \mapsto z^* A z$ est continue, elle est bornée sur ce compact et atteint ses bornes. On en déduit l'existence de

$$\max_{x \in G \setminus \{0\}} \frac{x^* A x}{x^* x}$$

D'après la question 3.b. on a

$$\forall F \in \mathcal{E}_k, \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \lambda_k$$

puisqu'il existe au moins un x d'un F donné quelconque dans $\mathcal{E}_k$ tel que le quotient soit plus grand que λ_k . On peut alors passer à la borne inférieure pour obtenir

$$\inf_{F \in \mathcal{E}_k} \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \lambda_k$$

Par ailleurs, la question 3.c montre qu'il existe un F de $\mathcal{E}_k$ pour lequel on a une égalité. Ainsi, l'inégalité précédente est une égalité et on a un minimum :

$$\min_{F \in \mathcal{E}_k} \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k$$

3.e) On note que $A + B$ est hermitienne et que l'on peut lui appliquer ce qui précède.

$k \in \{1, \dots, n\}$ est ici fixé.

- Soit $F \in \mathcal{E}_k$ quelconque. 3.b. donne un élément non nul x de $\mathcal{E}_k$ et on a

$$\max_{z \in F \setminus \{0\}} \frac{z^* (A + B) z}{z^* z} \geq \frac{x^* (A + B) x}{x^* x} = \frac{x^* A x}{x^* x} + \frac{x^* B x}{x^* x} \geq \lambda_k(A) + \frac{x^* B x}{x^* x}$$

Mais un calcul similaire à celui de 3.b (en décomposant x sur une b.o.n. $(w_1, \dots, w_n)$ de vecteurs propres de B) donne $\frac{x^* B x}{x^* x} \geq \lambda_1(B)$. On a donc

$$\max_{z \in F \setminus \{0\}} \frac{z^* (A + B) z}{z^* z} \geq \lambda_k(A) + \lambda_1(B)$$

Ceci est vrai pour tout choix de F dans $\mathcal{E}_k$. En passant au minimum, et avec la question précédente, on a donc

$$\lambda_k(A + B) \geq \lambda_k(A) + \lambda_1(B)$$

- De façon semblable,

$$\lambda_k(A) \geq \lambda_k(A + B) + \lambda_1(-B)$$

Or, les valeurs propres de $-B$ sont les opposées de celles de B et $\lambda_1(-B) = -\lambda_n(B)$. Ainsi

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(B) \geq \lambda_k(A + B)$$

On a ainsi prouvé que

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A + B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$$

Deuxième partie.

4.a) Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{C}^n$. On a alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{e_i^* A e_i}{e_i^* e_i} = a_{i,i} \in \mathcal{V}(A)$$

4.b) Soit $z \in \mathcal{V}(H(A))$; il existe $x \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que

$$z = \frac{x^* H(A) x}{x^* x} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^* A x}{x^* x} + \frac{x^* A x}{x^* x} \right)$$

En remarquant que $x^* A^* x = (Ax)^* x = \langle Ax | x \rangle = \overline{\langle x | Ax \rangle} = \overline{x^* A x}$ on en déduit (on utilise aussi $x^* x \in \mathbb{R}$) que

$$z = \operatorname{Re} \left(\frac{x^* A x}{x^* x} \right) \in \operatorname{Re}(\mathcal{V}(A))$$

Réciproquement, soit $z \in \operatorname{Re}(\mathcal{V}(A))$. Il existe $x \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $z = \operatorname{Re} \left(\frac{x^* A x}{x^* x} \right)$. Le même calcul donne alors $z = \frac{x^* H(A) x}{x^* x} \in \mathcal{V}(H(A))$.

On a prouvé que

$$\mathcal{V}(H(A)) = \operatorname{Re}(\mathcal{V}(A))$$

4.c) Soit $z \in \mathcal{V}(A + B)$. Il existe $x \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que

$$z = \frac{x^* (A + B) x}{x^* x} = \frac{x^* A x}{x^* x} + \frac{x^* B x}{x^* x} \in \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$$

On a prouvé que

$$\mathcal{V}(A + B) \subset \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$$

4.d) Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre (donc non nul) associé. On a

$$\frac{x^* A x}{x^* x} = \frac{\langle x | A x \rangle}{x^* x} = \frac{\langle x | \lambda x \rangle}{x^* x} = \lambda$$

et donc $\lambda \in \mathcal{V}(A)$. Ceci montre que

$$\operatorname{Sp}(A) \subset \mathcal{V}(A)$$

4.e) On combine les deux questions précédentes :

$$\operatorname{Sp}(A + B) \subset \mathcal{V}(A + B) \subset \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$$

4.f) Notons $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ non nul. On a

$$\frac{x^* A x}{x^* x} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2}{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

Les λ_i étant des réels ordonnés (multiplier par $|x_i|^2 \geq 0$ ne change pas le signe des inégalités) on a alors

$$\lambda_1 \leq \frac{x^* A x}{x^* x} \leq \lambda_n$$

De plus, si $z \in [\lambda_1, \lambda_n]$ alors il existe $t \in [0, 1]$ tel que $z = t\lambda_1 + (1 - t)\lambda_n$. En choisissant $x = (\sqrt{t}, 0, \dots, 0, \sqrt{1 - t})$ on a alors $\frac{x^* A x}{x^* x} = z$.

On a ainsi montré (par double inclusion) que

$$\mathcal{V}(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = [\lambda_1, \lambda_n]$$

4.g) Supposons U unitaire. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, (Ux)^*(Ux) = x^*(U^*U)x = x^*x$$

Soit $z \in \mathcal{V}(U^*AU)$; il existe x non nul tel que

$$z = \frac{x^*U^*AUx}{x^*x} = \frac{y^*Ay}{y^*y} \text{ avec } y = Ux$$

et on a donc

$$\mathcal{V}(U^*AU) \subset \mathcal{V}(A)$$

Comme U^{-1} est aussi unitaire (avec $(U^{-1})^* = (U^*)^{-1}$), on a aussi

$$\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}((U^{-1})^*U^*AUU^{-1}) \subset \mathcal{V}(U^*AU)$$

et on a donc l'égalité annoncée.

4.h) Soit A hermitienne et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (qui sont réelles et que l'on peut ordonner).

Par le théorème T et les question f et g , on a $\mathcal{V}(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$ et ainsi

$$\mathcal{V}(A) = [\min \text{Sp}(A), \max \text{Sp}(A)]$$

4.i) On procède comme en début de question 3.d. On a

$$\forall x \neq 0, \frac{x^*AX}{x^*x} = y^*Ay \text{ avec } y = \frac{x}{\|x\|}$$

Quand x varie dans $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, y varie dans $\{z \in \mathbb{C}^n / \|z\| = 1\}$ qui est un compact de $\mathbb{C}^n$ (fermé et borné). Comme $\phi : z \mapsto z^*Az$ est continue, l'image d'un compact par ϕ est un compact. Ainsi, $\mathcal{V}(A)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

5.a) Supposons A nilpotente. Il existe m tel que X^m annule A . Or, toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur et 0 est donc la seule valeur propre possible. Comme dans $\mathbb{C}$ il y a au moins une valeur propre alors $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

Réciproquement, si 0 est la seule valeur propre complexe de A alors $\chi_A = (-1)^n X^n$ (tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$). Comme ce polynôme annule A (théorème de Cayley-Hamilton), $A^n = 0$ et A est nilpotente.

5.b)

i) Si $\mathcal{V}(A) = \{0\}$ alors (question 4.d) $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$ et comme il y a au moins une valeur propre cette inclusion est une égalité. Avec 5.a on en déduit que A est nilpotente.

ii) On remarque tout d'abord que par théorème du rang (et compte-tenu de la relation sur la dimension de l'orthogonal)

$$\dim(\ker(A)) = \dim(\text{im}(A)^\perp)$$

On choisit d'écrire l'image de A sous la forme $\text{im}(A)$ avec une minuscule pour éviter toute confusion ultérieure avec une partie imaginaire.

Ainsi, il nous suffit de prouver une inclusion pour conclure, par dimension, à l'égalité des ensembles. On remarque, comme $\mathcal{V}(A) = \{0\}$, que

$$\forall z \neq 0, z^*Az = 0$$

l'égalité restant vraie si $z = 0$. Soit alors $x \in \ker(A)$; on a

$$\forall y \in \mathbb{C}^n, 0 = (x+y)^*A(x+y) = (x+y)^*Ay = x^*Ay$$

On a donc x orthogonal à tout élément de l'image de A c'est à dire $\ker(A) \subset \text{im}(A)^\perp$, ce que l'on voulait prouver.

iii) Avec la question 4.b, on a $\mathcal{V}(H(A)) = \{0\}$. $H(A)$ est donc une matrice nilpotente. Or, elle est hermitienne et donc diagonalisable par le théorème T . C'est une matrice diagonalisable dont 0 est l'unique valeur propre, c'est donc la matrice nulle. On a ainsi $A^* = -A$ et A est anti-hermitienne. Le même théorème T indique que A est diagonalisable, et comme elle est nilpotente on peut, comme pour $H(A)$ conclure à sa nullité.

Remarque : ce n'est certainement pas la méthode attendue puisque l'on n'utilise pas la question ii). On peut envisager une méthode alternative. Supposons, par l'absurde, que $A \neq 0$. $\text{im}(A)$ est alors un sous-espace de dimension ≥ 1 stable par l'endomorphisme a canoniquement associé à A . a induit sur $\text{im}(A)$ un endomorphisme $\tilde{a}$ qui admet, puisque l'on est sur $\mathbb{C}$, une valeur propre μ . On doit avoir $\mu = 0$ (car μ est aussi valeur propre de A et car A est nilpotente) et un élément du sous-espace propre associé est dans $\text{im}(a)$ et $\ker(a)$ et est donc nul. On a ainsi une contradiction.

Troisième partie.

6.a) On a ici une matrice à “diagonale dominante”. Supposons, par l'absurde, qu'elle soit non inversible et notons x un élément non nul de son noyau. Il existe un indice i tel que $|x_i|$ soit maximal. La nullité de la i -ième coordonnée de Ax donne

$$a_{i,i}x_i = - \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$$

En passant au module, et avec l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$|a_{i,i}||x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j|$$

Comme $\forall j, |x_j| \leq |x_i|$ et $|x_i| > 0$, on obtient (en divisant par $|x_i|$) que

$$|a_{i,i}| \leq L_i(A)$$

ce qui contredit l'hypothèse faite par l'énoncé. On a ainsi montré que A est inversible.

6.b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$; $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc pas “à diagonale dominante”. Ainsi,

$$\exists i / |a_{i,i} - \lambda| \leq L_i(A)$$

ce qui indique que $\lambda \in G(A)$. Comme A et tA ont même spectre, on a aussi $\lambda \in G({}^tA)$ et on a finalement montré que

$$\text{Sp}(A) \subset G(A) \cap G({}^tA)$$

7.a) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de convexes et C l'intersection de tous les C_i . Soient $x_1, x_2 \in C$ et $t \in [0, 1]$. Pour tout i , $x_1, x_2 \in C_i$ et C_i est convexe donc $tx_1 + (1-t)x_2 \in C_i$. Cet élément est ainsi dans C (il est dans tous les C_i) et C est convexe.

7.b) Notons $\mathcal{C}_X$ l'ensemble de tous les convexes contenant X (il y a au moins $\mathbb{C}^n$) et

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}_X} C$$

Cet ensemble est un convexe (question précédente) et elle est incluse, par définition, dans tout convexe qui contient X . C'est donc le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe qui contient X .

7.c) Posons

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i / n \geq 1, \{x_1, \dots, x_n\} \subset X, \forall i, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}$$

- Il est évident que S contient X (pour $x \in X$, prendre $n = 1$, $x_1 = x$ et $t = 1$). Soient $x, x' \in S$; on peut trouver un $n \geq 1$ ($m \geq 1$), des x_i (x'_i) dans X , des t_i (et t'_i) positifs dont la somme vaut 1 tels que

$$x = \sum_{i=1}^n t_i x_i \quad \text{et} \quad x' = \sum_{i=1}^m t'_i x_i$$

Si $u \in [0, 1]$ alors

$$ux + (1 - u)x' = \sum_{i=1}^{m+n} t''_i y_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall i \in [1, n], y_i = x_i, t''_i = t_i \\ \forall i \in [n+1, n+m], y_i = x'_{i-n}, t''_i = t'_{i-n} \end{cases}$$

Les t''_i sont positifs de somme 1 et les y_i sont dans X . Ainsi, $ux + (1 - u)x' \in S$ et S est convexe. S étant UN convexe contenant X , on a

$$\text{Conv}(X) \subset S$$

- Réciproquement, tous les éléments de X sont dans $\text{Conv}(X)$ et cet ensemble est convexe et contient donc tous les barycentres d'éléments de X à coefficients positifs. Ainsi, $S \subset \text{Conv}(X)$. Par double inclusion, on a prouvé que $S = \text{Conv}(X)$.

7.d) L'application $z \mapsto |z|$ étant continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ elle est bornée et atteint ses bornes sur le convexe C . Il existe donc $z_0 \in C$ de module minimal.

Supposons que z_0 et z_1 soient deux éléments de C de module minimal. Comme C est convexe, $\frac{1}{2}(z_0 + z_1) \in C$ et, par minimalité

$$\frac{1}{2}|z_0 + z_1| \geq |z_0| = \frac{1}{2}(|z_0| + |z_1|)$$

On est donc dans un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire et z_0 et z_1 ont donc même argument. Comme ils ont même module, ils sont égaux. On a donc

$$\exists ! z_0 \in C / |z_0| = \min_{z \in C} |z|$$

7.e) Soit D la médiatrice du segment $[0, z_0]$. Comme $z_0 \neq 0$, cette droite est bien définie et ne passe pas par l'origine. Elle délimite $\mathbb{C}$ en deux demi-plans Π^+ (qui contient 0) et Π^- (qui contient z_0).

- Montrons que K est strictement inclus dans le plan Π^- .

Supposons, par l'absurde, que l'on puisse trouver $z \in \Pi^+ \cap K$. On a $|z| \geq |z_0|$ (car $|z_0|$ est de module minimal dans K). Le segment $[z_0, z]$ coupe le cercle de centre 0 de rayon $|z_0|$ mais n'est pas tangent à ce cercle ; il recoupe le cercle en un point autre z_1 que z_0 . K étant convexe $z_1 \in K$ et $|z_1| = |z_0|$ contredit l'unicité de z_0 .

- D a une équation du type $a\text{Re}(z) + b\text{Im}(z) + c = 0$ et, quitte à multiplier par -1 , on peut supposer $c \leq 0$. Comme 0 n'est pas sur la droite, on a $c \neq 0$ et donc $c < 0$. Π^+ correspond alors à $a\text{Re}(z) + b\text{Im}(z) + c \leq 0$. Tous les éléments z de K vérifient donc $a\text{Re}(z) + b\text{Im}(z) + c > 0$.

7.f) On doit prouver une équivalence.

- Supposons qu'il existe θ réel tel que $e^{i\theta}K \subset P$. K ne contient pas l'origine (car sinon on aurait $0 = e^{i\theta}0 \in P$ ce qui est faux).
- Réciproquement, supposons que K (supposé convexe et fermé) ne contient pas 0. La question précédente donne a, b et c avec $c < 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ (sinon, on n'a pas une droite). Quitte à diviser par $\sqrt{a^2 + b^2}$, on peut supposer $a^2 + b^2 = 1$. Il existe alors θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = -\sin(\theta)$. Pour tout $z \in K$, on a

$$\text{Re}(ze^{i\theta}) = \cos(\theta)\text{Re}(z) - \sin(\theta)\text{Im}(z) > -c > 0$$

Ainsi $e^{i\theta}K \subset P$.

8.a) $G_{\mathcal{V}}(A)$ est un convexe (c'est une enveloppe convexe) fermé (admis par l'énoncé). Il ne contient pas 0 si et seulement s'il existe θ réel tel que $e^{i\theta}G_{\mathcal{V}}(A) \subset P$.

Soit $z \in G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A)$; d'après la question 7.c, il existe $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in A$, $t_1, \dots, t_n \geq 0$ de somme 1 tels que

$$z = \sum_{k=1}^n t_k(e^{i\theta}x_k) = e^{i\theta} \sum_{k=1}^n t_k x_k \in e^{i\theta}G_{\mathcal{V}}(A)$$

Réciproquement, si $z \in e^{i\theta}G_{\mathcal{V}}(A)$ on montre de même que $z \in G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A)$. Finalement, les ensembles sont égaux.

Ainsi, $G_{\mathcal{V}}(A)$ ne contient pas 0 si et seulement s'il existe θ réel tel que $G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A) \subset P$

8.b) On doit prouver une équivalence.

- Supposons que $\forall i, \operatorname{Re}(a_{i,i}) > E_i(A)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ vérifiant $|z - a_{j,j}| \leq E_j(A)$; on a alors $\operatorname{Re}(a_{j,j}) - \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z - a_{j,j})| \leq |z - a_{j,j}| \leq E_j(A)$ et donc $\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Re}(a_{j,j}) - E_j(A) > 0$.

Soit $z \in G_{\mathcal{V}}(A)$; z est une combinaison convexe de z_k ayant la propriété précédente c'est à dire dans P . Comme P est convexe, z est aussi dans P et on a $G_{\mathcal{V}}(A) \subset P$.

- Réciproquement, supposons $G_{\mathcal{V}}(A) \subset P$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$; $a_{i,i} - E_i(A) \in G_{\mathcal{V}}(A)$ (il est dans l'un des ensembles dont $G_{\mathcal{V}}(A)$ est l'enveloppe convexe de la réunion). On a donc $\operatorname{Re}(a_{i,i} - E_i(A)) > 0$ et ainsi $\operatorname{Re}(a_{i,i}) > E_i(A)$.

8.c) On a

$$L_i(H(A)) = \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{i,j} + \overline{a_{j,i}}}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|) = E_i(A)$$

De plus, les coefficients diagonaux de $H(A)$ sont les $\operatorname{Re}(a_{i,i})$.

Soit λ une valeur propre de $H(A)$. $H(A) - \lambda I_n$ n'est pas inversible et avec la question 6 on a l'existence d'un i tel que $|\operatorname{Re}(a_{i,i}) - \lambda| \leq L_i(H(A)) \leq E_i(A)$. Ainsi,

$$\operatorname{Re}(a_{i,i}) - \operatorname{Re}(\lambda) \leq |\operatorname{Re}(a_{i,i}) - \lambda| \leq E_i(A)$$

et donc $\operatorname{Re}(\lambda) \geq \operatorname{Re}(a_{i,i}) - E_i(A)$. Avec la question précédente, cette quantité est > 0 . On a ainsi

$$\operatorname{Sp}(H(A)) \subset P$$

Avec la question 4.h, on a donc $\mathcal{V}(H(A)) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et avec 4.b on en déduit que $\operatorname{Re}(\mathcal{V}(A)) \subset \mathbb{R}^{+*}$ c'est à dire que tous les éléments de $\mathcal{V}(A)$ ont une partie réelle > 0 c'est à dire

$$\mathcal{V}(A) \subset P$$

8.d) Supposons que $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A)$. 8.a donne un réel θ tel que $G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A) \subset P$. 8.c donne alors $\mathcal{V}(e^{i\theta}A) \subset P$. Comme $\mathcal{V}(e^{i\theta}A) = e^{i\theta}\mathcal{V}(A)$ (quasi-immédiat) et comme $0 \notin P$, on a donc $0 \notin e^{i\theta}\mathcal{V}(A)$ et finalement $0 \notin \mathcal{V}(A)$.

8.e) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; posons $B = A - \lambda I_n$. On a $E_i(B) = E_i(A)$ (dans le calcul, les coefficients diagonaux n'interviennent pas). On a aussi l'équivalence

$$|z - b_{i,i}| \leq E_i(B) \iff |(z + \lambda) - a_{i,i}| \leq E_i(A)$$

et on prouve ainsi aisément (tout est transformé par translation et l'enveloppe convexe du translaté est le translaté de l'enveloppe convexe) que

$$z \in G_{\mathcal{V}}(B) \iff z + \lambda \in G_{\mathcal{V}}(A)$$

Ainsi, si $\mu \notin G_{\mathcal{V}}(A)$, $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A - \mu I_n)$ et donc (question précédente) $0 \notin \mathcal{V}(A - \mu I_n)$. Il reste à remarquer (immédiat avec la définition) que $\mathcal{V}(A - \mu I_n) = \mathcal{V}(A) - \mu$ pour conclure que $\mu \notin \mathcal{V}(A)$. En contraposant, on obtient

$$\mathcal{V}(A) \subset G_{\mathcal{V}}(A)$$

Quatrième partie.

9.a) Soit $x \in \mathbb{C}^n$ non nul et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\|Mx\| = \|x\| \left\| M \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|M\| \|x\|$$

inégalité qui reste vraie pour $x = 0$ et que l'on utilisera dans la suite.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$ de norme 1. On a

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Ax\| \leq \|A\| \|B\| \|x\| = \|A\| \|B\|$$

En passant à la borne supérieure sur les x , on en déduit que

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

9.b) A^*A est une matrice hermitienne et on peut donc trouver une b.o.n. $(v_1, \dots, v_n)$ formée de vecteurs propres pour cette matrice. De plus, les valeurs propres associées sont réelles et on peut, quitte à renuméroter, les supposer ordonnées : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Enfin,

$$0 \leq \langle Av_i | Av_i \rangle = v_i^* A^* A v_i = v_i^* (\lambda_i v_i) = \lambda_i$$

montre que les valeurs propres sont positives.

Soit $x \in \mathbb{C}^n$ de norme 1 ; il s'écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ avec $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$ et on a

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax | Ax \rangle = x^* A^* A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 \leq \lambda_n$$

En passant à la racine carrée (opération croissante) puis à la borne supérieure sur x , on obtient $\|A\|_2 \leq \sqrt{\lambda_n}$. Cette inégalité est une égalité car pour $x = v_n$, les inégalités précédentes sont des égalités (et on a donc un maximum). On a donc

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max \text{Sp}(A^*A)}$$

9.c)

i) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et x un vecteur propre associé. On a

$$r(A) \geq \frac{x^* A x}{x^* x} = \frac{\lambda x^* x}{x^* x} = \lambda$$

Ceci étant vrai pour toute valeur propre λ , on en déduit que

$$\rho(A) \leq r(A)$$

ii) Soit z tel qu'il existe un j avec $|z - a_{j,j}| \leq E_j(A)$. On a alors

$$|z| \leq |a_{j,j}| + E_j(A) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_{k,j}| + |a_{j,k}|) \leq M = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|)$$

Un élément de $\mathcal{V}(A)$ est (question 8.e)) dans $G_{\mathcal{V}}(A)$ et est donc combinaison convexe d'éléments du type précédents et donc d'éléments dans la boule de centre 0 de rayon M . Comme cette boule est convexe, notre élément lui appartient. On a montré ainsi que tout élément de $\mathcal{V}(A)$ est de module inférieur ou égal à M . En passant à la borne supérieure, on obtient

$$r(A) \leq M = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|)$$

iii) Avec les formules admises par l'énoncé, on a

$$\forall i, \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|) \leq \frac{|||A|||_1 + |||A|||_\infty}{2}$$

En passant au maximum sur i , la question précédente donne $r(A) \leq \frac{|||A|||_1 + |||A|||_\infty}{2}$. L'autre inégalité a été prouvée en *c.i*).

10.a) r est bien définie et est positive. Si $r(A) = 0$ alors $\mathcal{V}(A) = 0$ et 5.b) montre que $A = 0$ (axiome de séparation). Si $x \in \mathbb{C}^n$ est non nul,

$$\left| \frac{x^*(A+B)x}{x^*x} \right| \leq \left| \frac{x^*Ax}{x^*x} \right| + \left| \frac{x^*Bx}{x^*x} \right| \leq r(A) + r(B)$$

En passant à la borne supérieure sur x , on a donc $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ (inégalité triangulaire).

On a aussi, pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\left| \frac{x^*(\lambda A)x}{x^*x} \right| = |\lambda| \left| \frac{x^*Ax}{x^*x} \right|$$

Comme λ est une constante, le passage au maximum donne $r(\lambda x) = |\lambda|r(x)$ (homogénéité). r est ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

10.b) Soit $x = (a, b) \neq (0, 0)$; on a

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} = \frac{2\bar{a}b}{|a|^2 + |b|^2}, \quad \frac{x^*Bx}{x^*x} = \frac{2a\bar{b}}{|a|^2 + |b|^2}$$

- $\left| \frac{2\bar{a}b}{|a|^2 + |b|^2} \right| \leq 1$ car $2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$. Ainsi, $\mathcal{V}(A)$ est inclus dans le disque unité. En choisissant $a = re^{2i\theta}$ et $b = e^{i\theta}$, on a

$$\forall r \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \frac{2r}{1+r^2}e^{i\theta} \in \mathcal{V}(A)$$

Quand θ et r varient dans $\mathbb{R}$, la quantité précédente décrit le disque unité. On a finalement

$$\mathcal{V}(A) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

- De façon similaire,

$$\mathcal{V}(B) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

- On en déduit que

$$\mathcal{V}(A)\mathcal{V}(B) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

- $AB = \text{diag}(4, 0)$ et donc

$$\mathcal{V}(AB) = [0, 4]$$

On a $r(AB) = 4$ et $r(A)r(B) = 1$ ce qui montre que r n'est pas une norme matricielle.

10.c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \neq 0, \left| \frac{x^*Ax}{x^*x} \right| = \frac{|\langle x, Ax \rangle|}{\|x\|_2} \leq \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq |||A|||_2$$

En passant à la borne supérieure sur x , on a donc

$$r(A) \leq |||A|||_2$$

Si A est hermitienne alors $|||A|||_2 = \sqrt{\max \text{Sp}(A^*A)} = \sqrt{\max \text{Sp}(A^2)}$ (question 9.b)). A étant diagonalisable, les valeurs propres de A^2 sont les carrés de celles de A et donc

$$|||A|||_2 = \max\{|\lambda| / \lambda \in \text{Sp}(A)\}$$

Par ailleurs (toujours quand A est hermitienne), la question 4.h) donne $r(A) = \max\{|z| / z \in [\min \text{Sp}(A), \max \text{Sp}(A)]\} = \max\{|\lambda| / \lambda \in \text{Sp}(A)\}$. On a donc l'égalité $r(A) = |||A|||_2$ dans ce cas.

Si A est antihermitienne, iA est hermitienne et $r(iA) = |||iA|||_2$ donne encore $r(A) = |||A|||_2$.

10.d) Avec la décomposition donnée et l'inégalité triangulaire, on a

$$|||A|||_2 \leq \left\| \left\| \frac{A + A^*}{2} \right\| \right\|_2 + \left\| \left\| \frac{A - A^*}{2} \right\| \right\|_2$$

Avec la question précédente (en vérifiant que $\frac{A+A^*}{2}$ est hermitienne et $\frac{A-A^*}{2}$ anti-hermitienne) on en déduit que

$$|||A|||_2 \leq r\left(\frac{A + A^*}{2}\right) + r\left(\frac{A - A^*}{2}\right)$$

r étant une norme, on a alors (inégalité triangulaire et homogénéité)

$$|||A|||_2 \leq r(A) + r(A^*)$$

On remarque enfin que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad x^* A^* x = (Ax)^* x = \overline{x^* A x}$$

En divisant par $x^* x$ pour x non nul, en passant au module puis à la borne supérieure sur x , on en déduit que $r(A) = r(A^*)$. Finalement, on a

$$|||A|||_2 \leq 2r(A)$$

10.e) On a ainsi, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$4r(AB) \leq 4|||AB|||_2 \leq 4|||A|||_2 |||B|||_2 \leq 4(2r(A))(2r(B)) = (4r(A))(4r(B))$$

Comme $4r$ est évidemment une norme, c'est bien une norme matricielle.

10.f) De façon similaire, on a $cr(AB) \leq 4cr(A)r(B)$. Si $c \geq 4$ alors $4c \leq c^2$ et donc $cr(AB) \leq (cr(A))(cr(B))$. Comme $c > 0$, cr est une norme et donc aussi une norme matricielle.

Réciproquement, supposons que $c \in]0, 4[$. cr est une norme dont nous pouvons montrer qu'elle n'est pas matricielle. Il suffit de considérer les matrices A et B dont les coefficients sont tous nuls sauf $a_{1,2}$ et $b_{2,1}$ qui valent 2 (on suppose donc que $n \geq 2$). On a alors $AB = \text{diag}(4, 0, \dots, 0)$ et donc $r(AB) = 4$. Un calcul similaire à celui de 10.a) montre aussi que $r(A) \leq 1$ et $r(B) \leq 1$. On a donc $cr(AB) = 4c > c^2 \geq cr(A)cr(B)$.