Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

Centrale 2002, filière MP, première épreuve

• Préliminaires

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Avec les notations des définitions du texte, on a $0 \leqslant n^k \lambda_n \leqslant M n^k r^n$, qui tend classiquement vers 0. La suite $(n^k \lambda_n)$ converge donc vers 0, et par conséquent est bornée.

b) Il est clair qu'une combinaison linéaire à coefficients positifs de deux suites à décroissance rapide (resp. exponentielle) est encore à décroissance rapide (resp. exponentielle) : pour le second cas, il suffit de considérer la plus grande des raisons des suites géométriques associées. Le fait que $\mathcal{E}_\infty$ et $\mathcal{E}_{\text{exp}}$ sont des sous-e.v. de $C\big([-1,\,1],\,\mathbb{C}\big)$ résulte alors de l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_\infty$ et de ce que $\mathbb{C}_n[X]$ est lui-même un sous-e.v. D'après le a), $\mathcal{E}_{\text{exp}} \subset \mathcal{E}_\infty$.

c) i) Soit $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k \in \mathbb{C}_n[X]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne directement $\|f - P_n\|_\infty \leqslant \dfrac{M}{(n+1)!}$.

La suite $\left(\dfrac{1}{(n+1)!}\right)$ est à décroissance exponentielle (tout $r \in]0,1[$ convient dans la définition), donc $f \in \mathcal{E}_{\text{exp}}$.

ii) La fonction exponentielle, les fonctions sinus et cosinus vérifient la condition du i) et appartiennent donc à $\mathcal{E}_{\text{exp}}$.

• Partie I

A1) Pour tout $(n,\theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\,\cos n\theta - \cos(n-1)\theta$; Donc, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times [-1,\,1]$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. La propriété demandée est alors immédiate par récurrence sur deux termes.

A2) $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. Avec la relation vue en A1), on obtient $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$, $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

A3) Égalité déja établie en A1).

A4) Une récurrence sur deux termes montre que T_n a la parité de n, que $\deg T_n = n$ et que, pour $n \geqslant 1$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.

A5) On donne une procédure Maple :

```
Poly_Tcheb := proc(n)
   local i, T_act, T_suiv, T_temp ;
   T_act := 1 ; T_suiv := X ;
   for i from 1 to n
   do
      T_temp := T_act ; T_act := T_suiv ; T_suiv := 2*X*T_act - T_temp
   enddo ;
   sort(expand(T_act))
end :
```

A6) Il suffit d'appliquer à $\cos t$ la définition de T_n, en remarquant que $t = \text{Arccos}(\cos t)$, puisque $t \in [0,\pi]$.

Remarque : l'égalité demandée est en fait valable sur $\mathbb{R}$, puisque les deux membres sont pairs et 2π-périodiques.

B1) $\|T_n\|_\infty = 1$, d'après la définition de T_n et le fait que $T_n(1) = 1$.

B2) Récurrence simple sur n, à partir de la formule d'addition pour le sinus.

B3) En dérivant la relation du A6), on obtient $\sin t\, T_n'(\cos t) = n \sin nt$, donc avec B2) $|T_n'(\cos t)| \leqslant n^2$ pour $t \in]0,\pi[$, mais aussi $T_n'(1) = |T_n'(-1)| = n^2$ en faisant tendre t vers 0 et par parité. Finalement, $\|T_n'\|_\infty = n^2$.

C1) Récurrence facile sur deux termes, en utilisant A3).

C2) a) Le réel $r = e^{\text{Argch}\,x} = x + \sqrt{x^2-1}$ convient de façon évidente.

b) Avec les notations du a), $T_n(x) = \dfrac{r^n + r^{-n}}{2}$, donc d'une part, $T_n(x) - 1 = \dfrac{r^{-n}}{2}\,(r^n - 1)^2 \geqslant 0$ et d'autre part, $T_n(x) \leqslant r^n = \big(x + \sqrt{x^2-1}\big)^n$, puisque $r^{-n} \leqslant r^n$ $(r \geqslant 1)$.

D1) En redérivant l'égalité obtenue en B3), on obtient $\cos t\, T_n'(\cos t) - \sin^2 t\, T_n''(\cos t) = n^2 \cos nt = n^2\, T_n(\cos t)$.
On en déduit que, pour tout $x \in [-1,1]$, $(x^2-1)\, T_n''(x) + x\, T_n'(x) - n^2\, T_n(x) = 0$.
Le membre de gauche étant polynômial, cette égalité est en fait valable sur $\mathbb{R}$ entier.

D2) On dérive k fois l'égalité du D1) par la formule de Leibniz. Il vient :
$(x^2-1)\,T_n^{(k+2)}(x)+2kx\,T_n^{(k+1)}(x)+k(k-1)\,T_n^{(k)}(x)+x\,T_n^{(k+1)}(x)+k\,T_n^{(k)}(x)-n^2\,T_n^{(k)}(x)=0.$
En évaluant en $x=1$, on obtient $T_n^{(k+1)}(1)=\dfrac{(n-k)(n+k)}{2k+1}\,T_n^{(k)}(1)$. La première des égalités demandées s'établit alors facilement par récurrence. La seconde résulte de ce que $T_n^{(k)}$ est, selon A4), de la parité de $n+k$.

- **Partie II**

A1) $|T_n(x)|=1 \iff n\,\mathrm{Arccos}\,x$ est multiple de $\pi \iff \mathrm{Arccos}\,x$ est multiple de π/n. Les solutions sont donc les a_j.
D'après I.D2) (ou I.B3)), $T_n'(a_n)=T_n'(1)=n^2$ et $T_n'(a_0)=T_n'(-1)=(-1)^{n-1}n^2$.
Pour $j\in[\![1,\,n-1]\!]$, d'après ce qui précède et I.B1), T_n possède un extremum local en a_j, donc $T_n'(a_j)=0$.

A2) $T_n(a_j)=\cos(n-j)\pi=(-1)^{n-j}$. T_n et $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}L_i$ prennent donc la même valeur en chacun des $n+1$ points a_j.
Comme ces deux polynômes sont de degré au plus n, ils sont égaux.

A3) $L_i(x)=\dfrac{\prod\limits_{j\in E_i}(x-a_j)}{\prod\limits_{j\in E_i}(a_i-a_j)}\cdot$ Pour $x\in[1,\,+\infty[$, les facteurs du numérateur sont tous positifs, tandis que le dénominateur comporte $n-i$ facteurs négatifs, correspondant à $j\in[\![i+1,\,n]\!]$. $L_i(x)$ est donc du signe de $(-1)^{n-i}$, c'est-à-dire que $(-1)^{n-i}L_i(x)=|L_i(x)|$. Il suffit alors d'appliquer en x l'égalité du A2).

A4) Pour les mêmes raisons qu'en A2), on a l'égalité $P=\sum\limits_{i=0}^{n}P(a_i)L_i$, donc, pour $x\in[1,\,+\infty[$, d'après A3) et I.C2)b) :
$$|P(x)|\leqslant\sum_{i=0}^{n}|P(a_i)||L_i(x)|\leqslant\|P\|_\infty\sum_{i=0}^{n}|L_i(x)|=\|P\|_\infty\,T_n(x)\leqslant\|P\|_\infty\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n.$$

B1) Le polynôme $(-1)^{n-i}L_i$ est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ et toutes ses racines sont dans $[-1,\,1]$. D'après le théorème de Rolle, il en est de même de $(-1)^{n-i}L_i^{(k)}$, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. Ce polynôme est donc de signe constant sur $[1,\,+\infty[$; de plus son coefficient dominant, comme celui de $(-1)^{n-i}L_i$, est positif. Il en résulte que, pour $x\in[1,\,+\infty[$, $(-1)^{n-i}L_i^{(k)}(x)\geqslant 0$, ou encore $(-1)^{n-i}L_i^{(k)}(x)=|L_i^{(k)}(x)|$.
Il suffit alors de dériver k fois l'égalité du A2) et d'évaluer en $x\in[1,\,+\infty[$ l'égalité obtenue.

B2) Même raisonnement qu'en A4), excepté la dernière majoration, à partir de $P^{(k)}=\sum\limits_{i=0}^{n}P(a_i)L_i^{(k)}$.

C1) $P_\lambda^{(k)}=\left(\dfrac{\lambda+\varepsilon}{2}\right)^kP^{(k)}\!\left(\dfrac{\lambda+\varepsilon}{2}X+\dfrac{\lambda-\varepsilon}{2}\right)$, donc $P_\lambda^{(k)}(1)=\left(\dfrac{\lambda+\varepsilon}{2}\right)^kP^{(k)}(\lambda)$.
Comme λ et ε ont le même signe, il vient $|P_\lambda^{(k)}(1)|=\left(\dfrac{|\lambda|+1}{2}\right)^k|P^{(k)}(\lambda)|$.

C2) D'après C1), $|P^{(k)}(\lambda)|\leqslant 2^k|P_\lambda^{(k)}(1)|$. Comme $P_\lambda\in\mathbb{C}_n[X]$, B2) donne déja $|P^{(k)}(\lambda)|\leqslant 2^k\|P_\lambda\|_\infty\,T_n^{(k)}(1)$.
D'autre part, lorsque x décrit $[-1,\,1]$, $\dfrac{\lambda+\varepsilon}{2}\,x+\dfrac{\lambda-\varepsilon}{2}$ décrit $[-1,\,\lambda]$ ou $[\lambda,1]$, qui est inclus dans $[-1,\,1]$, ce qui montre que $\|P_\lambda\|_\infty\leqslant\|P\|_\infty$.
Finalement, on a $|P^{(k)}(\lambda)|\leqslant 2^kT_n^{(k)}(1)\|P\|_\infty$, et cela pour tout $\lambda\in[-1,\,1]$. Ainsi, $\|P^{(k)}\|_\infty\leqslant 2^kT_n^{(k)}(1)\|P\|_\infty$.

C3) d'après I.D2), $T_n'(1)=n^2$ et $T_n^{(k)}(1)\leqslant\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}\,\dfrac{2^kk!}{(2k)!}$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ (on majore $\dfrac{n}{n+k}$ par 1).
Il suffit alors de reporter cette égalité ou cette inégalité dans la majoration obtenue en C2).

- **Partie III**

A1) Les fonctions considérées étant 2π-périodiques, on peut remplacer $[-\pi,\pi]$ par $\mathbb{R}$ dans la définition de N_∞.
$N_\infty\big(c_n(\varphi)e_n+c_{-n}(\varphi)e_{-n}\big)\leqslant|c_n(\varphi)|+|c_{-n}(\varphi)|$, donc la série de fonctions $\sum\big(c_n(\varphi)e_n+c_{-n}(\varphi)e_{-n}\big)$ converge normalement, et *a fortiori* uniformément sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, la suite $\big(S_n(\varphi)\big)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction ψ continue par théorème et évidemment 2π-périodique.
Comme $N_2\leqslant N_\infty$, $\big(S_n(\varphi)\big)$ converge *a fortiori* vers ψ pour la norme N_2, mais on sait par le cours que $\big(S_n(\varphi)\big)$ converge vers φ pour N_2. L'unicité de la limite donne $\psi=\varphi$.

A2) $\varphi-\omega=\big(\varphi-S_n(\varphi)\big)+\big(S_n(\varphi)-\omega\big)$, avec $\varphi-S_n(\varphi)\in\tau_n^\perp$ et $S_n(\varphi)-\omega\in\tau_n$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Pythagore.

A3) On sait que $c_k\left(\varphi^{(p)}\right) = (ik)^p c_k(\varphi)$. Par ailleurs, $|c_k\left(\varphi^{(p)}\right)| \leqslant N_\infty\left(\varphi^{(p)}\right)$ par inégalité des modules puis inégalité de la moyenne. On en déduit que, pour $k \in \mathbb{Z}^*$, $|c_k(\varphi)| \leqslant \dfrac{N_\infty\left(\varphi^{(p)}\right)}{|k|^p}$.

B) L est injective car $\cos t$ décrit $[-1, 1]$ quand t décrit $\mathbb{R}$, ou même $[0, \pi]$.
Pour la même raison, $N_\infty(Lf) = \|f\|_\infty$ pour toute $f \in C([-1,\, 1], \mathbb{C})$, et en particulier $|||L|||_\infty = 1$.
Ensuite, $2\pi\, N_2(Lf)^2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(\cos t)\right|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant 2\pi\, \|f\|_\infty^2$, avec égalité pour f constante. Il en résulte que $|||L|||_2 = 1$.

C1) C'est immédiat en posant $u = -t$ dans l'intégrale, compte tenu de la parité de Lf.

C2) Par le théorème des degrés étagés, $Q_{k-1} \in \mathrm{Vect}(T_j)_{0 \leqslant j \leqslant k-1}$, donc $LQ_{k-1} \in \mathrm{Vect}(LT_j)_{0 \leqslant j \leqslant k-1}$, or LT_j est la fonction $t \longmapsto \cos jt$. On en déduit que $LQ_{k-1} \in \tau_{k-1}$, et donc que $c_k(LQ_{k-1}) = c_{-k}(LQ_{k-1}) = 0$. D'où :

$$c_k(Lf) = \frac{c_k(Lf) + c_{-k}(Lf)}{2} = \frac{c_k(Lf - LQ_{k-1}) + c_{-k}(Lf - LQ_{k-1})}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(Lf(t) - LQ_{k-1}(t)\big) \cos kt \,\mathrm{d}t.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors $|c_k(Lf)| \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi}\, N_2(Lf - LQ_{k-1}) \sqrt{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt \,\mathrm{d}t}$.

Mais $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt \,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\int_{-k\pi}^{k\pi} \cos^2 u \,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\pi} \cos^2 u \,\mathrm{d}u = \pi$ et $N_2(Lf - LQ_{k-1}) \leqslant \|f - Q_{k-1}\|_\infty$ d'après B,

d'où finalement $|c_k(Lf)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, \|f - Q_{k-1}\|_\infty$.

Remarque : tout ce qui précède est en fait valable pour $k \in \mathbb{N}^*$.

C3) D'après C1), pour tout réel t, $S_n(Lf)(t) = c_0(Lf) + 2\sum\limits_{k=1}^{n} c_k(Lf) \cos kt$.

En prenant $t = \mathrm{Arccos}\, x$, où $x \in [-1,\, 1]$, il vient $U_n(f)(x) = c_0(Lf) + 2\sum\limits_{k=1}^{n} c_k(Lf) T_k(x)$.

C4) D'après A1), C1) et l'hypothèse faite sur les $c_k(Lf)$, on a $Lf(t) = c_0(Lf) + 2\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(Lf) \cos kt$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

et par conséquent $f(x) = c_0(Lf) + 2\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(Lf)\, T_k(x)$ pour tout $x \in [-1,\, 1]$.

Par différence avec l'égalité du C3), on obtient $f(x) - U_n(f)(x) = 2\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} c_k(Lf)\, T_k(x)$, puis, compte tenu de

$|T_k(x)| \leqslant 1$, $|f(x) - U_n(f)(x)| \leqslant 2\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(Lf)|$, toujours pour tout $x \in [-1,\, 1]$. L'inégalité demandée en résulte.

D1) Soient (Q_n) une suite de polynômes qui traduit l'appartenance de f à $\mathcal{E}_\infty$ et $p \in \mathbb{N}$. C2) donne, pour $n \geqslant 2$:

$$|c_n(Lf)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\, \|f - Q_{n-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{M_p}{(n-1)^p} \leqslant \frac{2^p M_p}{\sqrt{2}}\, \frac{1}{n^p}\cdot \quad \big(|c_n(Lf)|\big) \text{ est donc à décroissance rapide.}$$

D2) D1) montre en particulier que la série $\sum |c_n(Lf)|$ converge. On a donc, comme en C4), pour tout $x \in [-1,\, 1]$, $f(x) = c_0(Lf) + 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)\, T_n(x)$. De plus, $\|c_n(Lf) T_n\|_\infty = |c_n(Lf)|$, terme général d'une série convergente.
La série de fonctions $\sum c_n(Lf)\, T_n$ est donc normalement convergente sur $[-1,\, 1]$.

D3) On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que f est de classe C^k et que :

$$\forall x \in [-1,\, 1],\ f^{(k)}(x) = \delta_{0,k}\, c_0(Lf) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)\, T_n^{(k)}(x).$$

. Pour $k = 0$, il suffit d'appliquer D2) (f est continue par définition de $\mathcal{E}_\infty$).

. Supposons le résultat acquis au rang $k-1$, avec $k \geqslant 1$, et posons $u_n(x) = c_n(Lf)\, T_n^{(k-1)}(x)$.
Chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $[-1,\, 1]$, avec $u_n'(x) = c_n(Lf)\, T_n^{(k)}(x)$, donc $\|u_n'\|_\infty = |c_n(Lf)|\|T_n^{(k)}\|_\infty$.
Mais en appliquant II.C3) à T_n, et compte tenu de $\|T_n\|_\infty = 1$, on constate que $\|T_n^{(k)}\|_\infty = \mathrm{O}(n^{2k})$.
Or $|c_n(Lf)| = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{2k+2}}\right)$ d'après D1). On en déduit que $\sum \|u_n'\|_\infty$ converge, c'est-à-dire que $\sum u_n'$ converge normalement sur $[-1,\, 1]$. Par théorème, il en résulte que $f^{(k-1)}$ est de classe C^1, *i.e.* que f est de classe C^k, et que l'on peut dériver terme à terme, donc $f^{(k)}(x) = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)\, T_n^{(k)}(x)$.

E1) Lf, comme f, est de classe C^∞. On peut donc appliquer III.A3) avec p arbitraire, ce qui donne le résultat.

E2) $U_n(f)$ appartient à $\mathbb{C}_n[X]$ et il suffit donc de montrer que la suite $\big(\|f-U_n(f)\|_\infty\big)$ est à décroissance rapide.

Soit donc $p \in \mathbb{N}^*$. D'après E1), il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|c_k(Lf)| \leqslant \dfrac{M}{k^{p+1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

La question C4), qui est applicable d'après la majoration précédente, montre alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|f-U_n(f)\|_\infty \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{M}{k^{p+1}} \leqslant 2M\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^{p+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{2M}{p}\,\frac{1}{n^p},\ \text{ ce qui achève la preuve.}$$

• Partie IV

A) . Supposons a). Soit (Q_n) une suite de polynômes qui traduit l'appartenance de f à $\mathcal{E}_{\exp}$, puis $M \in \mathbb{R}_+$ et $r \in]0,1[$ des réels associés à la décroissance exponentielle de la suite $\big(\|f-Q_n\|_\infty\big)$. III.C2) donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |c_n(Lf)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,Mr^{n-1} = \frac{M}{r\sqrt{2}}\,r^n,\ \text{ ce qui prouve que } \big(|c_n(Lf)|\big) \text{ est à décroissance exponentielle.}$$

. Supposons b). La question III.C4) s'applique évidemment, donc, si $M \in \mathbb{R}_+$ et $r \in]0,1[$ sont associés à la décroissance exponentielle de $\big(|c_n(Lf)|\big)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f-U_n(f)\|_\infty \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} Mr^k = \frac{2Mr}{1-r}\,r^n,\ \text{ ce qui prouve que } f \in \mathcal{E}_{\exp}, \text{ puisque } U_n(f) \in \mathbb{C}_n[X].$$

B1) $\mathcal{E}_{\exp} \subset \mathcal{E}_\infty$, donc III.D2) et III.D3) s'appliquent.

B2) En utilisant la majoration de $|c_n(Lf)|$ et celle de $\|T_n^{(k)}\|_\infty$ donnée par II.C3), la question B1) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\|f^{(k)}\|_\infty &\leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} Mr^n\, 2^{2k}\frac{k!}{(2k)!}\,(n+k)\cdots(n-k+1) = 2^{2k+1}M\,k!\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(n+k)\cdots(n-k+1)}{(2k)!}\,r^n \\
&= 2^{2k+1}M\,k!\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+1)\cdots(m+2k)}{(2k)!}\,r^{m+k} = 2^{2k+1}M\,k!\,r^k\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2k+1)\cdots(2k+m)}{m!}\,r^m \\
&= 2^{2k+1}M\,k!\,r^k\,(1-r)^{-2k-1} = \frac{2M}{1-r}\,\frac{4^k r^k\,k!}{(1-r)^{2k}} = \frac{2M}{1-r}\,\frac{k!}{\lambda(r)^k}.
\end{aligned}$$

C) Soit $x \in [-1,\,1] \cap]a-\lambda(r),\,a+\lambda(r)[$. L'inégalité de Taylor-Lagrange et B2) donnent :

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\right| \leqslant \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty\,|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{2M}{1-r}\left(\frac{|x-a|}{\lambda(r)}\right)^{n+1},$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, puisque $|x-a| < \lambda(r)$ par hypothèse.

D) On montre classiquement par récurrence sur n, à l'aide du théorème de « prolongement de la dérivée », que f est de classe C^n, que $f^{(n)}(0)=0$, et que, pour $x \neq 0$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)$, où P_n est un polynôme. Ainsi, $f \in \mathcal{E}_\infty$.

En particulier, la série de Taylor de f en 0 est la série nulle, donc, si f était développable en série entière en 0, elle serait nulle au voisinage de 0, ce qui est faux. Par contraposée du C), on en déduit que $f \notin \mathcal{E}_{\exp}$.

E) Fixons $r \in]1,\rho[$ et notons, pour $x \in]-\rho,\,\rho[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,x^k$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k$, d'où $S_n \in \mathbb{C}_n[X]$.

Pour $x \in [-1,\,1]$, on peut écrire :

$$|f(x)-S_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|\,|x|^k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \leqslant \Big(\frac{1}{r}\Big)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|\,r^k \leqslant \Big(\frac{1}{r}\Big)^n \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\,r^k.$$

Ainsi, $\|f-S_n\|_\infty \leqslant M(r')^n$, où $M = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\,r^k$ et $r' = 1/r \in]0,1[$.

Cela prouve que la suite $\big(\|f-S_n\|_\infty\big)$ est à décroissance exponentielle et donc que $f \in \mathcal{E}_{\exp}$.
