

* BANQUE FILIÈRE PT *

Épreuve de Mathématiques II-A

durée 4h

Les trois exercices sont indépendants. Ils seront rédigés sur des copies distinctes regroupées dans l'une d'entre elles formant chemise.

Exercice n° 1 :

Soit $E = \mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

On note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ le produit vectoriel et on rappelle la formule du double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$.

On note $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times E$ l'ensemble des éléments $Q = (x, \vec{u})$ où $x \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \in E$.

1°) On définit sur $\mathbb{H}$ la loi de composition suivante :

$$(x, \vec{u}) * (x', \vec{u}') = (xx' - \vec{u} \cdot \vec{u}', x'\vec{u} + x\vec{u}' + \vec{u} \wedge \vec{u}').$$

Montrer que $*$ est une loi de composition interne.

Préciser l'élément neutre et montrer que l'inverse de $Q = (x, \vec{u})$, quand il existe, est

$$\left(\frac{x}{x^2 + \vec{u} \cdot \vec{u}}, \frac{-\vec{u}}{x^2 + \vec{u} \cdot \vec{u}} \right) \text{ que l'on notera } Q^{-1}.$$

En déduire que $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{(0, \vec{0})\}$ muni de la loi $*$ possède une structure de groupe non commutatif.

(Pour éviter un calcul fastidieux, on admettra l'associativité).

2°) $Q \in \mathbb{H}$ étant donné, quels sont les éléments $Q' = (x', \vec{u}') \in \mathbb{H}$ tels que :

$$Q * Q' = Q' * Q ?$$

En déduire que les éléments $Q' \in \mathbb{H}$ tels que : $Q * Q' = Q' * Q$ pour tout $Q \in \mathbb{H}$ sont de la forme $(x', \vec{0})$.

3°) Si $Q = (x, \vec{u})$, on note $\bar{Q}$ l'élément $(x, -\vec{u})$.

Établir que $\overline{Q * Q'} = \bar{Q}' * \bar{Q}$ et que $Q * \bar{Q}$ est de la forme $(q, \vec{0})$ avec $q \in \mathbb{R}^+$.

Ce réel q est noté $N(Q)$. Établir l'égalité : $N(Q * Q') = N(Q)N(Q')$.

Soit S l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}$ qui s'écrivent sous la forme $(\cos \theta, \sin \theta \vec{a})$ où θ appartient à $\mathbb{R}$ et $\vec{a}$ est un vecteur unitaire de E .

Montrer que tout élément Q de S vérifie $N(Q) = 1$. Étudier la réciproque.

S est-il un sous-groupe de $(\mathbb{H}^*, *)$?

4°) Soit $\mathcal{R}$ la rotation vectorielle de E d'axe dirigé par le vecteur unitaire $\vec{a}$ et d'angle de mesure θ .

Montrer que l'image par $\mathcal{R}$ d'un vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{a}$ est donnée par :

$$\mathcal{R}(\vec{v}) = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta \vec{a} \wedge \vec{v}.$$

En déduire l'image par $\mathcal{R}$ d'un vecteur $\vec{u}$ quelconque de E .

5 °) Si $Q \in S$, on considère l'application Φ_Q de $\mathbb{H}$ dans lui-même, définie par :

$$\Phi_Q(M) = Q * M * Q^{-1}.$$

Montrer que l'image de $M = (x, \vec{u})$ est de la forme $\Phi_Q(M) = (x, \mathcal{R}_Q(\vec{u}))$ où $\mathcal{R}_Q$ est une rotation vectorielle de E , ne dépendant que de Q .

Quel est son axe ? la mesure de son angle ?

6 °) Montrer que l'application : $Q \mapsto \mathcal{R}_Q$ de S dans le groupe des rotations de E , noté $O^+(E)$, est un morphisme surjectif de groupes.

Que peut-on dire de Q et Q' si $\mathcal{R}_Q = \mathcal{R}_{Q'}$? Conclure.

Exercice n° 2 :

On pose $\varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ et $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1 °) Montrer que φ est une fonction définie et continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et qu'elle peut être prolongée par continuité en 0.

Établir que φ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et la calculer en posant $t = 1/u$.

2 °) Établir l'inégalité $\ln(1+u) \leq \sqrt{u}$ pour $u \geq 0$.

Montrer que f est une fonction définie de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $A > 0$. Montrer que f est continue sur $[0, A]$.

En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.

3 °) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que f est de classe C^1 sur $[\varepsilon, +\infty[$.

En déduire que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Pour $x \neq 0$, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle en t :

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}.$$

En déduire l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$.

4 °) Exprimer f à l'aide de φ . Donner un équivalent de f en $+\infty$.

5 °) Établir l'inégalité $\ln(1+u) \geq \frac{u}{1+u}$ pour $u \geq 0$. Montrer : $\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq f'(x)$ pour $x > 0$.

f est-elle dérivable en 0 ?

La courbe représentative de f admet-elle une tangente en 0 ?

Exercice n° 3 :

Soit θ un réel. On note sh la fonction sinus hyperbolique et $\ln$ la fonction logarithme népérien.

1 °) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 \text{sh} \theta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire ses valeurs propres (On pourra les exprimer à l'aide de la fonction exponentielle).

A est-elle diagonalisable ?

Donner une base orthonormée de vecteurs propres. On distinguera deux cas selon les valeurs de θ .

- 2°) Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}_1$, on considère la surface (S) d'équation :

$$2 \operatorname{sh}(\theta)x^2 + y^2 + 2xz - 2y = 0.$$

Montrer que le point Ω de coordonnées $(0, 1, 0)$ dans le repère $\mathcal{R}_1$ est centre de symétrie.

Quelle est la nature de (S) ?

Soit $\mathcal{R}_2$ le repère orthonormé dans lequel l'équation de (S) se ramène à :

$$X^2 + e^\theta Y^2 - e^{-\theta} Z^2 = 1.$$

Expliciter les formules donnant les nouvelles coordonnées (X, Y, Z) en fonction des anciennes (x, y, z) .

- 3°) Dans le repère $\mathcal{R}_2$, étudier la nature de l'intersection de (S) avec les plans d'équations $X = h$ ($h \in \mathbb{R}$), puis $Z = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

Dans le cas particulier $\theta = \ln 2$, tracer sur des figures planes différentes les intersections correspondant à $h = 1$ et $h = 3$ dans le plan $Y\Omega Z$ puis $k = 0$ dans le plan $X\Omega Y$.

- 4°) Soient a, b, c des réels tels que $a^2 + b^2 = 1 + c^2$.

Montrer qu'il existe un réel α tel que :

$$a = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \text{ et } b = \frac{\sin \alpha}{\cos \gamma} \text{ où } \gamma = \arctan c$$

En posant $\alpha = \beta - \gamma$, en déduire qu'il existe un réel β tel que :

$$\begin{aligned} a &= \cos \beta + c \sin \beta \\ b &= \sin \beta - c \cos \beta. \end{aligned}$$

- 5°) On considère la famille de droites D_v , $v \in \mathbb{R}$ donnée dans le repère $\mathcal{R}_2$ par :

$$\begin{cases} X = \cos v + u \sin v \\ Y = e^{-\theta/2} \sin v - e^{-\theta/2} u \cos v \\ Z = e^{\theta/2} u \end{cases} \text{ pour } u \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites D_v sont contenues dans (S) et qu'elles l'engendrent.

(S) est-elle développable ? Pourquoi ?